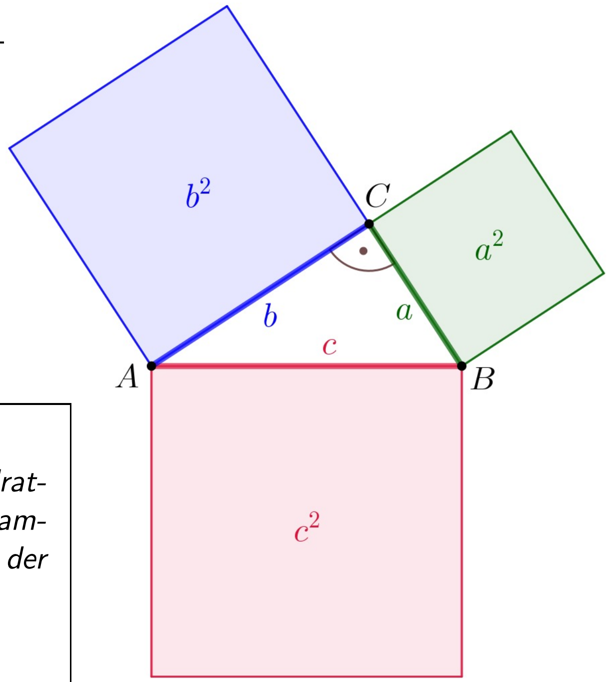
Repetition: Der Satz des Pythagoras

Rechtwinklige Dreiecke sind bei vielen Betrachtungen in Mathematik und Naturwissenschaft sehr nützlich. Ein Grund dafür liegt im **Satz des Pythagoras**, der hier kurz repetiert sei.

Im rechtwinkligen Dreieck werden die beiden Seiten, die am rechten Winkel anliegen, als **Katheten** bezeichnet. Die längste Seite, die stets gegenüber dem rechten Winkel liegt, heißt **Hypotenuse**.



Der Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die Quadratflächen über den beiden Katheten a und b zusammen gleich groß wie die Quadratfläche über der Hypotenuse c. Es gilt also stets:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diese Aussage ist sehr praktisch, erlaubt sie doch sehr direkt die Berechnung der dritten Seite, sobald zwei Seiten des Dreiecks bekannt sind.

Der Beweise für den Satz des Pythagoras sind viele. In den Übungen werden wir dem einen oder anderen über den Weg laufen.

Mehr Nützliches zu rechtwinkligen Dreiecken

Neben dem Satz des Pythagoras lassen sich zu rechtwinkligen Dreiecken noch mehr praktische Aussagen formulieren:

- In allen Dreiecken entspricht die **Fläche** A stets dem Produkt aus einer Seite s und der zugehörigen Höhe h_s:

  $$\text{Fläche eines beliebigen Dreiecks:} \qquad A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

  Da im rechtwinkligen Dreieck die Seite b gerade der Höhe zur Seite a entspricht (et vice versa), ergibt sich hier eine besonders einfache Flächenformel mit dem Produkt der Katheten:

  $$\text{Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks:} \qquad A = \frac{a \cdot b}{2}$$

- In allen Dreiecken beträgt die **Winkelsumme** $180°$. Daraus folgt im rechtwinkligen Dreieck ein einfacher Zusammenhang zwischen den beiden spitzen Winkeln α und β:

  $$\alpha + \beta + 90° = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90° \quad \text{resp.} \quad \alpha = 90° - \beta \quad \text{oder} \quad \beta = 90° - \alpha$$

- In den Übungen werden wir zwei weitere Beziehungen zwischen Seiten und Höhen von rechtwinkligen Dreiecken kennenlernen, den **Höhen-** und den **Kathetensatz**.

- Und schließlich werden wir nun gleich die äußerst nützlichen **Winkelfunktionen** anhand rechtwinkliger Dreiecke einführen.

Wir sehen also: Rechtwinklige Dreieck sind etwas Spezielles und vor allem etwas sehr Praktisches!

Im rechtwinkligen Dreieck legt ein spitzer Winkel die Seitenverhältnisse fest!

Rep.: Besitzen zwei Dreiecke zwei gleiche Winkel, so sind sie ähnlich zueinander – das war einer unserer Ähnlichkeitssätze zu Dreiecken. Daraus folgt, dass beide Dreiecke die gleichen Seitenverhältnisse aufweisen, wie das bei ähnlichen Figuren so üblich ist!

Nachdem wir nun diesen Gedankengang bewusst nochmals zur Kenntnis genommen haben, können wir Schritt für Schritt folgern:

i. Wir betrachten irgendein **rechtwinkliges Dreieck** – will heißen: wir wissen, dass einer der drei Winkel $90°$ beträgt.

ii. Sobald wir in diesem rechtwinkligen Dreieck einen der beiden spitzen Winkel, z.B. α, festlegen, kennen wir zwei Winkel des Dreiecks, nämlich α und den rechten Winkel.

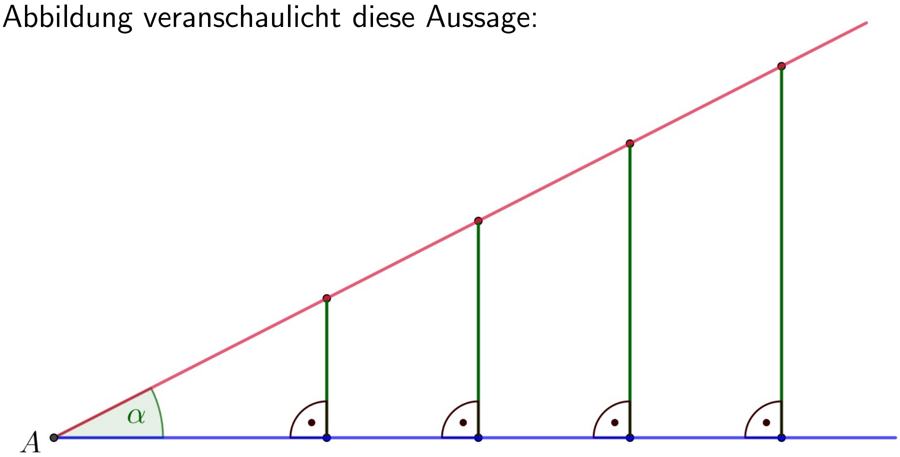
iii. Jedes andere rechtwinklige Dreieck, bei dem einer der spitzen Winkel gleich groß ist wie α, muss ähnlich zu unserem ersten Dreieck sein, den die beiden Dreiecke haben zwei gleich Winkel.

iv. Folglich hat jedes andere rechtwinklige Dreieck mit einem spitzen Winkel α dieselben Seitenverhältnisse wie unser erstes rechtwinklige Dreieck.

Aus diesem Gedankengang wird klar:

Geben wir in einem rechtwinkligen Dreieck einen der spitzen Winkel vor, so werden dadurch die Seitenverhältnisse in diesem Dreieck eindeutig festgelegt!

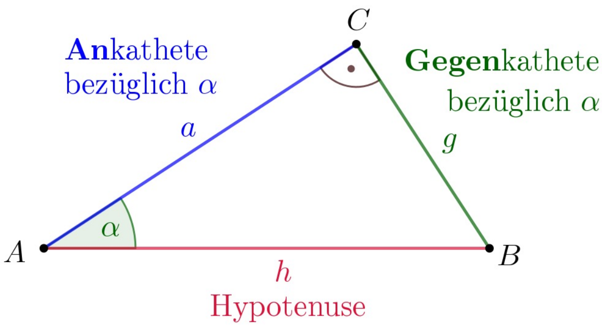
Die folgende Abbildung veranschaulicht diese Aussage:



Alle hier sichtbaren rechtwinkligen Dreiecke enthalten denselben spitzen Winkel α und haben dieselben Seitenverhältnisse, was sofort klar ist, wenn wir an die Strahlensätze denken oder den Punkt A als Streckzentrum ansehen.

Neue Namen: Ankathete und Gegenkathete

Geben wir uns in einem rechtwinkligen Dreieck einen spitzen Winkel α vor, so erhalten die beiden Katheten dadurch *passende Namensergänzungen*. Diejenige Kathete, die am Winkel α anliegt, heißt nun **Ankathete**, diejenige Kathete gegenüber des Winkels α nennen wir neu **Gegenkathete**.



Die Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens

Wir haben überlegt: Geben wir uns die Größe des spitzen Winkel α vor, so werden dadurch die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck eindeutig festgelegt. Drei dieser Seitenverhältnisse erhalten nun je einen eigenen Namen...

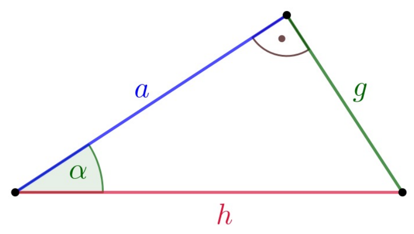
Die Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Wird in einem rechtwinkligen Dreieck der spitze Winkel α vorgegeben, so legt dieser die drei Seitenverhältnisse

Sinus $\sin(\alpha) := \dfrac{g}{h} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

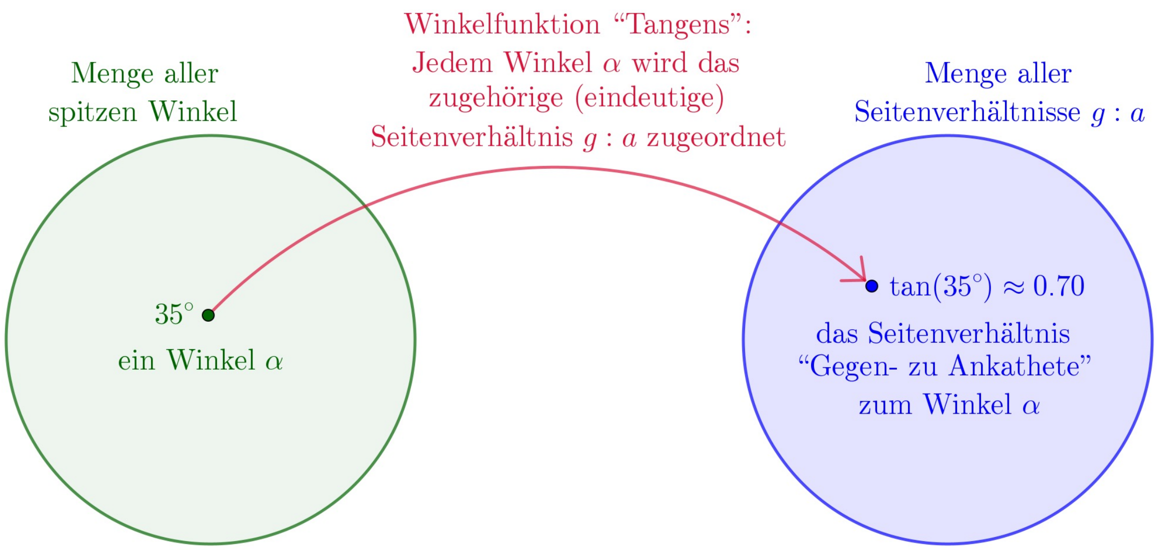
Cosinus $\cos(\alpha) := \dfrac{a}{h} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens $\tan(\alpha) := \dfrac{g}{a} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$



eindeutig fest. Sinus, Cosinus und Tangens werden auch als **Winkelfunktionen** bezeichnet. Damit meint man, dass jede dieser drei Funktionen einem Winkelwert α in eindeutiger Weise den Wert eines Seitenverhältnisses zuordnet.

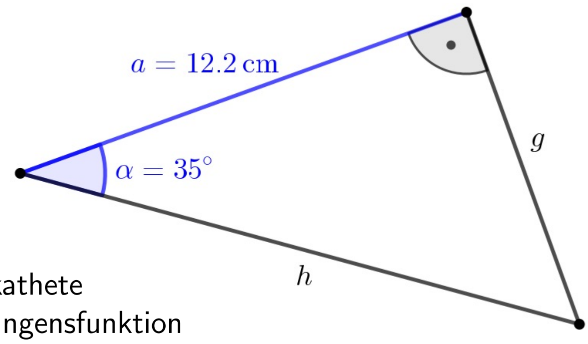
Achtung! Wir sehen hier zum ersten Mal die Schreibweise, die wir später ganz allgemein bei sogenannten **Funktionen** verwenden werden. So meint $\sin(\alpha)$ nicht etwa das Produkt $\sin \cdot \alpha$, sondern vielmehr bringt $\sin(\alpha)$ zum Ausdruck, dass der Winkel α in die Funktion namens *Sinus* eingesetzt wird und so eine Zahl entsteht, die wir *"Sinus von α"* nennen und die für das Seitenverhältnis aus Gegenkathete zu Hypotenuse in einem rechtwinkligem Dreieck mit spitzem Winkel α steht. (Der Ausdruck $\sin$ alleine hat also keine Bedeutung und kann nirgendwo alleine stehen!)



Und wozu dienen diese Winkelfunktionen nun unmittelbar?

Entscheidend ist vor allem, dass die Winkelfunktionen Verbindungen zwischen Winkeln und Längen resp. Längenverhältnissen herstellen. Außerdem kann der Taschenrechner die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für beliebige Winkelwerte α berechnen (wobei wir im Moment nicht fragen wollen, wie er das anstellt).

Wenn nun in einem rechtwinkligen Dreieck eine Seite und ein Winkel bekannt sind, so lassen sich mit den Winkelfunktionen sofort die anderen Seiten berechnen. Das ist wirklich etwas grundlegend Neues und Starkes!



Beispiel: In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt einer der spitzen Winkel 35°. Die an diesem Winkel anliegende Kathete hat eine Länge von $12\,\mathrm{cm}$. Wie lange sind die anderen Dreiecksseiten?

Lösung: Gegeben sind gemäss Aufgabenstellung ein Winkel $\alpha = 35.0^\circ$ und die zugehörige Ankathete $a = 12.2\,\mathrm{cm}$. Mittels der Cosinus- und der Tangensfunktion können wir nun je einen Ausdruck für die Gegenkathete und die Hypotenuse formal notieren und mit dem Taschenrechner Näherungswerte berechnen:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{h} \quad \overset{\cdot h}{\Rightarrow} \quad h \cdot \cos(\alpha) = a \quad \overset{:\cos(\alpha)}{\Rightarrow} \quad h = \frac{a}{\cos(\alpha)} = \frac{12.2\,\mathrm{cm}}{\cos(35.0^\circ)} \overset{\mathrm{TR}}{\approx} \underline{\underline{14.9\,\mathrm{cm}}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{g}{a} \quad \overset{\cdot a}{\Rightarrow} \quad g = a \cdot \tan(\alpha) = 12.2\,\mathrm{cm} \cdot \tan(35.0^\circ) \overset{\mathrm{TR}}{\approx} \underline{\underline{8.5\,\mathrm{cm}}}$$

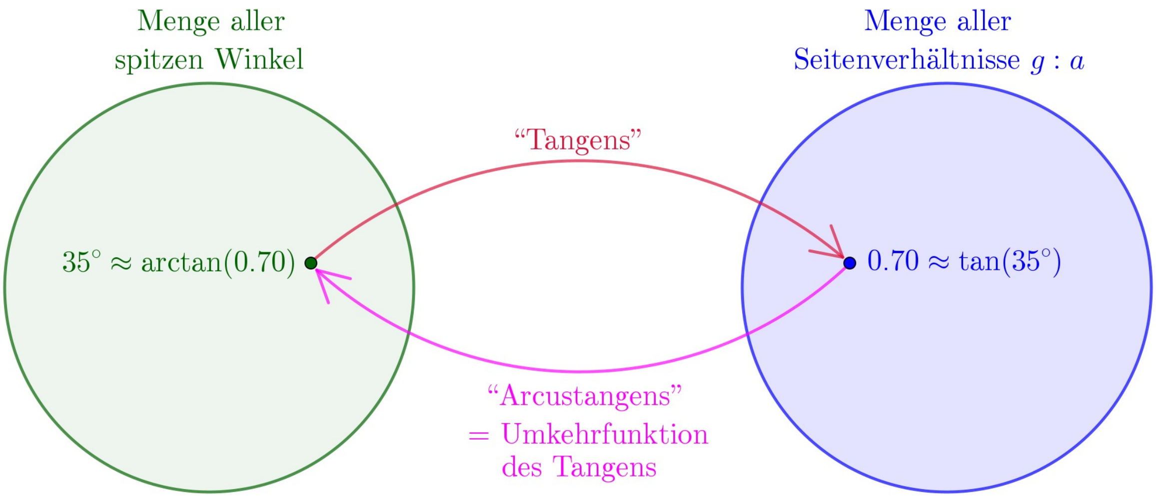
Wichtig! Im Taschenrechner-Display muss die Einstellung DEG (für engl. *degree* = Grad) angezeigt sein, sonst fasst der TR die Winkeleingaben nicht in Grad auf. (Ja, es gibt neben Winkelgraden noch mehrere andere Möglichkeiten Winkel anzugeben!)

Abmachung: Bei TR-Resultaten runden wir in aller Regel auf eine Nachkommastelle (in der verlangten oder gegebenen Einheit).

Arcusfunktionen – die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Zu jedem spitzen Winkel α je genau ein Wert von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. Wir sagen: Die Winkelfunktionen sind **eindeutig**.

Das gilt auch in die Gegenrichtung! Z.B. legt ein bestimmtes Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse eindeutig den zugehörigen Winkel α im rechtwinkligen Dreieck fest. Es kommen dafür nicht mehrere Winkelwerte in Frage. D.h., zu jeder Winkelfunktion existiert im rechtwinkligen Dreieck eine ebenso eindeutige **Umkehrfunktion**. Diese trigonometrischen Umkehrfunktionen werden als **Arcusfunktionen** bezeichnet.



Beispiel: In einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck sei $\frac{g}{h}$ das Seitenverhältnis aus Gegenkathete zu Hypotenuse bezüglich einem spitzen Winkel α. Dann gilt für α und $\frac{g}{h}$:

allgemein:	$\sin(\alpha) = \dfrac{g}{h}$	$\Leftrightarrow$	$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{g}{h}\right)$
Zahlenbeispiel:	$\sin(53°) \approx 0.80$	$\Leftrightarrow$	$53° \approx \arcsin(0.80)$

Man kann also schreiben: $\arcsin\big(\sin(\alpha)\big) = \alpha$ oder auch $\sin\big(\arcsin(\frac{g}{h})\big) = \frac{g}{h}$.

Achtung! Die **Taschenrechner-Notationen** dieser Arcusfunktionen sind $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$. Dies ist aber eigentlich nur eine Maschinenschreibweise. Wenn wir eine solche Umkehrfunktion auf dem Papier notieren, so schreiben wir dafür $\arcsin$, $\arccos$ oder $\arctan$.

Nebenbei: Weshalb die Arcusfunktionen so heißen, werden wir zu einem späteren Zeitpunkt erfahren. Dann wird dieser Name vielleicht nochmals etwas eingänglicher.