2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) in zwei Unbekannten

Soll eine Lösung resp. ein Lösungspaar (x, y) gleichzeitig mehrere Gleichungen in den beiden Unbekannten $x, y \in \mathbb{R}$ lösen, so notieren wir diese Gleichungen als sogenanntes **Gleichungssystem**:

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad \text{mit} \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Enthält das Gleichungssystem, wie hier gezeigt, ausschliesslich lineare Gleichungen, so nennen wir es **linear** und bezeichnen es kurz als **LGS (= <u>l</u>ineares <u>G</u>leichungs<u>s</u>ystem)**.

Allgemeine Anmerkungen zu Gleichungssystemen

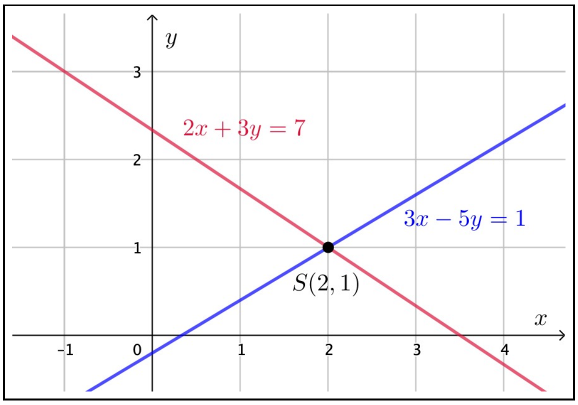
- Gleichungssysteme können im Prinzip beliebig viele Gleichungen und Unbekannte enthalten. Obiges System enthält z.B. zwei lineare Gleichungen und zwei Unbekannte. Das nennen wir kurz ein lineares **2x2-Gleichungssystem** oder noch kürzer ein **2x2-LGS**.

- Für die weitere Behandlung empfiehlt es sich die Gleichungen zu **nummerieren** (oben: ① und ②), damit man gut angeben kann, mit welcher Gleichung gerade gearbeitet wird.

Geometrische Überlegung zur Lösbarkeit eines 2x2-LGS

Zu jeder LG in zwei Unbekannten (Geradengleichung) gehört eine Gerade aus allen Punkten (x, y), die die Gleichung lösen. Zwei Gleichungen beschreiben also zwei Geraden, die im **Normalfall** genau einen gemeinsamen Punkt, den **Schnittpunkt** S aufweisen.

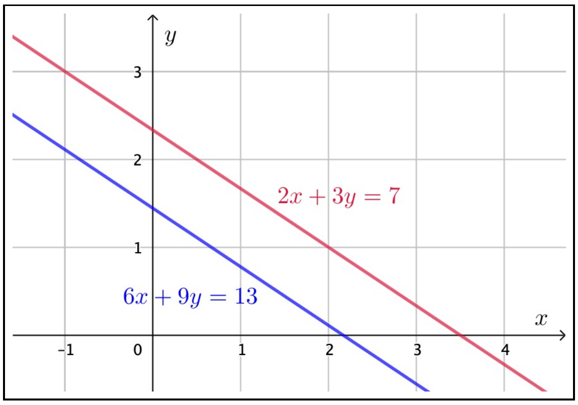
Folglich besitzt ein lineares 2x2-Gleichungssystem **im Normalfall genau eine Lösung** resp. ein eindeutiges Lösungspaar $S(x, y)$.



Daneben gibt es zwei **Spezialfälle**:

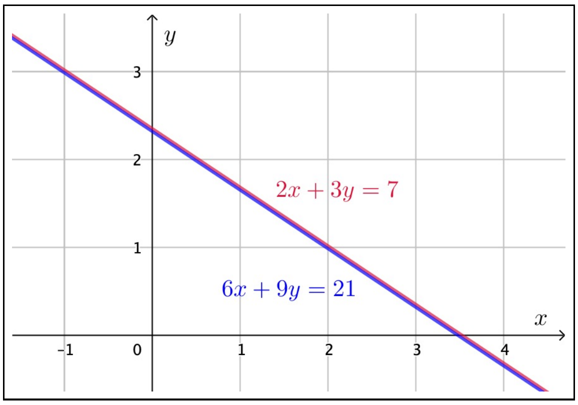
Parallelität

Die beiden Geraden sind **(echt) parallel**, d.h. sie liegen nebeneinander und schneiden sich nie. In diesem Fall hat das 2x2-Gleichungssystem **keine Lösung**.



Identität

Die beiden Geraden sind **identisch**. Jeder Punkt auf der einen Gerade liegt auch auf der anderen und das 2x2-Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**.



Mathematische Unterscheidung der Fälle

In beiden Spezialfällen sind die zugehörigen Geraden parallel zueinander – ob echt parallel oder sogar identisch ist vorerst nicht wichtig. Parallele Geraden haben dieselben Steigungen. Sind die Gleichungen in der expliziten Form gegeben, so erkennen wir den Spezialfall also auf einen Blick:

$$\left| \begin{array}{l} y = m_1\,x + q_1 \\ y = m_2\,x + q_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Ein Spezialfall liegt genau dann vor, wenn } m_1 = m_2 \text{ ist!}$$

Wie sieht es damit in der impliziten Form aus? Woran erkennen wir, ob die beiden Geraden parallel sind? Wir erinnern uns: In der impliziten Form $ax + by = c$ ist die Steigung der Geraden gegeben durch $m = -\frac{a}{b}$. Das bedeutet, die beiden Geraden sind parallel zueinander, wenn gilt:

$$m_1 = m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 b_2 = a_2 b_1$$

Man kann also einfach schauen, ob die beiden Koeffizientenprodukte "übers Kreuz" identisch sind. Wenn ja, sind die beiden Geraden parallel.

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad ???$$

Schliesslich möchten wir im Falle eines Spezialfalles zwischen der echten Parallelität und der Identität unterscheiden können. Bei zwei identischen Geraden sind die expliziten Formen genau gleich (gleiche Steigung m, gleicher y-Achsenabschnitt q). Anders bei der impliziten Form. Hier muss sich die eine Geradengleichung durch Multiplikation mit einem Faktor in die andere überführen lassen, damit eine Identität vorliegt. Betrachten wir dazu zwei Beispiele, die zu den Grafiken unten auf der vorangegangenen Seite gehören:

"Echt parallel": Die Geraden liegen nebeneinander und schneiden sich nie. Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**:

$$\left| \begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \\ 6x + 9y = 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Spezialfall!}$$

Gleichung ① mit dem Faktor 3 zu multiplizieren ergibt auf der linken Gleichungsseite dasselbe wie in ②, aber rechts nicht ⇒ **echt parallel!**

"Identisch": Die Geraden liegen aufeinander und es gibt **unendlich viele Lösungen**:

$$\left| \begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \\ 6x + 9y = 21 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Spezialfall!}$$

Hier ist nun Gleichung ② tatsächlich das Dreifache von Gleichung ① ⇒ **Identität!**

Fassen wir nach diesen Beispielen nochmals alles Wesentliche bis hierhin zusammen:

Lineare 2x2-Gleichungssysteme (2x2-LGS)

Ein **lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen in 2 Unbekannten** *ist ein Gleichungssystem der Form:*

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_1y = c_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad \text{mit} \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Wir bezeichnen es auch als **lineares 2x2-Gleichungssystem** *oder noch kürzer als* **2x2-LGS**. *Jedes* **reelle Zahlenpaar** (x, y), *das die beiden Gleichungen ① und ② erfüllt, ist eine* **Lösung** *des Gleichungssystems.*

Wie viele Lösungen (x, y) ein 2x2-LGS aufweist, hängt von den Parametern a, b, c, d, e und f ab. Wir unterscheiden drei Fälle:

- **1 Lösung (Normalfall):** *Die zu ① und ② gehörenden Geraden haben unterschiedliche Steigungen. Dies ist äquivalent zur Bedingung:*

  $$m_1 \neq m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1b_2 \neq a_2b_1$$

  Es gibt genau einen **Schnittpunkt** S, *dessen Koordinaten (x, y) für die einzige Lösung des Gleichungssystems stehen.*

- **∞-viele Lösungen:** *Die zu ① und ② gehörenden Geraden sind* **identisch**. *Sie haben also gleiche Steigungen*

  $$m_1 = m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad ae = bd$$

  und ① kann zu ② umgeformt werden. Da alle Punkte der einen Gerade auch Punkte der anderen Gerade sind, gibt es unendlich viele Lösungen, die durch jede der beiden Gleichungen beschrieben werden.

- **0 Lösungen:** *Die zu ① und ② gehörenden Geraden sind* **echt parallel**. *Sie haben zwar dieselben Steigungen*

  $$m_1 = m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad ae = bd$$

  aber ① und ② haben disjunkte (= komplett verschiedene) Lösungsmengen. Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte, sodass die Lösungsmenge des Gleichungssystems leer ist.

  Der Einfachheit halber meinen wir in Zukunft immer **echt** *parallele Geraden, wenn wir von parallelen Geraden sprechen, auch wenn dies ein bisschen unpräzise ist, denn auch zwei identische Geraden sind ja parallel zueinander.*