Training Grundwissen 8 – zu bearbeiten auf Dienstag 16.4.24

Sämtliche Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen, damit sie etwas bringen!

1. Löse mittels **quadratischer Ergänzung**:

$$2x^2 - 8x - \frac{9}{2} = 0$$

2. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge der Hypotenuse $6\,\mathrm{cm}$ und eine der beiden Katheten ist $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ lang.

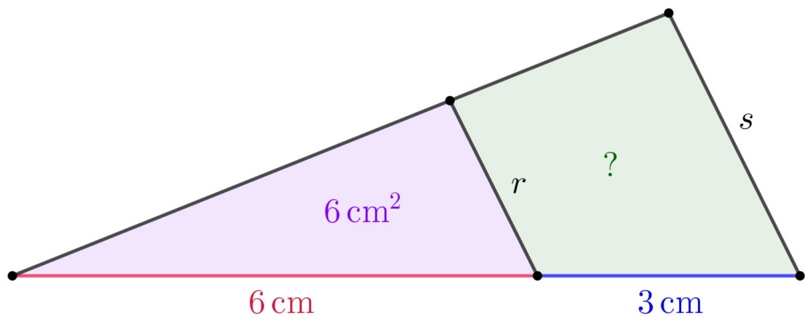
   Skizziere das Dreieck. Berechne alle Seitenlängen und Winkel und trage sie in die Skizze ein.

3. Löse möglichst effizient für $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $3x^2 - 6x - 5 = 0$ (b) $2x^2 + 9x - 18 = 0$

   (c) $4x^2 - 18x = 0$ (d) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

4. Die beiden Strecken r und s sind parallel zueinander. Bestimme die Grösse der grünen Fläche.



5. Löse für $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-1}$ (b) $\sqrt{3x+9} - \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-2}$

6. Multipliziere aus:

   (a) $\left(2m - n^2\right)^5 =$

   (b) $(3a - 2b + 5c)(3a + 2b + 5c) =$

   (c) $(2x - 3y)\left(4x^2 + 6xy + 9y^2\right) =$

Lösungen

1. Hier die Lösung mittels quadratischer Ergänzung Schritt für Schritt:

$$\begin{aligned}
& & 2x^2 - 8x - \frac{9}{2} &= 0 & & \left| + \frac{9}{2} \right. \\
&\Leftrightarrow & 2x^2 - 8x &= \frac{9}{2} & & | : 2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 4x &= \frac{9}{4} & & \left| + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \right. \mathrel{\widehat{=}} \text{quadratische Ergänzung} \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 &= \frac{9}{4} + 4 & & |\,\text{links faktorisieren und rechts zusammenfassen} \\
&\Leftrightarrow & (x-2)^2 &= \frac{25}{4} & & \left| \sqrt{\ldots} \right. \\
&\Leftrightarrow & x - 2 &= \pm\frac{5}{2} & & | + 2 \\
&\Leftrightarrow & x_{1/2} &= 2 \pm \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2} \text{ oder } -\frac{1}{2}}} & &
\end{aligned}$$

2. Die andere Kathete beträgt (Pythagoras):

$$k_2 = \sqrt{h^2 - k_1^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Die zweite Kathete k_2 ist die längere Kathete!

Auf den Winkel α zwischen der Kathete k_1 und der Hypotenuse schliessen wir trigonometrisch:

$$\cos(\alpha) = \frac{k_1}{h} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

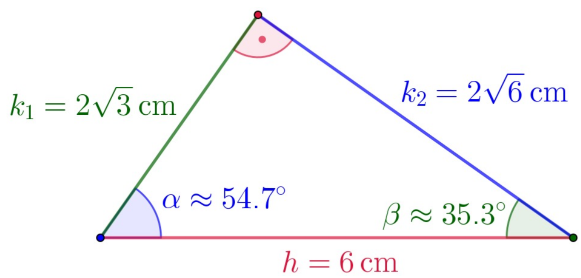
Bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$ handelt es sich nicht um einen exakten Wert der Cosinusfunktion, auch wenn es verdächtig danach aussieht. Dem entsprechend können wir auch keinen exakten Winkel angeben. Ausnahmesweise bemühen wir deshalb den TR:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7^\circ$$

Der andere spitze Winkel beträgt folglich ungefähr:

$$\beta \approx 90^\circ - 54.7^\circ = 35.3^\circ$$

Damit sind alle Grössen berechnet und wir zeichnen die Skizze:



3. (a) Hier gibt es keine einfache Faktorisierung. Wir müssen mit der Mitternachtsformel arbeiten:
$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}}}$$
(b) Hier lässt sich ein Zweiklammeransatz finden:
$$4x^2 - 18x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(2x - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{0, \frac{9}{2}\right\}}}$$
(c) Wir faktorisieren direkt:
$$2x^2 + 9x - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x - 3)(x + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}, -6\right\}}}$$
(d) Auch hier faktorisieren wir zuerst mittels Zweiklammeransatz:
$$4x^4 - 13x^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(x^2 - 3\big)\big(4x^2 - 1\big) = 0$$
Nun ergeben sich aus beiden Fällen je zwei Lösungen für x:
$$x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad 4x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{2}\right\}}}$$

4. Das kleine und das grosse Dreieck sind aufgrund der Parallelität von r und s ähnlich zueinander. Der Streckfaktor vom kleinen zum grossen dreieck beträgt $k = \frac{6+3}{6} = \frac{3}{2}$. Die Fläche des grossen Dreiecks beträgt somit:
$$A_{\text{gross}} = k^2 \cdot A_{\text{klein}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 = \frac{9}{4} \cdot 6 = \frac{27}{2}$$
Die grüne Fläche ist die Differenz von grosser und kleiner Dreiecksfläche:
$$A_{\text{grün}} = A_{\text{gross}} - A_{\text{klein}} = \frac{27}{2} - 6 = \frac{27 - 12}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2}\,\text{cm}}}$$

5. Wir lösen Schritt für Schritt:

(a) $$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-1) - (x-2)(x-1) = (x-2)(x+2) \quad (x \neq 1, \pm 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 - x^2 + 3x - 2 = x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{0, 4\}}} \quad \checkmark$$

(b) $$\sqrt{3x+9} - \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-2} \quad \Rightarrow \quad 3x + 9 - 2\sqrt{3x^2 - 6x - 45} + x - 5 = 2x - 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = 2\sqrt{3x^2 - 6x - 45} \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = \sqrt{3x^2 - 6x - 45}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = 3x^2 - 6x - 45 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)(x-9) = 0$$
Probe mit $x = -3$ scheitert in der zweiten Wurzel: $\sqrt{-3-5} = \sqrt{-8}$ ϟ

Probe mit $x = 9$: $\sqrt{3 \cdot 9 + 9} - \sqrt{9 - 5} = 6 - 2 = 4$ und $\sqrt{2 \cdot 9 - 2} = 4$ ✓ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = 9}}$

6. Die Ausmultiplizierungen ergeben:

(a) $$\big(2m - n^2\big)^5 = (2m)^5 - 5(2m)^4 n^2 + 10(2m)^3\big(n^2\big)^2 - 10(2m)^2\big(n^2\big)^3 + 5 \cdot 2m\big(n^2\big)^4 - \big(n^2\big)^5$$
$$= \underline{\underline{32m^5 - 80m^4n^2 + 80m^3n^4 - 40m^2n^6 + 10mn^8 - n^{10}}}$$

(b) $$(3a - 2b + 5c)(3a + 2b + 5c) = \big((3a + 5c) - 2b\big)\big((3a + 5c) + 2b\big) = (3a + 5c)^2 - (2b)^2$$
$$= \underline{\underline{9a^2 + 30ac + 25c^2 - 4b^2}}$$

(c) $$(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = \underline{\underline{8x^3 - 27y^3}} \qquad \text{Kuben-Formel!}$$