Training Grundwissen 7 – zu bearbeiten auf Mittwoch 20.3.24

Sämtliche Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen, damit sie etwas bringen!

1. Multipliziere aus und fasse zusammen:

   (a) $3\left(x-1+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=$

   (b) $\left(m^2+2\right)^3-6\left(m^2+1\right)^2=$

2. Benutze die Definitionen der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, um zu zeigen:

   (a) $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ (b) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

   Dabei sei α einer der beiden spitzen Winkel des Dreiecks.

3. Vereinfache soweit wie möglich:

   (a) $\frac{2x^2-4xy+2y^2}{x^2+x-xy-y}=$

   (b) $\frac{s^2+s-6}{s^2-s-2}=$

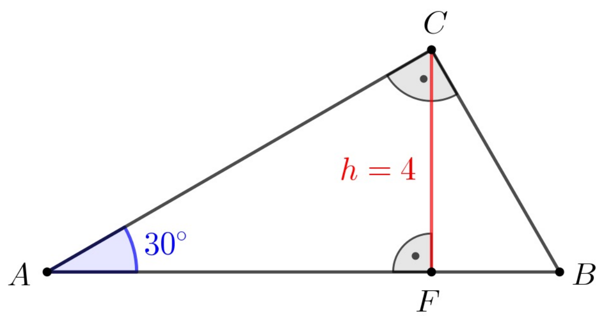
   (c) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}=$

4. Löse für $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\left|\frac{7}{x-3}\right|=\frac{5}{6}$ (b) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x+4}$

5. Berechne in der Figur rechts...

   (a) die Fläche des großen Dreiecks ΔABC,
   (b) dessen Umfang, sowie
   (c) das Verhältnis der Flächen der beiden Teildreiecke ΔAFC und ΔBFC.



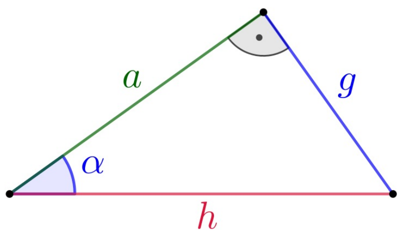
Lösungen

1. Ausmultiplizieren und zusammenfassen ergibt:

(a) $$3\left(x-1+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-1-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=3\cdot\left((x-1)^2-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2\right)=3\left(x^2-2x+1-\frac{4\cdot 6}{9}\right)$$
$$=3\left(x^2-2x+1-\frac{4\cdot 2}{3}\right)=3x^2-6x+3-8=\underline{\underline{3x^2-6x-5}}$$

(b) $$\left(m^2+2\right)^3-6\left(m^2+1\right)^2=m^6+3m^4\cdot 2+3m^2\cdot 4+8-6\left(m^4+2m^2+1\right)$$
$$=m^6+6m^4+12m^2+8-6m^4-12m^2-6=\underline{\underline{m^6+2}}$$

2. Nennen wir einen der beiden spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck α, so heißt die diesem Winkel gegenüberliegende Seite Gegenkathete g und die andere Seite, die am rechten Winkel und an α anliegt, Ankathete a. Die längste Seite ist die Hypotenuse h:



Nach dieser Namensgebung werden die vom Winkel α abhängigen Seitenverhältnisse Sinus, Cosinus und Tangens wie folgt definiert:

$$\sin(\alpha):=\frac{g}{h}\qquad\qquad \cos(\alpha):=\frac{a}{h}\qquad\qquad \tan(\alpha):=\frac{g}{a}$$

Aus diesen Definitionen folgern wir direkt:

(a) $$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}}=\frac{g}{h}\cdot\frac{h}{a}=\frac{g}{a}=\tan(\alpha)\qquad \text{q.e.d.}$$

(b) $$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=\left(\frac{g}{h}\right)^2+\left(\frac{a}{h}\right)^2=\frac{g^2+a^2}{h^2}=\frac{h^2}{h^2}=1\qquad \text{q.e.d.}$$

Dabei haben wir bei (b) den Satz des Pythagoras verwendet: $g^2+a^2=h^2$.

3. Wir versuchen jeweils zu faktorisieren und zu kürzen:

(a) $$\frac{2x^2-4xy+2y^2}{x^2+x-xy-y}=\frac{2(x^2-2xy+y^2)}{x(x+1)-y(x+1)}=\frac{2(x-y)^2}{(x-y)(x+1)}=\underline{\underline{\frac{2(x-y)}{x+1}}}$$

(b) $$\frac{s^2+s-6}{s^2-s-2}=\frac{(s+3)(s-2)}{(s+1)(s-2)}=\underline{\underline{\frac{s+3}{s+1}}}$$

(c) $$\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}=\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=\frac{\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=\frac{\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}\cdot\frac{1}{h}=\underline{\underline{-\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}}}$$

4. Bei den beiden Gleichungen erhalten wir:

(a) $\left|\dfrac{7}{x-3}\right| = \dfrac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad$ Fall 1: $\dfrac{7}{x-3} = \dfrac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \cdot 6 = 5(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \dfrac{57}{5}}$

Fall 2: $\dfrac{7}{x-3} = -\dfrac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \cdot 6 = -5(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \dfrac{27}{5}}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{27}{5}, \frac{57}{5}\right\}}}$$

(b) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{x+4} \quad \Rightarrow \quad 3(x-1)(x+4) - 2x(x+4) = x(x-1)$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 9x - 12 - 2x^2 - 8x = x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 6}} \quad \checkmark$$

5. (a) Mit ein bisschen Trigonometrie sind wir schnell am Ziel:

$$\overline{AC} = \frac{h}{\sin(30°)} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \tan(30°) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{32\sqrt{3}}{3}}}$$

(b) Vermutlich denkt man zuerst an den Satz des Pythagoras – und damit funktioniert die Aufgabe natürlich – aber man sollte beim Rechnen unter der Wurzel geschickt vorgehen, um große Zahlen zu vermeiden:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{8^2\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)}$$

$$= 8\sqrt{1 + \frac{3}{9}} = 8\sqrt{\frac{12}{9}} = 8\sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9}} = 16\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Viel einfacher geht es, wenn wir nochmals Trigonometrie verwenden:

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos(30°)} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Nun folgt für den Umfang:

$$U = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} + 8 = \frac{24\sqrt{3}}{3} + 8 = \underline{\underline{8 + 8\sqrt{3}}}$$

(c) Für die beiden Hypotenusenabschnitte finden wir:

$$\overline{AF} = \overline{AC} \cdot \cos(30°) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF} = \frac{16\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Und daraus folgt für das Flächenverhältnis:

$$A_{\Delta AFC} : A_{\Delta BFC} = \frac{A_{\Delta AFC}}{A_{\Delta BFC}} = \frac{\frac{\overline{AF} \cdot h}{2}}{\frac{\overline{BF} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = 3 = \underline{\underline{3:1}}$$