Wissensübersicht Mathematik (in ständigem Aufbau)

Klasse 155c / AGe / Stand: 2.11.24

Zahlenmengen und Zahlenwissen

- Beschreibung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (inkl. $\mathbb{N}_0$), der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- Beschreibung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch einen Zahlenstrahl (= reelle Achse)
- das kleine Einmaleins
- Primzahlen bis 41
- Quadratzahlen bis 20^2 inkl. 25^2
- $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$
- Potenzen kleiner Zahlen: bis 2^{10}, 3^5, 4^5, 5^4 und 6^3
- Dezimale Näherungswerte für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und π, zudem: $\pi \approx \frac{22}{7}$
- Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 sowie Produkte aus solchen Zahlen
- Primfaktorzerlegung $\Rightarrow$ Bildung von kgV und ggT
- Teilermenge einer Zahl

Algebraische Grundfertigkeiten

- Division = Multiplikation mit Kehrwert $\Rightarrow$ Auflösung von Doppelbrüchen
- Verknüpfungshierarchie korrekt anwenden ("Potenz vor Punkt vor Strich")
- Wissen um das Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ und $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Kenntnis und korrekte Anwendung der Potenzregeln
- Rechnen mit Brüchen: Kürzen, Erweitern, Multiplizieren, Dividieren
- Umrechnung zwischen Brüchen ganzer Zahlen und abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüchen
- Absolutbetrag reeller Zahlen
- Veranschaulichung aller Rechenregeln anhand einfacher Zahlen
- Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen mittels Distributivgesetz, binomischen Formeln und Pascal'schem Dreieck resp. Binomialkoeffizienten und Kuben-Formeln
- Faktorisierung von Termen mittels Ausklammern, binomische Formeln, Zweiklammeransatz
- Faktorisierung und Kürzen von Bruchtermen
- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Bruchtermen

Allgemeines zu Gleichungen

- Formaler Umgang bei der Bearbeitung von Gleichungen inkl. dem korrekten Setzen von Folge- und Äquivalenzpfeilen
- Notation von Lösungsmengen in aufzählender oder beschreibender Form (inkl. Kenntnis der leeren Menge)
- Gleichungen lösen, die neben der Unbekannten auch weitere Parameter enthalten
- Gleichungen mittels Substitution lösen

Allgemeines zu Funktionen

- Funktionen als eindeutige Abbildungen von einer Menge auf eine andere Menge begreifen
- Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und Wertebereich $\mathbb{W}_f$ verstehen und bei vorgegebener Funktion angeben
- Entstehung von Funktionsgraphen verstehen und den Graphen G_f als Menge von Punkten $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{D}_f\}$ begreifen
- Nullstellen (NS) einer Funktion (= Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$) als Schnittorte des Graphen mit der x-Achse verstehen
- Beurteilung der Existenz einer Umkehrfunktion f^{-1} und diese gegebenenfalls angeben
- Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist Spiegelung des G_f an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten w_{13}
- Verstehen, wie Funktionen allgemein durch 4 Parameter modifiziert werden können:
  - $f(x) \to f(x) + D$: Vertikale Verschiebung des G_f um D
  - $f(x) \to A \cdot f(x)$: Vertikale Streckung des G_f mit dem Faktor A von der x-Achse aus
  - $f(x) \to f(x - C)$: Horizontale Verschiebung des G_f um C nach rechts
  - $f(x) \to f(B \cdot x)$: Horizontale Stauchung des G_f mit dem Faktor B zur y-Achse hin

  Gleichzeitige Anwendung aller 4 Modifikationen: $f(x) \to A \cdot f\big(B\,(x - C)\big) + D$
- Spiegelung des G_f an der x-Achse: Multipliziere die ganze Funktion mit -1
- Spiegelung des G_f an der y-Achse: Ersetze alle x in der Funktionsgleichung durch $-x$

Lineare Gleichungen (LG), Funktionen (LF) und Gleichungssysteme (LGS)

- Allgemeine Form der LG in einer Unbekannten: $ax = b$ mit eindeutiger Lösung $x = \frac{b}{a}$
- Allgemeines Lösungsrezept für LGs in einer Unbekannten kennen und korrekt anwenden: Ausmultiplizieren, Separieren, Ausklammern, durch Klammer teilen
- LGs in zwei Unbekannten als Geradengleichungen auffassen und in impliziter Form $ax + by = c$ und expliziter Form $y = mx + q$ angeben
- Grafische Bedeutung der Parameter in $y = mx + q$ resp. in der LF $f(x) = mx + q$ kennen: Steigung m, y-Achsenabschnitt q
- Ansatz für Gerade mit Steigung m durch Punkt $P(x_P, y_P)$ kennen: $g(x) = m(x - x_P) + y_P$
- Schnittpunkte zweier Geraden ermitteln resp. Lösungsverfahren für 2x2-LGS kennen: Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Determinantenverfahren
- Lösbarkeit von 2x2-LGS beurteilen (Parallelität/Identität der Geraden, Determinante)

Quadratische Gleichungen (QG) und Funktionen (QF)

- Kenntnis der Normalform der QG $ax^2 + bx + c = 0$
- Beurteilung der Anzahl Lösungen mittels Diskriminante $D = b^2 - 4ac$
- Mitternachtsformel (MNF) $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ auswendig wissen
- Effizientes Lösen von QGs – wenn möglich durch Ausklammern, binomische Formeln oder Zweiklammeransatz (danach: Fallunterscheidung), ansonsten mittels MNF
- Quadratische Ergänzung als Technik kennen und in einfachen Beispielen anwenden können
- Lösen von Bruch- und Wurzelgleichungen, die auf lineare oder quadratische Gleichungen führen (inkl. Probe zur Überprüfung der Lösungen)
- Wissen, dass der Graph einer QG eine Parabel ist.
- In der Normalform (NF) $f(x) = ax^2 + bx + c$ die grafische Bedeutung der drei Parameter a (= Öffnung), b (= Steigung bei der Durchquerung der y-Achse) und c (= Höhe, auf der die y-Achse durchquert wird) bezüglich der zugehörigen Parabel kennen
- Ebenso bei der Nullstellenform (NSF) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:
  $a =$ Öffnung und $x_{1/2} =$ Nullstellen
- Ebenso bei der Scheitelpunktform (SPF) $f(x) = a(x - u)^2 + v$:
  $a =$ Öffnung, $u = x$-Koordinate des Scheitelpunktes und $v = y$-Koordinate des Scheitelpunktes
- Die Lösbarkeit einer QG $ax^2+bx+c = 0$ mit den Nullstellen (NS) der QF $f(x) = ax^2+bx+c$ in Verbindung bringen und somit die NS ermitteln, wenn diese existieren
- Bestimmung des Scheitelpunktes einer Parabel: x-Koordinate x_s ist arithmetische Mittel der NS, also $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ und lässt sich zudem aus $x_S = \frac{-b}{2a}$ (= Teil der MNF) berechnen, y-Koordinate ergibt sich durch einsetzen von x_S in Funktionsgleichung
- Wissen, dass $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in der MNF für die Abweichungen der NS von der x-Koordinate des Scheitelpunktes steht
- Umwandlung zwischen NF $f(x) = ax^2 + bx + c$, NSF $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ und SPF $f(x) = a(x - u)^2 + v$ beherrschen
- Wissen, dass die Parabel die x-Achse berührt, wenn die zugehörige QF mittels 2. (oder 1.) binomischer Formel faktorisiert werden kann ($f(x) = a(x - x_S)^2$)
- Wissen um die Symmetrie der QF und der zugehörigen Parabel bezüglich der x-Koordinate des Scheitelpunktes
- Schnittpunkte zwischen Parabeln oder Parabeln und Geraden ermitteln
- Funktionsbestimmung bei Vorgabe verschiedener Anforderungen an eine QF, inkl. der passenden Wahl des Funktionsansatzes und dem Einsetzen der weiteren Bedingungen zur Bestimmung fehlender Parameterwerte
- Bestimmung fehlender Parameter beim Legen von Tangenten an Parabeln durch Nullsetzen der Diskriminante der zugehörigen Schnittpunktgleichung; Ermittlung von Tangenten an Parabeln in Punkten auf der Parabel durch eben diese Methode
- Lösung von Optimierungsaufgaben, die auf quadratische Zielfunktionen führen, inkl. Unterscheidung von Zielfunktion und Nebenbedingungen

Geometrie in der Ebene inkl. Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

- Kreisformeln: $U = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$
- Dreiecksfläche: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$; im rechtwinkligen Dreieck: $A = \frac{k_1 k_2}{2}$ ($k_{1/2} =$ Katheten)
- Gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s$; Höhen unterteilen sich im Verhältnis $2 : 1$
- Zentrische Streckung inkl. Längen- und Flächenberechnungen mit dem Streckfaktor k
- Strahlensätze an parallelen Geraden, Arbeiten mit Längenverhältnissen
- Unterteilung einer Strecke in n gleiche Teilstrecken (Konstruktion)
- Kongruenz und Ähnlichkeit ebener Figuren
- Bei ähnlichen Figuren mittels gleicher Seitenverhältnisse oder Streckfaktor unbekannte Längen und Flächen bestimmen
- Satz des Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$), Thaleskreis, Höhensatz ($h^2 = pc$) und Kathetensatz ($a^2 = qc$, $b^2 = pc$)
- Pythagoreische Zahlentripel (Begriff und einfachste Beispiele)
- Definitionen der Winkelfunktionen $\sin(\alpha) = \frac{g}{h}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$ und $\tan(\alpha) = \frac{g}{a}$
- Winkelberechnung via Umkehrfunktionen $\arcsin(\frac{g}{h})$, $\arccos(\frac{a}{h})$ und $\arctan(\frac{g}{a})$
- Exakte Werte der Winkelfunktionen bei $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ und $90°$
- Trigonometrische Beziehungen: $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$, $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$, $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ und $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- Steigungswinkel und Steigung in %
- Weitere Begriffe: Höhenwinkel, Tiefenwinkel, (Karten-)Maßstab, reguläres n-Eck