LINEARES II: Erste lineare Gleichungssysteme – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. Beim Gleichsetzungsverfahren sind beide Gleichungen nach demselben Ausdruck mit x oder y aufzulösen. Dann kann man die beiden anderen Gleichungsseiten einander gleichsetzen und erhält eine lineare Gleichung in der anderen Unbekannten.

   Bei (a), (b) und (c) geht das Gleichsetzen ganz einfach. Nur bei (d) gibt es etwas vorzubereiten, z.B.:

   $$\text{(d)}\quad \left|\begin{array}{c} 4x-y=-1 \\ x+\frac{1}{6}y=1 \end{array}\right|\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 4x=y-1 \\ 4x=4-\frac{2}{3}y \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad y-1=4-\frac{2}{3}y \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y=3}$$

   Hier hätte man wohl besser ein anderes Verfahren gewählt!

   Bei allen Aufgaben muss die ermittelte erste Unbekannte in eine Gleichung zurück eingesetzt werden, um die zweite Unbekannte zu erhalten:

   $$\text{in ②:}\quad x+\frac{1}{6}\cdot 3=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2},3\right)}}$$

   Für die anderen Systeme erhalten wir:

   $$\text{(a)}\quad \underline{\underline{S(63,9)}} \qquad \text{(b)}\quad \underline{\underline{S(-12,-35)}} \qquad \text{(c)}\quad \underline{\underline{S\left(\frac{2}{15},\frac{1}{9}\right)}}$$

2. Beim Einsetzungsverfahren ist eine der beiden Gleichungen nach einem Ausdruck mit x oder y aufzulösen. Dieser Ausdruck muss sich in die andere Gleichung einsetzen lassen, sodass eine lineare Gleichung in der anderen Unbekannten entsteht. Meistens ist der einzusetzende Ausdruck x oder y selber.

   Zum Vorzeigen wähle ich die Aufgabe (c):

   $$\text{(c)}\quad \left|\begin{array}{c} 6x-5y=4 \\ x=\frac{1}{2}y+\frac{2}{3} \end{array}\right|\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \quad\Rightarrow\quad \text{② in ①:}\quad 6\left(\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}\right)-5y=4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y=0}$$

   $$\Rightarrow\quad \text{in ② zurückeinsetzen:}\quad x=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{S\left(\frac{2}{3},0\right)}}$$

   Hier hat sich das Einsetzungsverfahren wegen der Form von Gleichung ② direkt angeboten.

   Für die anderen Systeme erhalten wir:

   $$\text{(a)}\quad \underline{\underline{S(24,8)}} \qquad \text{(b)}\quad \underline{\underline{S(-8,10)}} \qquad \text{(d)}\quad \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2},3\right)}}$$

   N.B.: Das Gleichungssystem unter (d) war ja immer noch dasselbe wie in Aufgabe 1. Mit dem Einsetzungsverfahren ist es etwas schneller gelöst als mit dem Gleichsetzungsverfahren, aber es ist immer noch etwas umständlich...

3. Beim Additionsverfahren sind eine oder beide Gleichungen so mit einem eigenen Faktor zu multiplizieren, dass entweder der Koeffizient (= Vorfaktor) vor x oder vor y in beiden Gleichungen vom Betrag her gleich sind, sich aber im Vorzeichen unterscheiden. Danach sind die beiden Gleichungen zu addieren. So fällt entweder x oder y raus und es bleibt eine lineare Gleichung in der anderen Unbekannten übrig.

   Aufgabe (d) funktioniert mit dem Additionsverfahren besser als mit den anderen Verfahren vorher:

   $$\text{(d)}\quad \left|\begin{array}{c} 4x-y=-1 \\ x+\frac{1}{6}y=1 \end{array}\right|\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 4x-y=-1 \\ 6x+y=6 \end{array}\right|\begin{array}{l} ③ \\ ④ \end{array} \quad\Rightarrow\quad ③+④:\quad 10x=5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{1}{2}}$$

   $$\Rightarrow\quad \text{in ① zurückeinsetzen:}\quad 4\cdot\frac{1}{2}+y=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y=3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2},3\right)}}$$

Es ist also sehr häufig so, dass eines der drei Verfahren besonders gut passt und somit in der Lösung am effizientesten ist. Ausserdem geht es einfach darum, dass du in der Bearbeitung von Mathematik möglichst viele Wege oder Prinzipien kennst, die dir erlauben, ein Problem unter Umständen von verschiedenen Seiten anzugehen.

Für die anderen Systeme erhalten wir:

(a) $\underline{\underline{S(17,9)}}$ (b) $\underline{\underline{S(11,3)}}$ (c) $\underline{\underline{S(8,9)}}$

4. Im Prinzip funktionieren immer alle Verfahren, aber es geht ja darum möglichst effizient vorzugehen, daher die Verfahrensangaben:

   (a) Gleichsetzungs- resp. Einsetzungsverfahren. Lösung: $\underline{\underline{S(10,2)}}$.

   (b) Nicht mit dem Gleichsetzungsverfahren. Lösung: $\underline{\underline{S(4,3)}}$.

   (c) Additionsverfahren ($16 \cdot 17$ nicht ausmultiplizieren!). Lösung: $\underline{\underline{S(3,3)}}$.

   (d) Einsetzungsverfahren mit $20x = 30y$ aus ②. Lösung: $\underline{\underline{S(75,50)}}$.

   (e) Bei der Lösung entsteht eine stets falsche Aussage, z.B. $0 = 1 \Rightarrow$ Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$.

   (f) Einsetzungsverfahren mit $\frac{x+y}{2}$. Lösung $\underline{\underline{S(-35,15)}}$.

   (g) Einsetzungsverfahren mit $x = 6 + 5y$ in ① liefert die falsche Aussage: $6 = 7 \Rightarrow$ Lösung: $\mathbb{L} = \{\,\}$.

   (h) Additionsverfahren. Lösung: $\underline{\underline{S(0,\frac{1}{2})}}$.

   (i) Additionsverfahren (Tipp: Teile ② zuerst durch 3) liefert eine stets richtige Aussage, z.B. $0 = 0$.
   Lösung: $\mathbb{L} = \big\{(x,y)\,|\,x \in \mathbb{R} \text{ und } y = \frac{2}{3}\,x + \frac{5}{6}\big\}$.
   In Worten: "Die Lösungsmenge besteht aus allen Paaren (x,y), wobei x eine beliebige reelle Zahl sein kann und y durch $y = \frac{2}{3}\,x + \frac{5}{6}$ gegeben ist."