Geometrie – Lösungen zu Übungsserie III

1. Diese trigonometrischen Grundaufgaben müssen wir ohne Wenn und Aber gut beherrschen, also quasi im Schlaf! Daher zeige ich am Anfang ganz ausführlich vor, wie zu denken ist. Hinterher notiere ich von Aufgabe zu Aufgabe etwas weniger.

   (a) Gegeben sind von unserem Dreieck die Hypotenuse $c = 5.6$ und der Winkel $\alpha = 33°$.

   Da α gegeben ist, betrachten wir das rechtwinklige Dreieck "von diesem Winkel aus". Das bedeutet, bezüglich α ist die Seite a die Gegenkathete und die Seite b die Ankathete.

   i. Wollen wir a berechnen, so müssen wir also diejenige Winkelfunktion hervorsuchen, die die Gegenkathete (unbekannt) mit der Hypotenuse (bekannt) in Verbindung bringt. Das ist der Sinus!
   Wir notieren die Definition der Sinusfunktion, angewendet auf unser betrachtetes Dreieck:

   $$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \qquad \text{kurz:} \quad \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \text{"Sinus von } \alpha \text{ ist } a \text{ geteilt durch } c.\text{"}$$

   Diese Gleichung lösen wir nach der gesuchten Seite a auf, setzen die gegebenen Werte ein und berechnen das Resultat mit dem Taschenrechner:

   $$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \stackrel{\cdot c}{\Rightarrow} \quad a = c \cdot \sin\alpha = 5.6 \cdot \sin(33°) \stackrel{\text{TR}}{\approx} 3.0$$

   ii. Zur Berechnung von Seite b benötigen wir die Winkelfunktion, die diese Ankathete b (unbekannt) mit der Hypotenuse c (bekannt) verknüpft, also den Cosinus. Es folgt:

   $$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \stackrel{\cdot c}{\Rightarrow} \quad b = c \cdot \cos(\alpha) = 5.6 \cdot \cos(33°) \stackrel{\text{TR}}{\approx} 4.7$$

   iii. Für den anderen spitzen Winkel folgt schließlich noch: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 33° = 57°$.

   (b) Gegeben: Winkel $\beta = 44° \Rightarrow a = 4.1 =$ Ankathete bezüglich β.

   i. Gesucht: Seite $b =$ Gegenkathete bezüglich β.
   $\Rightarrow$ Tangensfunktion stellt Verbindung zwischen Gegenkathete und Ankathete her! Es folgt:

   $$\tan(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} \quad \stackrel{\cdot a}{\Rightarrow} \quad b = a \cdot \tan(\alpha) = 4.1 \cdot \tan(44°) \stackrel{\text{TR}}{\approx} 4.0$$

   ii. Gesucht: Seite $c =$ Hypotenuse.
   $\Rightarrow$ Cosinusfunktion verknüpft Hypotenuse und Ankathete miteinander! Es folgt:

   $$\cos(\beta) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \stackrel{\cdot c}{\Rightarrow} \quad a = c \cdot \cos(\beta) \quad \stackrel{:\cos(\beta)}{\Rightarrow} \quad c = \frac{a}{\cos(\beta)} = \frac{4.1}{\cos(44°)} \stackrel{\text{TR}}{\approx} 5.7$$

   iii. Anderer spitzer Winkel: $\alpha = 90° - \beta = 90° - 44° = 46°$.

   (c) Gegeben: $\beta = 26° \Rightarrow b = 6.7 =$ Gegenkathete bezüglich β.

   i. Gesucht: Ankathete $a \Rightarrow$ Tangens (verknüpft Gegenkathete und Ankathete miteinander)!

   $$\tan(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} \quad \stackrel{\cdot a}{\Rightarrow} \quad b = a \cdot \tan(\beta) \quad \stackrel{:\tan(\beta)}{\Rightarrow} \quad a = \frac{b}{\tan(\beta)} = \frac{6.7}{\tan(26°)} \stackrel{\text{TR}}{\approx} 13.7$$

   ii. Gesucht: Hypotenuse $c \Rightarrow$ Sinus (= Verbindung zwischen Gegenkathete und Hypotenuse)!

   $$\sin(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \stackrel{\cdot a}{\Rightarrow} \quad b = c \cdot \sin(\beta) \quad \stackrel{:\sin(\beta)}{\Rightarrow} \quad c = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{6.7}{\sin(26°)} \stackrel{\text{TR}}{\approx} 15.3$$

   iii. Anderer spitzer Winkel: $\alpha = 90° - \beta = 90° - 26° = 64°$.

(d) $\alpha = 75°$ mit Ankathete $b = 6.8$.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot \tan(\alpha) = 6.8 \cdot \tan(75°) \approx 25.4$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{6.8}{\cos(75°)} \approx 26.3$$
$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 75° = 15°$$

(e) **Achtung!** Bei dieser Aufgabe ist kein Winkel gegeben, sondern vielmehr einfach zwei Seiten. In diesem Fall sieht der Ablauf und die Ausführung nun etwas anders aus.
Gegeben: Kathete $a = 4.1$ und Hypotenuse $c = 4.2$.

i. Gesucht: Zweite Kathete $b \Rightarrow$ lässt sich aufspüren mit dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4.2^2 - 4.1^2} \overset{\text{TR}}{\approx} 0.9$$

ii. Gesucht: Winkel $\alpha \Rightarrow$ bezüglich α ist die gegebene Seite a die Gegenkathete. Da auch die Hypotenuse c gegeben ist, kann via Sinus eine Verbindung mit α hergestellt werden:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Nun muss aus dem Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ auf den Winkel geschlossen werden. Dies funktioniert mit der Umkehrfunktion Arcussinus $\arcsin(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}})$, die auf dem Taschenrechner mit $\sin^{-1}$ aufgerufen werden kann:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{4.1}{4.2}\right) \overset{\text{TR}}{\approx} 77.5°$$

iii. Gesucht: Winkel $\beta \Rightarrow$ bezüglich β ist a die Ankathete. Der Cosinus verbindet folglich die beiden gegebenen Seiten mit dem Winkel β:

$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Bei gegebenen Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ erhalten wir den zugehörigen Winkel mit der Umkehrfunktion Arcuscosinus $\arccos(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}})$, die auf dem TR mit $\cos^{-1}$ angeschrieben ist:

$$\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{4.1}{4.2}\right) \overset{\text{TR}}{\approx} 12.5°$$

Natürlich können wir diesen Winkel β auch erhalten, indem wir $90° - \alpha$ rechnen.

(f) $\alpha = 66°$ mit Gegenkathete $a = 4.1$.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\tan(\alpha)} = \frac{4.1}{\tan(66°)} \approx 1.8$$
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4.1}{\sin(66°)} \approx 4.5$$
$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 66° = 24°$$

(g) $\beta = 50°$ mit Hypotenuse $c = 9.5$.

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \cos(\alpha) = 9.5 \cdot \cos(50°) \approx 6.1$$
$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \sin(\alpha) = 9.5 \cdot \sin(50°) \approx 7.3$$
$$\beta = 90° - \beta = 90° - 50° = 40°$$

(h) Kathete $a = 4.4$ und Kathete $b = 4.8$.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4.4^2+4.8^2} \approx 6.5$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{4.4}{4.8}\right) \approx 42.5^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4.8}{4.4}\right) \approx 47.5^\circ \; (= 90^\circ - 42.5^\circ)$$

2. Breite $\overline{BC}$ = Gegenkathete zu α bei gegebener Ankathete $\overline{AB} = 30\,\text{m}$
$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow$ Breite $= \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan(\alpha) = 30\,\text{m} \cdot \tan(52.3^\circ) \approx 38.8\,\text{m}$.

3. (a) Die Steigung m entspricht im rechtwinkligen Steigungsdreieck bezüglich dem Steigungswinkel α stets dem Verhältnis aus Gegenkathete zu Ankathete, was gerade der Tangens zu α ist. Somit folgt:

$$\alpha = 4^\circ \quad \Rightarrow \quad m = \tan(\alpha) = \tan(4^\circ) \approx 0.070 = 7.0\,\%$$

$$\alpha = 8^\circ \quad \Rightarrow \quad m = \tan(\alpha) = \tan(8^\circ) \approx 0.141 = 14.1\,\%$$

$$\alpha = 12^\circ \quad \Rightarrow \quad m = \tan(\alpha) = \tan(12^\circ) \approx 0.213 = 21.3\,\%$$

(b) $10\,\%$ Steigung liegt irgendwo zwischen $7.0\,\%$ und $14.1\,\%$ – etwas näher bei $7\,\%$. Daher können wir abschätzen, dass der zugehörige Steigungswinkel wohl etwas unter 6° liegen dürfte.

(c) Mit der Arcustangens-Funktion lassen sich die jeweiligen Steigungswinkel bestimmen:

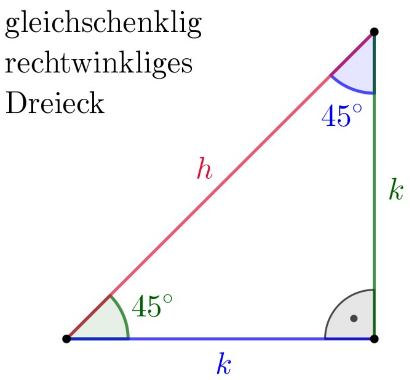
$$\alpha = \arctan(5\,\%) = \arctan(0.05) \approx 2.9^\circ$$

$$\alpha = \arctan(10\,\%) = \arctan(0.1) \approx 5.7^\circ$$

$$\alpha = \arctan(15\,\%) = \arctan(0.15) \approx 8.5^\circ$$

Der zweite Wert, also $\arctan(10\,\%) \approx 5.7^\circ$ bestätigt unsere Schätzung in (b).

4. (a) Betrachten wir zuerst das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck rechts. Beide spitzen Winkel sind gleich groß, nämlich $\alpha = \beta = 45^\circ$ und die beiden Katheten k sind gleich lang.
Daraus folgt sofort, dass der Tangens von 45°, also das Verhältnis der beiden Katheten, gleich 1 sein muss:



$$\tan(45^\circ) = \frac{k}{k} = 1$$

Weiter ist klar, dass Sinus und Cosinus genau gleich groß sind und für beide Winkel dieselben Werte haben:

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{k}{h}$$

Dank dem Satz des Pythagoras lässt sich die Hypotenuse h durch die Kathetenlänge k ausdrücken:

$$h^2 = k^2 + k^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{k^2+k^2} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2} = \sqrt{2} \cdot k$$

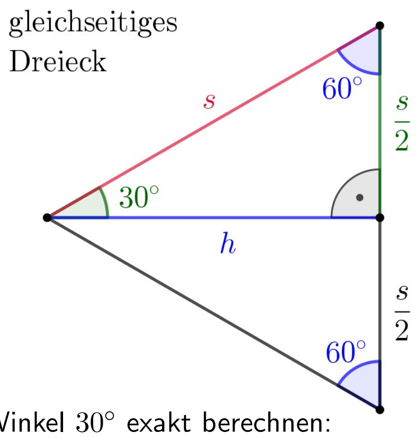
Damit lässt sich nun direkt angeben, wie viel der Winkelfunktionswert $\frac{k}{h}$ oben exakt beträgt:

$$\frac{k}{h} = \frac{k}{\sqrt{2} \cdot k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Halten wir diese exakten Resultate für 45° nochmals explizit fest:

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \tan(45^\circ) = 1$$

Im gleichseitigen Dreieck (Seite s) betragen alle Eckwinkel $60°$. Tragen wir eine Höhe h ein, so erhalten wir zwei rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen h und $\frac{s}{2}$. Die Höhe h lässt sich wiederum dank des Satzes von Pythagoras in Abhängigkeit von der Seite s ausdrücken:



$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{4} \cdot s^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{s^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}$$

Mit diesem Resultat können wir alle Seitenverhältnisse für den Winkel $30°$ exakt berechnen:

$$\sin(30°) = \frac{\frac{s}{2}}{s} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{s}{1}} = \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$
$$\cos(30°) = \frac{h}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}}{s} = \frac{\sqrt{3} \cdot s}{2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(30°) = \frac{\frac{s}{2}}{h} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3} \cdot s}{2}} = \frac{s}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} \cdot s} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Auch vom $60°$-Winkel aus gesehen ergeben sich bezüglich der Zahlenwerte immer noch dieselben Seitenverhältnisse, allerdings sind im Vergleich zu eben Gegen- und Ankathete miteinander vertauscht, sodass wir folgern:

$$\sin(60°) = \frac{h}{s} = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(60°) = \frac{\frac{s}{2}}{s} = \sin(30°) = \frac{1}{2}$$
$$\tan(60°) = \frac{h}{\frac{s}{2}} = \frac{1}{\tan(30°)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

Nun können wir alle Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte für $30°$, $45°$ und $60°$ tabellarisch festhalten:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

(b) Für die zwei Winkelwerte erhalten wir:

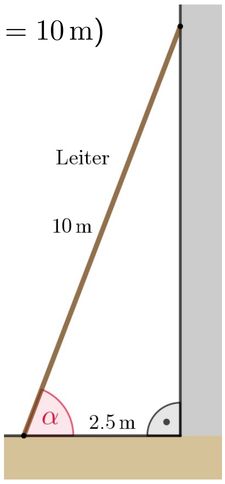
$$\frac{\cos(30°)}{(\tan(30°))^2} + \frac{\sin(30°)}{\tan(30°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{\cos(45°)}{(\tan(45°))^2} + \frac{\sin(45°)}{\tan(45°)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1^2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(c) Auf dieselbe Weise folgt beim zweiten Ausdruck:

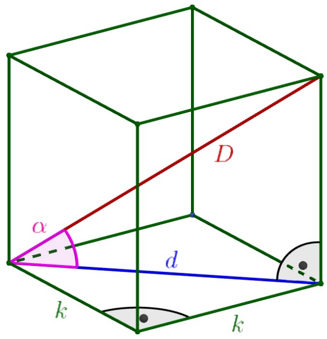
$$\frac{\cos(30°) - \sin(30°)}{\tan(30°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{\cos(45°) - \sin(45°)}{\tan(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

5. Für den Neigungswinkel α der Leiter erhalten wir aus der Leiterlänge (= Hypotenuse $h = 10\,\text{m}$) und dem Abstand am Boden zwischen Leiter und Wand (= Ankathete $a = 2.5\,\text{m}$):

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{h}\right) = \arccos\left(\frac{2.5\,\text{m}}{10\,\text{m}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = 75.5^\circ$$



6.



Die Diagonale d einer Seitenfläche des Würfels lässt sich direkt aus zwei seiner Kanten k bestimmen (Satz von Pythagoras):

$$d^2 = k^2 + k^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{2}\,k$$

Mit dieser Seitendiagonale folgt für die Würfeldiagonale D (wiederum mit Pythagoras):

$$D^2 = d^2 + k^2 = 2k^2 + k^2 = 3k^2 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{3}\,k$$

Damit kennen wir nun in Abhängigkeit von der Kantenlänge k die Ankathete und die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit spitzem Winkel α, den wir ja berechnen möchten. Es folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{d}{D} = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{3}\,k} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \approx 35.3^\circ$$

7. In allen drei Fällen können wir aus den Beschreibungen im Text und den Längenangaben in der Grafik auf Gegen- und Ankathete eines Steigungsdreiecks schließen. Mittels der Arcustangensfunktion lässt sich dann jeweils der gesuchte Steigungswinkel bestimmen:

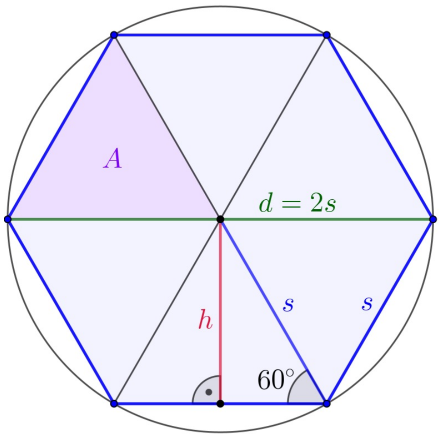
(a) $\tan(\alpha) = \dfrac{3.2\,\text{m}}{3.8\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\dfrac{3.2}{3.8}\right) = 40.1^\circ$

(b) $\tan(\alpha) = \dfrac{1.6\,\text{m}}{3.8\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\dfrac{1.6}{3.8}\right) = 22.8^\circ$

(c) $\tan(\alpha) = \dfrac{3.2\,\text{m}}{1.9\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\dfrac{3.2}{1.9}\right) = 59.3^\circ$

8. Das reguläre Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken. Ist s die Seitenlänge eines solchen Dreiecks, so beträgt die Höhe:

$$h = s \cdot \sin(60^\circ) = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Daraus folgt für die Fläche des einzelnen Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2$$

Es gibt 6 solche Dreiecke und der Umkreisdurchmesser d entspricht dem Doppelten einer Dreiecksseite ($s = \frac{d}{2}$). Damit ergibt sich:

$$A_{\text{total}} = 6A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,d^2$$

Natürlich hätte sich diese Aufgabe auch ohne Trigonometrie lösen lassen.