Geometrie – Lösungen zu Übungsserie VI

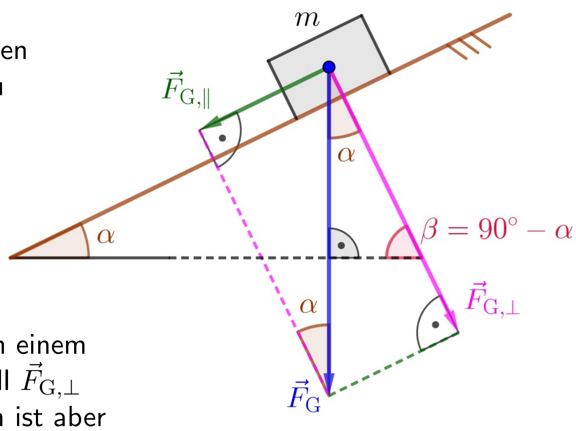
1. (a) Emmas Konstruktionsbericht dürfte sich etwa folgendermaßen lesen:
   i. Lege zwei Parallelen g und h durch die Endpunkte A und B.
   ii. Trage mit dem Zirkel von A aus fünfmal auf g und von B aus dreimal auf h eine feste Distanz ab. So ergeben sich die Punkte C und D.
   iii. Verbinde die beiden Punkte C und D mit einer Strecke s.
   iv. Der Schnittpunkt S von s mit a unterteilt a im Verhältnis $5:3$.

   Die Konstruktion funktioniert aufgrund des 2. Strahlensatzes, wie man in ihrem Schlussbild erkennt. Mit dem Streckzentrum S gilt aufgrund der beiden Parallelen g und h:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{5}{3}$$

   (b) Alternativ könnten wir auch die Strecke a in 8 gleiche Teile unterteilen, so wie wir das in Aufgabe 4 von Serie 4 gesehen haben. Danach kann man 5 Einheiten abzählen und landet so ebenfalls bei S.

2. (a) Es gibt viele Möglichkeiten einzusehen, dass die beiden rechts neu eingetragenen Winkel α tatsächlich genau gleich groß sind wie der Steigungswinkel α.



   Die rechts gezeigte Variante geht so: Wir können z.B. die Horizontale verlängern, bis sie den Kraftpfeil zu $\vec{F}_{G,\perp}$ schneidet. Dort entsteht der Winkel β. Dieser muss aber gleich $90° - \alpha$ sein, denn der ursprüngliche Steigungswinkel α und der neu eingetragene Winkel β sind die spitzen Winkel in einem gut sichtbaren rechtwinkligen Dreieck. Schließlich soll $\vec{F}_{G,\perp}$ per Definition senkrecht auf der schiefen Ebene. Nun ist aber der Winkel $\beta = 90° - \alpha$ auch ein spitzer Winkel in einem neuen rechtwinkligen Dreieck, wo dann der andere spitze Winkel eben wieder gleich α sein muss. Dass dann auch der andere eingetragene Winkel gleich α sein muss, ergibt sich aus der Tatsache, dass dies Wechselwinkel an Parallelen sind.

   (b) In der Kräftezerlegung sehen wir zwei rechtwinklige Dreiecke, die je den spitzen Winkel α enthalten. Beide Dreiecke haben dieselbe Hypotenuse, nämlich den Gewichtskraftvektor $\vec{F}_G$. D.h., diese Hypotenuse hat die Länge $F_G = m \cdot g$.

   Im linken dieser rechtwinkligen Dreiecke lesen wir ab:

$$\sin(\alpha) = \frac{F_{G,\parallel}}{F_G} \qquad \Rightarrow \qquad F_{G,\parallel} = F_G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

   Auf dieselbe Art finden wir im rechten rechtwinkligen Dreieck:

$$\cos(\alpha) = \frac{F_{G,\perp}}{F_G} \qquad \Rightarrow \qquad F_{G,\perp} = F_G \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

   In der Aufgabe ist allerdings nicht direkt der Winkel α gegeben, sondern die Steigung m in Prozenten. Wie wir gelernt haben, sind diese beiden Größen direkt über den Tangens miteinander verknüpft:

$$\tan(\alpha) = m \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan(m) = \arctan(42\,\%) = \arctan(0.42) \approx 22.78°$$

   Nun können wir die beiden Kraftkomponenten berechnen:

$$F_{G,\parallel} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \approx 5\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \sin(22.78°) \approx \underline{\underline{19.0\,\text{N}}}$$

$$F_{G,\perp} = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \approx 5\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \cos(22.78°) \approx \underline{\underline{45.2\,\text{N}}}$$

3. **Linke Aufgabe:** Es ist leichter die rote Fläche nicht zu berechnen, sondern stattdessen von der großen Quadratfläche ($20 \cdot 20 = 400$) die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke abzuziehen.

Die Fläche A_1 des größeren rechtwinkligen Dreiecks ist rasch bestimmt, denn dessen stehende Kathete beträgt ebenfalls 10:

$$A_1 = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

Entscheidend ist, dass wir bemerken: Das kleinere rechtwinklige Dreieck besitzt dieselben Winkel wie das größere. Das wird bei der Ecke rechts oben klar. Dort ergeben zwei spitze Winkel α und β – einer aus dem einen, einer aus der anderen Dreieck – zusammen $90°$. Es gilt also $\beta = 90° - \alpha$, eine Beziehung, die bekanntlich auch für den anderen spitzen Winkel im Dreieck mit α stimmt.

Wir schließen: Die beiden Dreieck sind ähnlich, haben also gleiche Seitenverhältnisse und sind über einen Streckfaktor miteinander verbunden.

Vom größeren Dreieck kennen wir die beiden Katheten (15 und 20), vom kleineren die Hypotenuse (20). Berechnen wir zunächst die Hypotenuse des größeren:

$$h_1 = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

Somit kennen wir auch den Streckfaktor zwischen großem und kleinem Dreieck:

$$k = \frac{h_2}{h_1} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

es folgt für die Fläche des kleineren Dreiecks:

$$A_2 = k^2 \cdot A_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 150 = \frac{16}{25} \cdot 150 = 16 \cdot 6 = 96$$

Nun lässt sich die gesuchte Fläche berechnen:

$$A = 400 - A_1 - A_2 = 400 - 150 - 96 = \underline{\underline{154\,\mathrm{cm}^2}}$$

Falls du nicht auf die Idee mit der Skalierung der Fläche mit k^2 gekommen bist, hast du vielleicht die beiden Katheten des kleineren Dreieck berechnet. Zur Kontrolle: $16\,\mathrm{cm}$ und $12\,\mathrm{cm}$.

Mittlere Aufgabe: Zunächst stellen wir fest: Die Seitenverhältnisse aller in der Figur sichtbaren rechtwinkligen Dreiecke sind dieselben. Das Kathetenverhältnis beträgt jeweils $2:1$.

Es wäre gut, auch eine Verhältnis mit der Hypotenuse zu kennen. Wir berechnen daher die Hypotenuse in einem der großen rechtwinkligen Dreiecke:

$$H = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Im Prinzip kann man auch mit $\sqrt{125}$ weiterarbeiten, aber das teilweise Wurzelziehen (wie oben vorgezeigt) ist praktisch, weil sich damit die Seitenverhältnisse einfacher notieren lassen:

$$\frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\text{längere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Betrachten wir nochmals eine Hypotenuse eines der großen Dreiecke. Sie enthält eine Seite s der gesuchten Quadratfläche. Daneben gibt es zwei Teile, die Katheten kleinerer Dreiecke sind und die wir berechnen können. Folglich können wir danach durch Subtraktion auf s schließen.

Berechnen wir also die beiden Katheten eines kleinen Dreiecks mit Hypotenuse $h = 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$, wobei wir die vorher ermittelten Seitenverhältnisse verwenden:

$$\text{kürzere Kathete} = \frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \text{Hypotenuse} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 5 = \sqrt{5}$$

$$\text{längere Kathete} = \frac{\text{längere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \text{Hypotenuse} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 5 = 2\sqrt{5}$$

Somit ergibt sich für eine Quadratseite:

$$s = H - \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}(5 - 1 - 2) = 2\sqrt{5}$$

Und für die Quadratfläche folgt:

$$A = s^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = \underline{\underline{20\,\mathrm{cm}^2}}$$

Rechte Aufgabe: Die Grafik zeigt uns ein Bild, in das wir sofort eine zentrische Streckung oder Strahlensätze hineinlesen können. Der 2. Strahlensatz führt uns hier direkt an den richtigen Ort.

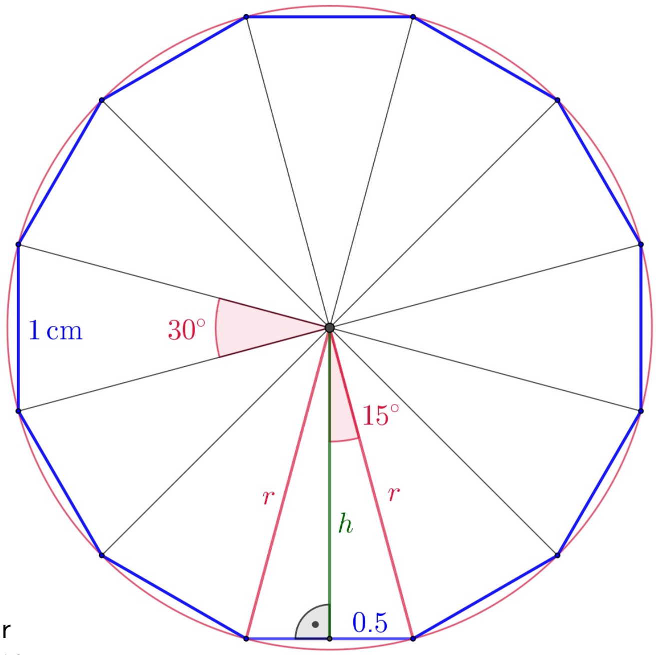
Ist x die stehende Kathete des kleinen rechtwinkligen Dreiecks, dessen Fläche wir berechnen wollen, so können wir schreiben und berechnen:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+7.5}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 3(x+7.5) \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 3x + 22.5 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 22.5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.5$$

Damit ist nun aber die gesuchte Fläche rasch berechnet:

$$A = \frac{3 \cdot 4.5}{2} = 3 \cdot 2.25 = \underline{\underline{6.75\,\mathrm{cm}^2}}$$

4. Die Aufgabe ist gar nicht so besonders schwierig, sobald man eine Skizze gezeichnet hat. Diese muss gar nicht unbedingt das gesamte 12-Eck umfassen, sondern kann auch nur einen Zwölftel davon zeigen, denn darin ist alles Wesentliche zu sehen:
Der $30°$-Winkel ($\frac{360°}{12} = 30°$),
die Hälfte davon, also $15°$,
der Umkreisradius r
und die Höhe h in einem der Zwölftel, die ja je einem gleichschenkligen Dreieck entsprechen.



Mittels Trigonometrie folgern wir für den Umkreisradius r resp. den Umkreisdurchmesser:

$$\sin(15°) = \frac{0.5}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{0.5}{\sin(15°)} \approx 1.932$$

$$\Rightarrow \quad d = 2r \approx \underline{\underline{3.8\,\mathrm{cm}}}$$

Zur Berechnung der Fläche des Zwölfecks wollen wir die Fläche eines Zwölftels berechnen und dann mit 12 multiplizieren. Für die Zwölftelfläche benötigen wir vorab allerdings noch dessen Höhe h:

$$\tan(15°) = \frac{0.5}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{0.5}{\tan(15°)} \approx 1.866$$

Somit erhalten wir für die Fläche des Zwölftels und des Zwölfecks:

$$A_{\text{Zwölftel}} \approx \frac{1 \cdot 1.866}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 12 \cdot A_{\text{Zwölftel}} \approx 12 \cdot \frac{1 \cdot 1.866}{2} = 6 \cdot 1.866 \approx \underline{\underline{11.2\,\mathrm{cm}^2}}$$

5. (a) Aus Symmetriegründen muss der Höhenfußpunkt F im Schnittpunkt der Höhen oder Winkelhalbierenden der Grundfläche liegen. Nun wissen wir aber erstens bereits, wie lange diese Höhe eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seite k ist, nämlich $\frac{\sqrt{3}}{2}k$, und zweitens wissen wir ebenso, dass sich die Höhen im gleichseitigen Dreieck gegenseitig im Verhältnis $2:1$ unterteilen. (Wem diese Dinge nicht mehr geläufig sind, die/der soll sich nochmals Aufgabe 6 in Übungsserie 5 vorknöpfen. Falls nötig müsste man die dortigen Schritte hier nochmals machen.)

d ist also $\frac{2}{3}$ der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $k = 2$:

$$d = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} k = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Mit dem Satz des Pythagoras können wir nun die Höhe h exakt bestimmen:

$$h = \sqrt{k^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{8}{3}}}} = \underline{\underline{2\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

Weiter erhalten wir für die Grundfläche des Tetraeders:

$$G = \frac{k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} k}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$$

Daraus folgt für das Tetraedervolumen:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}}{3} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{8}}{3}}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

(b) Sobald wir d kennen, können wir den Winkel α berechnen:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{d}{k}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \underline{\underline{54.7^\circ}}$$