Geometrie – Lösungen zu Übungsserie IV

Anmerkung zu den Einheiten

Während den Rechnungen wollen wir uns – im Gegensatz zur Physik – erlauben, stets gleiche Längeneinheiten wegzulassen. So gewinnt die Rechnung ein wenig an Übersichtlichkeit. Zu jedem Resultat gehört die Einheit aber ganz unbedingt dazu!

1. Am einfachsten ist die Flächenberechnung, denn beim Drachenviereck lässt sich die Fläche direkt aus den beiden Diagonalenlängen errechnen:

$$A = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{15.8 \cdot 24.4}{2} \approx \underline{\underline{192.8\,\mathrm{cm}^2}}$$

Aus der Seite a und der Hälfte der Diagonale e kann mittels Satz des Pythagoras die Strecke r vom Eckpunkt B unten bis zum Diagonalenschnittpunkt berechnet werden:

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{18.4^2 - \left(\frac{15.8}{2}\right)^2} \approx 16.62$$

Somit ergibt sich für den oberen Streckenteil s der Diagonale f eine Länge von:

$$s = f - r \approx 24.4 - 16.62 = 7.78\,\mathrm{cm}$$

Daraus erhalten wir wieder aus dem Satz des Pythagoras:

$$c = d = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + s^2} \approx \sqrt{\left(\frac{15.8}{2}\right)^2 + 7.78^2} \approx 11.09 \approx \underline{\underline{11.1\,\mathrm{cm}}}$$

Der Umfang des Drachenvierecks beträgt somit:

$$U = 2a + 2c = 2(a + c) \approx 2(18.4 + 11.09) = 58.98 \approx \underline{\underline{59.0\,\mathrm{cm}}}$$

Ausserdem ist bezüglich einer Winkelhälfte $\frac{\delta}{2}$ die halbe Diagonale e die Gegenkathete und der Diagonalenteil s die Ankathete. Somit erhalten wir für den Winkel δ:

$$\delta = 2 \cdot \frac{\delta}{2} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{\frac{e}{2}}{s}\right) \approx 2 \cdot \arctan\left(\frac{\frac{15.8}{2}}{7.78}\right) \approx \underline{\underline{90.9^\circ}}$$

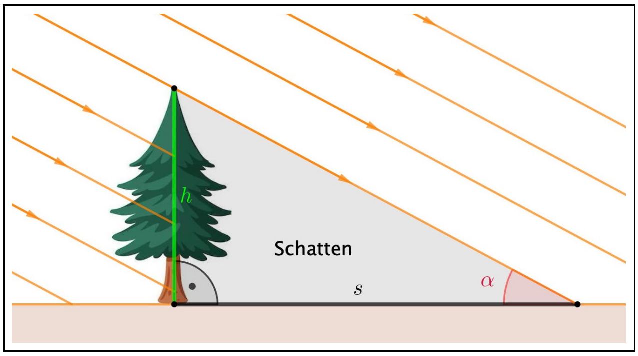
2. Antons Spiegelbild ist genau gleich groß wie Anton und hat dieselbe (virtuelle) Distanz d vom Spiegel.

In der Grafik entdecken wir mittels dieser Vorüberlegung eine geometrische Konstruktion, die einer zentrischen Streckung mit Zentrum in Antons Auge und Streckfaktor 2 entspricht: Verdoppeln wir die mindestens benötigte Spiegelhöhe, so muss Antons Höhe entstehen. Umgekehrt muss die Spiegelhöhe also genau **halb so hoch** sein wie Anton. Das ist wohl gemerkt unabhängig von der Distanz d so!

3. Die geschilderte Situation lässt uns die Grafik rechts zeichnen.

Im nun sichtbaren rechtwinkligen Dreieck entspricht die Tannenhöhe h der Gegenkathete und die Schattenlänge s der Ankathete bezüglich des gesuchten Winkels α. Daraus folgt:

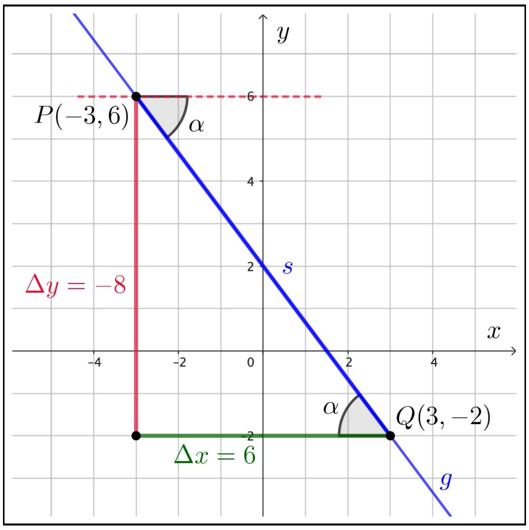
$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{s}\right) = \arctan\left(\frac{15.4}{33.6}\right) \approx \underline{\underline{24.6^\circ}}$$



4. (a) Die Konstruktion ist bereits in der Aufgabenstellung mit GeoGebra gezeichnet.

   (b) Die Unterteilung funktioniert, weil wir Parallelen zeichnen und damit gemäss 1. Strahlensatz garantiert ist, dass die Verhältnisse der Abschnitte auf der zu unterteilenden Strecke s und der Gerade g dieselben sind. Unterteilen also die Punkte C, D, E und F die Strecke $\overline{AG}$ in fünf gleiche Teile, so wird das auch mit der Strecke s der Fall sein.

5. Rechts ist die Situation im Koordinatensystem gezeigt. Wir berechnen die Seiten des Steigungsdreiecks:



$$\Delta x = x_Q - x_P = 3 - (-3) = 6$$
$$\Delta y = y_Q - y_P = -2 - 6 = -8$$

Daraus folgt für die Strecke zwischen den beiden Punkten:

$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

Nebenbei: Natürlich könnte man für $(\Delta y)^2$ zuerst $(-8)^2$ schreiben. Wenn wir aber wissen, dass sowieso quadriert wird und somit ein positiver Wert entsteht, können wir das Minuszeichen auch direkt weglassen.

Für die Steigung m ergibt sich:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{6} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}} \qquad \text{(negativ, da fallend!)}$$

Der Steigungswinkel ist α, den wir typischerweise ebenfalls mit einem negativen Vorzeichen versehen, wenn es sich um eine fallende Gerade handelt. Es ergibt sich mit dem Arcustangens:

$$\arctan\big(|m|\big) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.1^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \underline{\underline{-53.1^\circ}}$$

6. Wir merken rasch, dass wir hier die Bearbeitungsreihenfolge der Teilaufgaben umkehren sollten, da wir für die Berechnung der Turmhöhe ansonsten über zu wenig Angaben verfügen.

   (b) Mit dem Tiefenwinkel schließen wir aus der Höhe des Hochsitzes zuerst auf die Distanz d zum Turm:

$$\tan(8^\circ) = \frac{5}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{5}{\tan(8^\circ)} \approx 35.58 \approx \underline{\underline{35.6\,\mathrm{m}}}$$

   (a) Nun können wir trigonometrisch berechnen, wie weit sich die Turmspitze über der Beobachtungshöhe des Hochsitzes befindet $\rightarrow \Delta h$:

$$\tan(18.5^\circ) = \frac{\Delta h}{d} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = d \cdot \tan(18.5^\circ) = 35.58 \cdot \tan(18.5^\circ) \approx 11.90$$

   Somit ergibt sich für die Turmhöhe:

$$h = 5 + \Delta h \approx 5 + 11.90 = \underline{\underline{16.9\,\mathrm{m}}}$$