LINEARES IV: Textaufgaben, Substitution und Weiteres rund um LGS – LÖSUNGEN

Klasse 155c / AGe

1. Gleichungssystem ($x =$ Anzahl teurere Plätze, $y =$ Anzahl billigere Plätze) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} x + y = 400 \\ 30x - 18y = 480 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y) = (160, 240)$$

   Es wurden also 160 teurere und 240 billigere Plätze verkauft.

2. Gleichungssystem ($x =$ Anzahl ganze Lektionen, $y =$ Anzahl halbe Lektionen) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} x + y = 161 \\ x + \frac{1}{2}\, y = 99.5 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = (38, 123)$$

   Es gibt also 38 ganze und 123 halbe Instrumentallektionen im Stundenplan.

3. **Tipp:** Der Grammpreis der teureren Sorte beträgt $\frac{13.30}{250}\,\frac{\text{sFr.}}{\text{gr.}}$, derjenige der billigeren Sorte $\frac{9.10}{250}\,\frac{\text{sFr.}}{\text{gr.}}$.

   Gleichungssystem ($x =$ Anz. gr. der billigeren Sorte, $y =$ Anz. gr. der teureren Sorte) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{9.10}{250}\, x + \frac{13.30}{250}\, y = 10.90 \\ x + y = 250 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y) = \left(142\,\frac{6}{7}, 107\,\frac{1}{7}\right)$$

   Die Mischung enthält also etwa 107 Gramm von der teureren und 143 Gramm von der billigeren Sorte.

4. (a) Substitutionen: $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$. Damit folgt: $(a, b) = (3, -1)$ und daraus $(x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$.

   (b) Substitutionen: $a = \frac{3}{2x-y}$, $b = \frac{2}{x+3}$. Damit folgt:

$$\left| \begin{array}{c} 3a - 5b = 1 \\ a + b = 1 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = (5, 2)$$

   (c) Substitutionen: $a = \frac{10}{x+3}$, $b = \frac{1}{y+5}$. Damit folgt:

$$\left| \begin{array}{c} 3a + 17b = 20 \\ 4a - 27b = -23 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b) = (1, 1) \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (7, -4)$$

   (d) Substitutionen: $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$. Damit folgt:

$$\left| \begin{array}{c} 3a - 7b = 5 \\ 5a + 3b = 12 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

   (e) Substitution: $a = xy$. Damit folgt:

$$\left| \begin{array}{c} 3a - 7y = 5 \\ 5a + 3y = 12 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, y) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = \left(9, \frac{1}{4}\right)$$

   (f) Substitutionen: $a = x + y$, $b = x - y$. Damit folgt:

$$\left| \begin{array}{c} ab = 2 \\ a = 6 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b) = \left(6, \frac{1}{3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = \left(\frac{19}{6}, \frac{17}{6}\right)$$

5. Gleichungssystem ($x =$ Anzahl Zweifränkler, $y =$ Anzahl Fünfliber) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} x+y=99 \\ 2x+5y=2\cdot 2x+5\cdot \frac{y}{2} \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y)=(55,44)$$

   Es sind also 55 Zweifränkler und 44 Fünfliber.

6. Gleichungssystem ($x =$ grössere Zahl, $y =$ kleinere Zahl) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{x-y}{x+y}=\frac{2}{3} \\ \frac{xy}{x+y}=\frac{5}{3} \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y)=(10,2)$$

   Die beiden Zahlen lauten 10 und 2.

7. (a) Empfehlung: Direkt mit dem Additionsverfahren. $(x,y)=(-3,\frac{1}{3})$.

   (b) Empfehlungen: Additionsverfahren, Determinantenverfahren. $(x,y)=(2,1)$.

   (c) Empfehlung: Gleichsetzungsverfahren. $(x,y)=(20,12)$.

   (d) Empfehlung: Einsetzungsverfahren. $(x,y)=(7,-1)$.

   (e) Empfehlung: Substitution und Additionsverfahren. $(x,y)=(7,9)$.

   (f) Empfehlung: Zuerst Multiplikation mit 20 resp. 60, danach Einsetzungsverfahren. $(x,y)=(26,4)$.

8. Gleichungssystem ($x =$ erste Teilstrecke, $y =$ zweite Teilstrecke, $z =$ dritte Teilstrecke) und Lösung:

$$\left| \begin{array}{c} x+y+z=60 \\ x=\frac{6}{5}\,y \\ z=x+y+5 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} \frac{6}{5}\,y+y+z=60 \\ z=\frac{6}{5}\,y+y+5 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z)=\left(15,\frac{25}{2},\frac{65}{2}\right)$$

   Die drei Teilstrecken sind also $15\,\mathrm{cm}$, $12.5\,\mathrm{cm}$ und $32.5\,\mathrm{cm}$ lang.

9. Dies ist eine grössere Aufgabe, weil es offensichtlich eine ganze Menge von Unbekannten gibt.

   Seien zunächst f die zollfreie Anzahl Liter (pro Person) und p der Zollpreis pro weiteren Liter. Dann folgt für den Zoll Z_{A}, den Herr Schweizer alleine hätte Zahlen müssen:

$$Z_{\mathrm{A}}=(5.5-f)\cdot p$$

   Behält Herr Schweizer x Liter bei sich und gibt seinem Freund y Liter, so betragen die beiden dafür zu bezahlenden Zölle:

$$Z_x=(x-f)\cdot p=8.40 \qquad \text{und} \qquad Z_y=(y-f)\cdot p=4.90$$

   Natürlich gilt zudem $x+y=5.5$. Weiter besagt der Text dass:

$$Z_{\mathrm{A}}-6.30=8.40+4.90=13.30 \qquad \Leftrightarrow \qquad Z_{\mathrm{A}}=19.60$$

   Insgesamt haben wir also das folgende grosse Gleichungssystem vor uns:

$$\left| \begin{array}{c} (5.5-f)\cdot p=19.60 \\ (x-f)\cdot p=8.40 \\ (y-f)\cdot p=4.90 \\ x+y=5.5 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

   Das sind vier Gleichungen für die vier Unbekannten f,p,x,y. Das sollte sich lösen lassen.

   Zunächst können wir x und y eliminieren, denn danach wird am Ende ja gar nicht gefragt. Dazu lösen wir z.B. ④ nach $x=5.5-y$ auf und setzen dieses x in ② ein, woraus sich ein Ausdruck für y ergibt:

$$\text{④ in ②:} \qquad (5.5-y-f)\cdot p=8.40 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=5.5-f-\frac{8.40}{p}$$

Nun können wir dieses y in ③ einsetzen:

$$(y-f)\cdot p = 4.90 \qquad \Rightarrow \qquad \left(5.5 - f - \frac{8.40}{p} - f\right)\cdot p = 4.90 \qquad \Rightarrow \qquad (5.5-2f)\cdot p = 13.30$$

Jetzt haben wir ein Gleichungssystem in p und f, dass wir wie bis anhin lösen können:

$$\left| \begin{array}{c} (5.5-f)\cdot p = 19.60 \\ (5.5-2f)\cdot p = 13.30 \end{array} \right| \begin{array}{c} ⑤ \\ ⑥ \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad (f,p) = \left(\frac{99}{74}, \frac{259}{55}\right) \approx (1.34, 4.71)$$

Pro Person sind also $1.34\ \mathrm{Liter}$ zollfrei und der Zoll für jeden weiteren Liter beträgt $\mathrm{sFr.}\ 4.71$.

Schauen wir nochmals überblickend auf die Aufgabe zurück, so können wir bemerken, dass das letzte Gleichungssystem mit den Gleichungen ⑤ und ⑥ tatsächlich direkt aus dem Aufgabentext abgelesen werden könnte: Herr Schweizer bringt 5.5 Liter Spirituosen mit. Davon wird in ⑤ einmal die zollfreie Menge abgezogen und in ⑥ zweimal, weil die Spirituosen auf zwei Personen verteilt werden. In beiden Fällen folgt sehr direkt aus dem Text, was für ein Preis zu bezahlen ist...

10. (a) Substitution: $r = x+y$, $s = x-y = 1 \Rightarrow r = a \Rightarrow (x,y) = (\frac{a+1}{2}, \frac{a-1}{2})$.

    (b) Richtig für alle (x,y) mit $x:y = 2:5 \Rightarrow$ Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(x,y) \mid \frac{x}{y} = \frac{2}{5}\}$.

    (c) Additionsverfahren: multipliziere die obere Gleichung mit $n \Rightarrow (x,y) = (\frac{m+n}{m}, \frac{m-n}{n})$.

    (d) Substitution: $r = \sqrt{x}+\sqrt{y}$, $s = \sqrt{x}-\sqrt{y} = 10 \Rightarrow r = 40 \Rightarrow (x,y) = (625, 225)$.

    (e) $x^2 = 2y+3$ in die erste Gleichung einsetzen $\Rightarrow (x,y) = (5,11)$ oder $(x,y) = (-5,11)$.

    (f) Beide Gleichungen mit x multiplizieren, danach substituieren: $r = x\sqrt{x+y}$ und $s = x^2$. Damit folgt das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} r+s = 5 \\ r+4 = 0 \end{array} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad (r,s) = (-4,9)$$

Dann ist $s = x^2 = 9$ und entweder $x = 3$ oder $x = -3$. Allerdings kommt nur $x = -3$ in Frage, denn $r = x\sqrt{x+y}$ kann nur gleich -4 sein, wenn $x < 0$ ist (Wurzeln sind per Definition positiv!). Damit folgt:

$$-3\sqrt{-3+y} = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{-3+y} = \frac{4}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad -3+y = \frac{16}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{43}{9}$$

Die Lösung lautet also:

$$(x,y) = \left(-3, \frac{43}{9}\right)$$

Bemerke: Wäre als Teil der Lösung $x = 0$ herausgekommen, wäre die Lösung ebenfalls verboten gewesen, denn x taucht im ursprünglichen Gleichungssystem als Nenner auf.

Tatsächlich sollten wir das Resultat rasch kontrollieren, wie es bei Wurzelgleichungen üblich ist (Probe):

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{-3+\frac{43}{9}} = \sqrt{\frac{-27+43}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{x+y} + x = \frac{4}{3} - 3 = \frac{4-9}{3} = \frac{-5}{3} = \frac{5}{-3} = \frac{5}{x} \quad \checkmark$$

$$\text{und} \qquad \sqrt{x+y} + \frac{4}{x} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \quad \checkmark$$