

Geometrie – Lösungen zu Übungsserie V

Anmerkung zu den Einheiten

Während den Rechnungen wollen wir uns – im Gegensatz zur Physik – erlauben, stets gleiche Längeneinheiten wegzulassen. So gewinnt die Rechnung ein wenig an Übersichtlichkeit. Zu jedem Resultat gehört die Einheit aber ganz unbedingt dazu!

1. (a) Beweis des Höhensatzes

- Die Höhe h_c unterteilt das große rechtwinklige Dreieck in zwei **ähnliche Dreiecke**. Das wird klar anhand der Winkel. Ist α der Winkel zwischen den Seiten b und c , so beträgt der andere spitze Winkel im Teildreieck links $90^\circ - \alpha$. Dasselbe gilt aber für den anderen spitzen Winkel im großen Dreieck. Damit ist klar, dass die beiden kleinen Dreiecke die gleichen Winkel besitzen und somit ähnlich sind.
- In ähnlichen Dreiecken sind die Seitenverhältnisse gleich. D.h., das Verhältnis der beiden Katheten in den beiden Teildreiecken ist identisch:

$$\frac{h_c}{p} = \frac{q}{h_c} \Rightarrow h_c^2 = p \cdot q \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis des Kathetensatzes

- Auch das große Dreieck besitzt diesen Winkel und wie die beiden Teildreiecke. Alle drei Dreiecke sind somit ähnlich zueinander.
- Im kleinen Dreieck links ist die lange Kathete p und die Hypotenuse b , währenddem im großen Dreieck die lange Kathete b und die Hypotenuse c ist. Da die Seitenverhältnisse gleich sind, folgt:

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow p \cdot c = b^2 \quad \text{q.e.d.}$$

- Ganz analog hierzu finden wir durch Betrachtung des rechten Teildreiecks und des großen Dreiecks:

$$\frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow q \cdot c = a^2 \quad \text{q.e.d.}$$

(b) Beweis des Satzes von Pythagoras mit dem Kathetensatz

$$a^2 + b^2 = q \cdot c + p \cdot c = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2 \quad \text{q.e.d.}$$

- (c)
- Der eingezeichnete Thaleskreis garantiert, dass es sich beim großen Dreieck um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Dessen Hypotenuse beträgt $c = 10 + 10 = 20$.
 - Aus dem Kathetensatz folgt nun für die Distanz \overline{AF} :

$$16^2 = \overline{AF} \cdot 20 \Rightarrow \overline{AF} = \frac{16^2}{20} = \frac{16 \cdot 8}{10} = \frac{128}{10} = 12.8$$

- Damit beträgt die Höhe \overline{MF} des Trapezes:

$$\overline{MF} = 12.8 - 10 = 2.8$$

- Die Höhe g des großen Dreiecks kann auf verschiedene Art berechnet werden. Besonders empfiehlt sich hier der Höhensatz. Der längere Hypotenusenabschnitt ist ja $\overline{AF} = 12.8$. Dann beträgt aber der kürzere Hypotenusenabschnitt $\overline{BF} = 20 - \overline{AF} = 20 - 12.8 = 7.2$.
Aus dem Höhensatz folgt:

$$g^2 = \overline{AF} \cdot \overline{BF} \Rightarrow g = \sqrt{12.8 \cdot 7.2} = \sqrt{\frac{128}{10} \cdot \frac{72}{10}} = \sqrt{\frac{2^{10} \cdot 3^2}{100}} = \frac{2^5 \cdot 3}{10} = \frac{96}{10} = 9.6$$

- Die Deckseite d des Trapezes ergibt sich beispielsweise aus einer zentrischen Streckung von g :

$$d = \frac{10}{12.8} \cdot 9.6 = \frac{960}{128} = \frac{15}{2} = 7.5$$

- Nun erhalten wir für die Trapezfläche:

$$A = \frac{g + d}{2} \cdot \overline{MF} = \frac{4.8 + 7.5}{2} \cdot 2.8 \approx \underline{\underline{23.9 \text{ cm}^2}}$$

2. Die 750 m stehen jeweils für die Länge der Ankathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Höhenwinkel α resp. β , wobei dann die aktuelle Höhe des Ballons der Gegenkathete entspricht. Mit dem Tangens folgt:

$$\tan(\alpha) = \frac{h_1}{750} \Rightarrow h_1 = 750 \cdot \tan(21.5^\circ) \approx 295.4$$

$$\tan(\beta) = \frac{h_2}{750} \Rightarrow h_2 = 750 \cdot \tan(35^\circ) \approx 525.2$$

$$\Rightarrow \Delta h = h_2 - h_1 = 525.2 - 295.4 \approx \underline{\underline{230\text{ m}}}$$

3. Quadratzahlen zu kennen hilft!

$$13^2 - 1^2 = 169 - 1 = 168 \neq \text{Quadratzahl}$$

$$13^2 - 2^2 = 169 - 4 = 165 \neq \text{Quadratzahl}$$

$$13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160 \neq \text{Quadratzahl}$$

$$13^2 - 4^2 = 169 - 16 = 153 \neq \text{Quadratzahl}$$

$$13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2 = \text{Quadratzahl!}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{5^2 + 12^2 = 13^2}}$$

Auf gleiche Weise finden wir: $\underline{\underline{8^2 + 15^2 = 17^2}}$ und $\underline{\underline{7^2 + 24^2 = 25^2}}$.

4. Der Theodolit befindet sich $23.8 + 1.6 = 25.4$ Meter über dem Meeresspiegel.

Der Tiefenwinkel ist der Winkel zwischen Horizontaler und Blickrichtung zum Schiff. D.h., dies ist vom Schiff aus gesehen der Höhenwinkel, unter dem die Turmspitze gesehen wird. Im rechtwinkligen Dreieck mit diesem Höhenwinkel ist die Höhe des Theodoliten die Gegenkathete. Die gesuchte Distanz d ist die Ankathete. Somit folgt:

$$\tan(\alpha) = \frac{25.4}{d} \Rightarrow d = \frac{25.4}{\tan(12.9^\circ)} \approx \underline{\underline{111\text{ m}}}$$

5. (a) Im rechtwinkligen Dreieck ist $90^\circ - \alpha$ die Größe des anderen spitzen Winkels neben α . Ist k bezüglich des Winkel α die Gegenkathete, so ist dieselbe Seite k bezüglich $90^\circ - \alpha$ die Ankathete.

Demnach ist $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{k}{h}$ eben genau das gleiche Seitenverhältnis wie $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{k}{h}$.

- (b) Ist g bezüglich des Winkels α die Gegenkathete und a die Ankathete und bezeichnet h die Hypotenuse, so gilt der Satz des Pythagoras $g^2 + a^2 = h^2$ und damit folgt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{g^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{g^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

- (c) Gleich wie unter (b) setzen wir ein und vereinfachen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{g}{h} \cdot \frac{h}{a} = \frac{g}{a} = \tan(\alpha)$$

6. Zunächst sollte eine Skizze wie diejenige rechts gezeichnet werden.

Höhen sind im gleichseitigen Dreieck auch Winkelhalbierende!

Für die Gesamthöhe folgern wir im Dreieck BCM :

$$\sin(60^\circ) = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} s$$

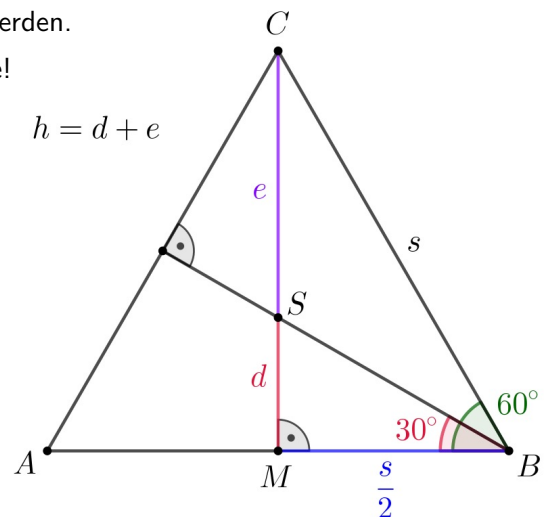
Im Dreieck BSM folgt für den unteren Höhenabschnitt d :

$$\tan(30^\circ) = \frac{d}{\frac{s}{2}} \Rightarrow d = \frac{s}{2} \cdot \tan(30^\circ) = \frac{1}{2\sqrt{3}} s = \frac{\sqrt{3}}{6} s$$

Welcher Bruchteil von h macht dieses d folglich aus?

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} s}{\frac{\sqrt{3}}{2} s} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

d ist also $\frac{1}{3}$ von h . Dann macht die Strecke e die anderen $\frac{2}{3}$ von h aus. S unterteilt h im Verhältnis $\underline{\underline{2:1}}$.



7. Auch hier hilft eine Skizze!

Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, ist die Höhe h gleichzeitig die Winkelhalbierende des 50° -Winkels. Somit können wir im Dreieck BCM aus der Seite $a = 12\text{ cm}$ mittels Trigonometrie beide Katheten, also $\frac{c}{2}$ und h , bestimmen:

$$\sin(25^\circ) = \frac{\frac{c}{2}}{a} \Rightarrow \frac{c}{2} = a \cdot \sin(25^\circ) = 12 \cdot \sin(25^\circ)$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \cos(25^\circ) = 12 \cdot \cos(25^\circ)$$

Für die Dreiecksfläche ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c}{2} \cdot h = 12 \cdot \sin(25^\circ) \cdot 12 \cdot \cos(25^\circ) \\ &= 144 \cdot \sin(25^\circ) \cdot \cos(25^\circ) \approx \underline{\underline{55.2\text{ cm}^2}} \end{aligned}$$

