1 Lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Definition der lineare Gleichung in zwei Unbekannten

Jede Gleichung in den beiden Unbekannten x und y, die durch Äquivalenzumformungen auf die Form

$$ax + by = c \qquad \textit{mit Parametern} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

gebracht werden kann, heisst **lineare Gleichung in zwei Unbekannten**.

Linearität: Die Gleichung $ax + by = c$ ist **linear** in x und y, weil alle Glieder höchstens linear in den beiden Unbekannten x und y sind. D.h., es treten z.B. keine quadratischen Glieder dx^2 oder ey^2 und auch keine gemischten Glieder fxy auf.

Normalfall: Sind a oder b (oder beide) verschieden von 0, so besteht die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zu $ax + by = c$ aus unendlich vielen **geordneten Zahlenpaaren** (x, y).

Dabei bedeutet "geordnet": Mit $(2, -1)$ ist ein anderes Zahlenpaar gemeint als mit $(-1, 2)$.

Spezialfälle: Für $a = b = 0$ und $c \neq 0$ existieren keine Lösungen $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\,\}$.

Für $a = b = c = 0$ ist jedes Zahlenpaar (x, y) eine Lösung $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

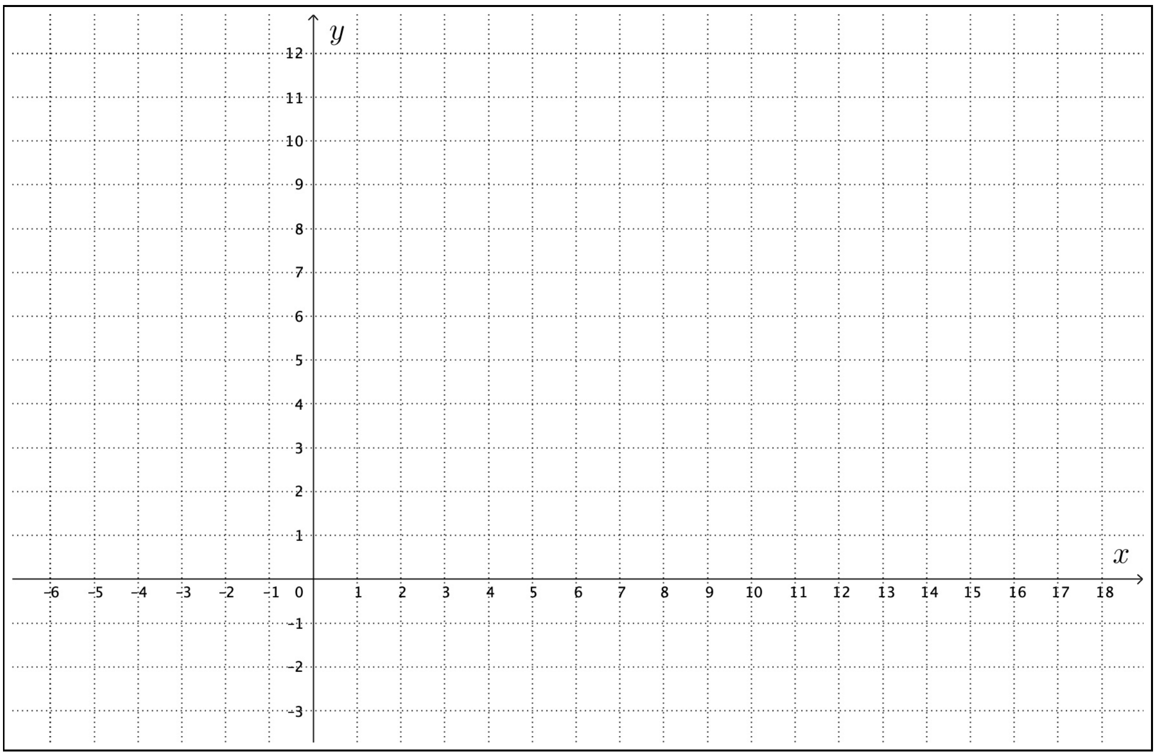
Grafische Darstellung der Lösungsmenge einer LG in 2 Unbekannten

Beispiel: $3x + 4y = 36$

$\Rightarrow$ mögliche Lösungspaare: $(12, 0)$ $(0, 9)$ $(8, 3)$ $(4, 6)$ $(16, -3)$ $(-4, 12)$

aber ebenso: $\left(10, \dfrac{3}{2}\right)$ $\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{29}{4}\right)$ $(-1000, 759)$

Wir wollen nun alle Lösungspaare (x, y) als Punkte in ein ***x*-*y*-Koordinatensystem** eintragen:



Feststellung: Alle Lösungen (x, y) der Gleichung $3x + 4y = 36$ bilden zusammen eine Gerade! Das passt zum Namen "lineare Gleichung".

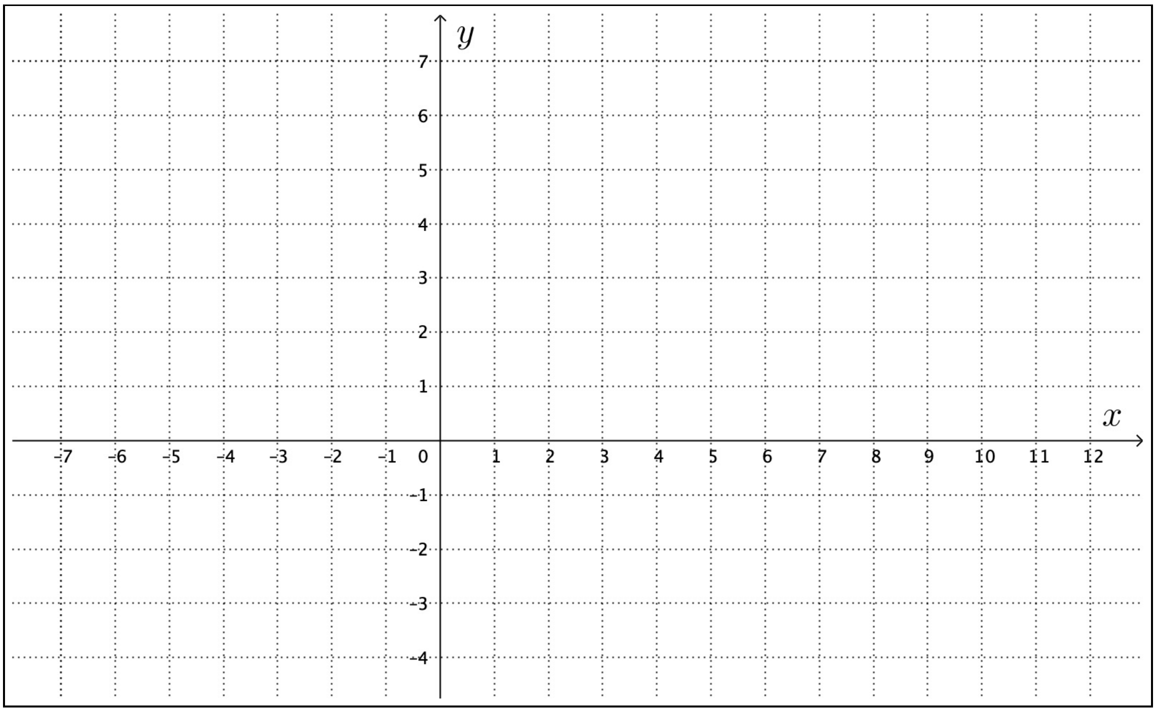
Wir halten fest: Zu jeder linearen Gleichung $ax + by = c$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gehört im x-y-Koordinatensystem genau eine Gerade g.

$ax + by = c$ bezeichnen wir daher auch häufig als **Geradengleichung** und notieren:

$$g: \quad ax + by = c$$

Weitere Beispiele:

$$h: \quad x + y = 6 \qquad\qquad i: \quad x + y = -4$$
$$j: \quad x + 0y = -2 \qquad\qquad k: \quad 0x + 2y = 8$$
$$r: \quad 2x - y = 4 \qquad\qquad s: \quad 2x - y = 0$$



Bemerkung 1: Die Geraden h und i sind parallel zueinander; zudem besitzen sie in ihren Geradengleichungen dieselben Parameter a und b, nämlich $a = 1$ und $b = 1$.

Auch die Geraden r und s sind parallel zueinander; und auch hier sind die beiden Parameter a und b jeweils dieselben: $a = 2$ und $b = -1$.

Vermutung: Die Richtung der zu $ax + by = c$ gehörenden Geraden wird nur durch die beiden Parameter a und b festgelegt. c bewirkt lediglich eine Parallelverschiebung.

Bemerkung 2: Ist $a = 0$, so ergibt sich eine **Horizontale** auf einer bestimmten y-Höhe.

So z.B. bei Gerade $k: 0x + 2y = 8 \Leftrightarrow y = 4$. Dies ist eine Gleichung, die keine Anforderung an die x-Koordinate der Lösungen (x, y) stellt, x also frei wählbar lässt, dafür aber die y-Koordinate eindeutig auf den Wert 4 festlegt.

Bemerkung 3: Ist $b = 0$, so ergibt sich eine **Vertikale** bei einer bestimmten Stelle x.

So z.B. bei Gerade $j: x + 0y = -2 \Leftrightarrow x = -2$. Dies ist eine Gleichung, die keine Anforderung an die y-Koordinate der Lösungen (x, y) stellt, y also frei wählbar lässt, dafür aber die x-Koordinate eindeutig auf den Wert -2 festlegt.

Die explizite Form der Geradengleichung

Aus Gründen, die in Kürze klarer werden, möchten wir die allgemeine Geradengleichung nach der Unbekannten y auflösen. Dazu starten wir mit der Subtraktion von ax:

$$ax + by = c \quad \overset{-ax}{\Longleftrightarrow} \quad by = -ax + c$$

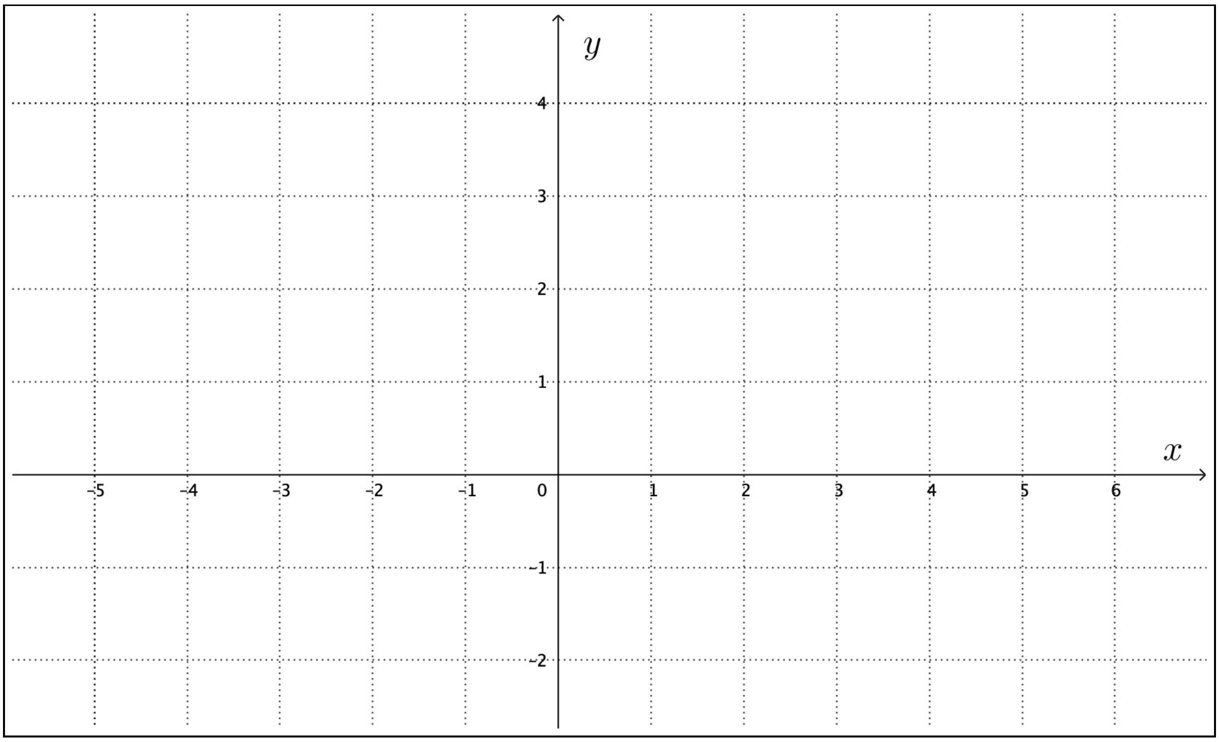
Gehen wir davon aus, dass $b \neq 0$ ist so folgern wir weiter:

$$by = -ax + c \quad \overset{:b}{\Longleftrightarrow} \quad y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$$

$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$ ist lediglich eine andere Schreibweise der Geradengleichung $ax + by = c$. Wir nennen sie die **explizite Form**. Aber was genau ist denn an dieser Form so "explizit"?

Beispiele ($b \neq 0$):

$$\begin{array}{rccl}
 & ax + by = c & \Leftrightarrow & y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b} \\
f: & -x + 2y = 0 & \Leftrightarrow & y = \frac{1}{2}\,x \\
g: & -x + 2y = 4 & \Leftrightarrow & y = \frac{1}{2}\,x + 2 \\
h: & 3x + 5y = 0 & \Leftrightarrow & y = -\frac{3}{5}\,x \\
i: & 3x + 5y = -5 & \Leftrightarrow & y = -\frac{3}{5}\,x - 1 \\
j: & 0x + y = 2 & \Leftrightarrow & y = 0x + 2
\end{array}$$



Bemerke erstens: f und g haben beide die Steigung $\frac{1}{2}$, was dem Wert von $-\frac{a}{b} = -\frac{-1}{2}$ in der expliziten Form entspricht. Bei h und i beträgt die Steigung $-\frac{3}{5}$, was offensichtlich gleich $-\frac{a}{b}$ ist, und bei j ist die Steigung 0, was auch mit $-\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ übereinstimmt.

Bemerke zweitens: f und h schneiden die y-Achse auf der Höhe $y = 0$, während g und j die y-Achse auf bei $y = 2$ durchqueren und die Gerade i bei $y = -1$ die y-Achse durchstösst. Diese Werte entsprechen in der expliziten Form jeweils dem Wert von $\frac{c}{b}$.

Verständnis der expliziten Form der Geradengleichung

Für $b \neq 0$ kann jede lineare Gleichung in zwei Unbekannten $ax + by = c$ auf ihre **explizite Form**

$$y = mx + q \qquad \text{mit} \quad m = -\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{b}$$

gebracht werden. Dabei steht m für die **Steigung** *und q für den* **y-Achsenabschnitt** *der zugehörigen Geraden.*

Zur Klärung: Der y-Achsenabschnitt einer Gerade ist die Höhe, auf der die Gerade die y-Achse durchquert.

Wie sieht es mit der expliziten Form von $ax + by = c$ im Fall $b = 0$ aus?

Mit $b = 0$ wird aus $ax + by = c$ ganz einfach $ax = c$ resp. $x = \frac{c}{a}$.

Wir haben bereits gelernt, wofür eine derartige Gleichung steht, in der y gar nicht mehr auftaucht: Alle Punkte $(\frac{c}{a}, y)$, also mit x-Koordinate $x = \frac{c}{a}$, lösen diese Gleichung. Somit beschreibt sie im Koordinatensystem die Menge aller Punkte mit x-Koordinate $\frac{c}{a}$ und beliebiger y-Koordinate. Das ist eine **Vertikale** an der Stelle $x = \frac{c}{a}$. Ihre Steigung ist unendlich gross, also als Zahl nicht mehr bezifferbar.

Anmerkungen zu den beiden Formen und ihren Parametern

- $y = mx + q$ bezeichnen wir als **explizite Form** der Geradengleichung. Im Gegensatz dazu heisst $ax + by = c$ **implizite Form**.

- **Rep.:** Die Zahlen $a, b, c, m, q \in \mathbb{R}$ in den beiden Formen der Geradengleichung nennen wir **Parameter**, im Gegensatz zu x und y, die wir als **Unbekannte** oder **Variablen** der Gleichung bezeichnen.

- Zu jeder Geraden gehört in der Regel genau eine explizite Form $y = mx + q$, also genau eine Steigung m und ein y-Achsenabschnitt q.

  Hingegen gibt es zur selben Geraden unendlich viele implizite Formen $ax + by = c$, denn wir können ja beide Gleichungsseiten mit irgendeiner Zahl ($\neq 0$) multiplizieren und erhalten dadurch eine andere implizite Form. Dabei bleibt aber die Lösungsmenge und somit die Gerade gleich.

Beispiel: $$2x - 3y = -1 \quad \stackrel{\cdot 2}{\Longleftrightarrow} \quad 4x - 6y = -2 \quad \stackrel{:(-4)}{\Longleftrightarrow} \quad -x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ mehrere implizite Formen!

aber nur eine explizite Form: $\quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$