Training Grundwissen 6 – zu bearbeiten auf Mittwoch 13.3.24

Sämtliche Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen, damit sie etwas bringen!

1. Berechne möglichst effizient:

   (a) $127 \cdot 133 =$

   (b) $185 \cdot 215 =$

2. Vereinfache soweit wie möglich:

   (a) $10a^{-3} : (5a^{-2}) \cdot 2a^3 =$

   (b) $(a-b)^5 \cdot (b-a)^{-5} =$

   (c) $\left(10a^3 + \dfrac{4}{a^2}\right) : (2a^{-4}) =$

   (d) $a^{2n+1} : a^{2n-1} : a^2 =$

3. Fülle die Tabelle rechts aus:

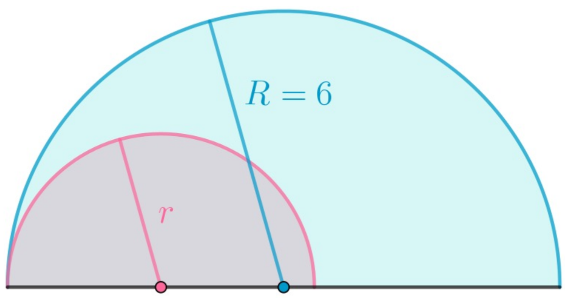
α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$			
$30°$			
$45°$			
$60°$			
$90°$			

4. Vereinfache soweit wie möglich:

   (a) $\dfrac{q}{p-q} - \dfrac{p}{p-q} =$

   (b) $\dfrac{5}{n^2+n-6} - \dfrac{3}{n^2-n-2} =$

5. In der Grafik rechts beträgt das Verhältnis der blauen zur roten Fläche $56 : 25$. Berechne den Radius des roten Halbkreises.



6. Löse für $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{q} - \dfrac{q}{4q-15} = -\dfrac{1}{4}$

7. Multipliziere aus: $\left(x + x^{-1}\right)^3 =$

Lösungen

1. (a) $127 \cdot 133 = (130-3)(130+3) = 130^2 - 3^2 = 16\,900 - 9 = \underline{\underline{16\,891}}$
   (b) $185 \cdot 215 = (200-15)(200+15) = 200^2 - 15^2 = 40\,000 - 225 = \underline{\underline{39\,775}}$

2. Die Aufgabe repetiert die Potenzgesetze. Diese lauten:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

   Ausserdem muss man Potenzen mit negativen Exponenten verstehen resp. die Defintion kennen:

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

   Nun zu den Lösungen:

   (a) $10a^{-3} : (5a^{-2}) \cdot 2a^3 = \frac{10}{a^3} : \frac{5}{a^2} \cdot 2a^3 = \frac{10}{a^3} \cdot \frac{a^2}{5} \cdot 2a^3 = \underline{\underline{4a^2}}$

   (b) $(a-b)^5 \cdot (b-a)^{-5} = \frac{(a-b)^5}{(b-a)^5} = \left(\frac{a-b}{b-a}\right)^5 = \left(\frac{-(b-a)}{b-a}\right)^5 = (-1)^5 = \underline{\underline{-1}}$

   (c) $\left(10a^3 + \frac{4}{a^2}\right) : (2a^{-4}) = \frac{10a^3}{2a^{-4}} + \frac{4}{a^2 \cdot 2a^{-4}} = \underline{\underline{5a^7 + 2a^2}}$

   (d) $a^{2n+1} : a^{2n-1} : a^2 = \frac{a^{2n+1}}{a^{2n-1} \cdot a^2} = \frac{a^{2n+1}}{a^{2n+1}} = \underline{\underline{1}}$

3. Hier die ausgefüllte Tabelle:

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	undefiniert

4. Wir erhalten:

   (a) $\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} = \underline{\underline{-1}}$

   (b) $\frac{5}{n^2+n-6} - \frac{3}{n^2-n-2} = \frac{5(n+1) - 3(n+3)}{(n+3)(n+1)(n-2)} = \frac{2n-4}{(n+3)(n+1)(n-2)} = \underline{\underline{\frac{2}{(n+3)(n+1)}}}$

5. Zentrische Streckung mit Zentrum ganz links auf der Grundlinie. Für den Streckfaktor k folgt:

$$k^2 = \text{grosse Halbkreisfläche : kleine Halbkreisfläche} = (56+25) : 25 = \frac{81}{25} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{9}{5}$$

   Und somit erhalten wir für den Radius des roten Halbkreises:

$$r = \frac{5}{9} R = \frac{5}{9} \cdot 6 = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

6. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner $4q(4q-15)$ ($q \neq 0$ und $q \neq \frac{15}{4}$) und erhalten:

$$\frac{1}{q} - \frac{q}{4q-15} = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4(4q-15) - 4q^2 = -q(4q-15)$$
$$\Leftrightarrow \quad 16q - 60 - 4q^2 = -4q^2 + 15q \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{q = 60}}$$

7. Wir verwenden die dritte Zeile des Pascal'schen Dreiecks und erhalten:

$$\left(x + x^{-1}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot x^{-1} + 3x \cdot x^{-2} + x^{-3} = \underline{\underline{x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}}$$