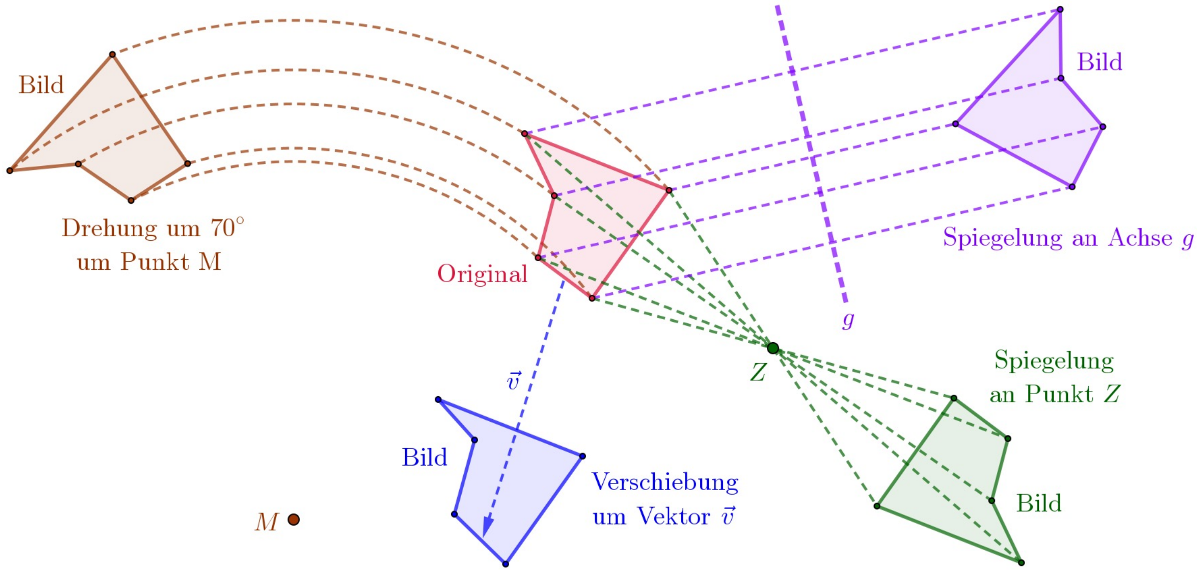
Kongruenz

Kongruenzabbildungen ebener Figuren sind **Verschiebungen**, **Drehungen**, **Spiegelungen** und Verknüpfungen dieser Abbildungsarten. Kongruenzabbildungen lassen Größe und Form einer ebenen Figur unverändert:



Zwei Figuren heißen **kongruent**, wenn die eine durch eine Kongruenzabbildung zur Deckung mit der anderen gebracht werden kann. **Kongruenz** bedeutet also **Deckungsgleichheit**.

In obiger Abbildung sind alle Figuren kongruent, weil sie offensichtlich durch Kongruenzabbildungen ineinander übergeführt werden können.

Ähnlichkeit

- Lassen wir nicht nur Kongruenzabbildungen (Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen), sondern zudem auch die zentrische Streckung zu, so ergeben sich alle Abbildungen, die die Form einer Figur, aber nicht unbedingt ihre Größe unverändert lassen. Solche Abbildungen und Kombinationen daraus bezeichnen wir als **Ähnlichkeitsabbildungen**.

- Zwei ebene Figuren heißen **ähnlich**, wenn die eine durch eine Ähnlichkeitsabbildung zur Deckung mit der anderen gebracht werden kann.

- Ähnliche Figuren haben also gleiche Formen. Das bedeutet genauer:
  - Sich entsprechende Winkel ähnlicher Figuren sind gleich groß.
  - Sich entsprechende Seitenverhältnisse ähnlicher Figuren sind gleich groß.
  - Bei zwei ähnlichen Figuren kann eine als Original und eine als Bild der Ähnlichkeitsabbildung aufgefasst werden. Zu jeder Ähnlichkeitsabbildung gehört ein Streckfaktor k, sodass für Längen (l, l') und Flächen (A, A') an Original und Bild gilt:

$$l' = k \cdot l \qquad \text{und} \qquad A' = k^2 \cdot A$$

Kongruenz und Ähnlichkeit bei Dreiecken

In nächster Zeit befassen wir uns besonders intensiv mit Dreiecken. Daher wollen wir uns über die Kongruenz und die Ähnlichkeit von Dreiecken etwas ausführlicher Gedanken machen. Zur raschen Beurteilung, ob zwei Dreiecke kongruent sind, dienen die folgenden vier **Kongruenzsätze**:

Kongruenzsätze für Dreiecke: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn...

$\boldsymbol{sss}$: ...sie in allen Seitenlängen übereinstimmen.

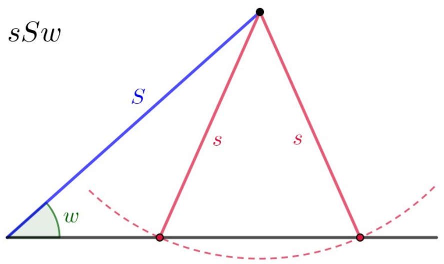
$\boldsymbol{sws}$: ...zwei Seitenlängen und der von ihnen eingeschlossene Winkel übereinstimmen.

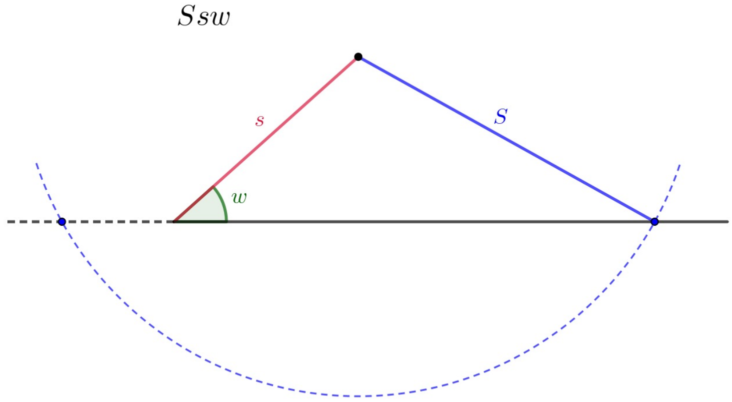
$\boldsymbol{wsw}$: ...eine Seitenlänge und die zwei ihr anliegenden Winkel übereinstimmen.

$\boldsymbol{Ssw}$: ...zwei Seitenlängen und der Winkel gegenüber der längeren Seite übereinstimmen.

Entscheidend ist, dass es für die Kongruenz zweier Dreiecke nicht ausreichend ist, wenn zwei Seiten und ein Winkel gleich sind. Es kommt schon darauf an, welcher Winkel es bezüglich der Seiten mit bekannten Längen denn ist.

Währenddem die Fälle sss, sws und wsw sehr direkt einleuchten, sei hier rasch gezeigt, dass beim Fall Ssw der Winkel eben wirklich der längeren Seite gegenüber liegen muss. Dazu vergleichen wir die zwei Situationen sSw und Ssw, wobei wir erkennen, dass es bei sSw eben immer noch zwei nicht-kongruente Dreiecke gibt:





Entlang der Kongruenzsätze können nun vier **Ähnlichkeitssätze** für Dreiecke formuliert werden:

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn...

$\boldsymbol{sss}$: ...sie in allen Seitenverhältnissen übereinstimmen.

$\boldsymbol{sws}$: ...das Verhältnis zweier Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel übereinstimmen.

$\boldsymbol{ww}$: ...zwei Winkel übereinstimmen.

$\boldsymbol{Ssw}$: ...das Verhältnis zweier Seiten und der Winkel gegenüber der längeren Seite übereinstimmen.

An die Stelle der Längen bei den Kongruenzsätzen treten nun Seitenverhältnisse. Bei dem Kongruenzsatz, der nur eine einzige Seitenlänge beinhaltete (wsw), spielt die Seite beim entsprechenden Ähnlichkeitssatz nun gar keine Rolle mehr, sodass daraus nur noch ww wird.