Determinantenverfahren – ein Merkbeispiel mit Erläuterungen

Vorgabe: Gegeben sei das folgende 2x2-LGS:

$$\begin{array}{c} \\ \left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 6y = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \end{array}$$

x-Spalte, y-Spalte, Konstantenspalte

Hauptdeterminante D: Wir schreiben die Koeffizienten (= Vorfaktoren resp. Parameter) in der x- und in der y-Spalte separat heraus und rechnen mit ihnen wie folgt:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 18 - 8 = 10$$

Diese Rechnung liefert die **Hauptdeterminante** D unseres Gleichungssystems. Wie bei Determinanten üblich wurde "übers Kreuz" gerechnet:

$$D \;=\; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \;=\; \underset{\oplus}{\boxed{3 \cdot 6}} - \underset{\ominus}{\boxed{2 \cdot 4}} \;=\; 18 - 8 = \;10$$

N.B.: Die zwei senkrechten Striche $|\square|$ links und rechts kennzeichnen sowohl Gleichungssysteme, wie auch Determinanten – ist halt so! Die beiden Objekte sind ja nicht besonders schwierig voneinander zu unterscheiden: In Gleichungssystemen besteht jede Zeile aus einer Gleichung, in Determinanten haben wir lauter Einzeleinträge in Spalten und Zeilen.

Und weiter: Sollte sich für die Hauptdeterminante der Wert $D = 0$ ergeben, so liegt ein Spezialfall vor und es gibt entweder unendlich viele Lösungen ($\widehat{=}$ identische Geraden) oder keine Lösung ($\widehat{=}$ (echt) parallele Geraden).

Nebendeterminanten D_x und D_y: Zur Berechnung der **Nebendeterminante** D_x nehmen wir die noch unausgerechnete Hauptdeterminante D und ersetzen die Koeffizienten aus der x-Spalte des Gleichungssystems durch die Koeffizienten aus der Konstantenspalte:

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & 2 \\ \cancel{4} & 6 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_x := \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

Analog ersetzen wir zur Berechnung der Nebendeterminante D_y die Koeffizienten aus der y-Spalte durch diejenigen aus der Konstantenspalte:

$$\begin{vmatrix} 3 & \cancel{2} \\ 4 & \cancel{6} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_y := \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5$$

Berechnung der Lösung (x, y): Sind D, D_x und D_y erst einmal berechnet, geht es ganz schnell. Es ist dann nämlich:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{10} = 1 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{(x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)}}$$