# Übungen zur Akustik – Lösungen Serie 7

1. *Mathematische Übungen zu den Additionstheoremen*

   (a) Für die exakten Werte erhalten wir:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \sin 90^\circ \cos 45^\circ - \cos 90^\circ \sin 45^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\cos 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}}$$

   (b) Bei der ersten Identität kann man ganz direkt das Additionstheorem für den Cosinus verwenden:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 180^\circ \cdot \sin\alpha = -1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \cos\alpha = -\cos\alpha$$

   Bei der zweiten Identität können wir einfach beide Seiten entsprechend umformen:

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \sin 135^\circ \cos\alpha - \cos 135^\circ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha + \sin\alpha)$$

   Bei der dritten Identität ergibt sich wieder ganz direkt:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ \cdot \cos\alpha - \cos 90^\circ \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha - 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$$

   (c) **Zusatzaufgabe:** Betrachten wir zuerst die Sinusfunktion. Mit dem Additionstheorem, mit der Doppelwinkelformel und mit $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos(2\alpha) + \cos\alpha\sin(2\alpha) \\
&= \sin\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha \\
&= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = \underline{\underline{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}}
\end{aligned}$$

   Auf ähnliche Weise finden wir für $\cos(3\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos(2\alpha) - \sin\alpha\sin(2\alpha) \\
&= \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = \underline{\underline{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}}
\end{aligned}$$

   (d) **Zusatzaufgabe:** Wir starten mit $\tan(2\alpha)$ und formen kontinuierlich um:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \underline{\underline{\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}}$$

2. *Grundsätzliches zur Schwebung – eine Rekapitulation von Kapitel 7*

   (a) Die Einzeltöne haben praktisch dieselbe Tonhöhe. Um zwischen beispielsweise $440\,\mathrm{Hz}$ und $443\,\mathrm{Hz}$ einen Unterschied zu bemerken, muss ich über ein extrem geschärftes Gehör verfügen.

   Auch die Summe der beiden Sinustöne scheint dieselbe Tonhöhe aufzuweisen. Nun verändert sich aber andauernd die Lautstärke des Tons. Das ist das Schwebungsphänomen. Es ergibt sich ein Wah-Wah-Effekt, der umso langsamer abläuft, je näher die beiden ursprünglichen Töne beieinander liegen.

   (b) **Vorbemerkung:** Man muss zwischen der real "gehörten" Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{S}$ und der mathematischen Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{Env}$ unterscheiden. In Texten ist mit dem Ausdruck Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{S}$ jeweils die effektiv gehörte Frequenz des lauter und leiser Werdens gemeint. Der Aufgabentext benennt diese gehörte Schwebungsfrequenz mit $3.0\,\mathrm{Hz}$. Dreimal pro Sekunde wird der Ton laut und wieder leise.

   Die mathematische Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{Env}$ ist die Frequenz in der Sinus- oder Cosinusfunktion der Envelopenfunktion $A(t)$, deren Graph die schnelle Sinusschwingung einhüllt. Die Periode dieser Envelopenfunktion, also die mathematische Schwebungsperiode $T_\mathrm{Env}$, enthält einen Wellenberg und ein Wellental. Das bedeutet, innerhalb einer solchen Periode wird es tatsächlich zweimal laut und zweimal leise.

   **Somit ist die gehörte Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{S}$ doppelt so gross wie die Frequenz $f_\mathrm{Env}$ der Envelopenfunktion $A(t)$.**

   Schauen wir uns das auch noch im rechnerischen Formalismus an, der im Abschnitt 7.1 des Skripts beschrieben wird.

   Zunächst definieren wir die mittlere Frequenz $\bar{f}$ und den Frequenzunterschied $\Delta f$ aufgrund der Frequenzen $f_1$ und $f_2$ der beiden Einzeltöne:

   $$\text{Mittlere Frequenz:} \quad \bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} \qquad \text{und} \qquad \text{Frequenzunterschied:} \quad \Delta f = f_2 - f_1$$

   Damit lassen sich die Frequenzen der beiden Einzeltöne neu schreiben in der Form:

   $$f_1 = \bar{f} - \frac{\Delta f}{2} \qquad \text{und} \qquad f_2 = \bar{f} + \frac{\Delta f}{2}$$

   Aus jedem einzelnen Frequenzausdruck ($f_1$, $f_2$, $\bar{f}$ und $\Delta f$) kann durch Multiplikation mit $2\pi$ eine entsprechende Kreisfrequenz $\omega$ gewonnen werden ($\omega = 2\pi f$). Folglich gilt auch:

   $$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \text{sowie} \qquad \omega_1 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$$

   Mit diesen Ausdrücken für $\omega_1$ und $\omega_2$ können die Sinusfunktionen $p_1(t)$ und $p_2(t)$ der beiden Einzeltöne mittels Additionstheoreme zerlegt und neu zusammengefasst werden (vgl. S. 24 im Skript).

   Das Resultat ist eine Sinusfunktion mit Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ resp. Frequenz $\bar{f}$ (gross!), deren Amplitude $A(t)$ sich sinus- resp. cosinusartig verändert. Diese Envelopenfunktion $A(t)$ funktioniert mit der langsamen Kreisfrequenz $\omega_\mathrm{Env} = \frac{\Delta\omega}{2}$ resp. Frequenz $f_\mathrm{Env} = \frac{\Delta f}{2}$.

   Wie wir uns oben überlegt haben, ist die Frequenz der Envelope $A(t)$ aber nur halb so schnell wie die effektiv gehörte Schwebungsfrequenz. Damit wird diese gehörte Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{S}$ zu:

   $$\text{Gehörte Schwebungsfrequenz:} \qquad f_\mathrm{S} = 2 \cdot f_\mathrm{Env} = 2 \cdot \frac{\Delta f}{2} = \Delta f$$

   **Die gehörte Schwebungsfrequenz $f_\mathrm{S}$ entspricht genau dem Frequenzunterschied $\Delta f$.**

   Damit beantworten wir endlich die eigentliche Frage: Die andere Einzeltonfrequenz muss $3.0\,\mathrm{Hz}$ oberhalb oder unterhalb von $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$ liegen, also entweder $\underline{\underline{f_2 = 443\,\mathrm{Hz}}}$ oder $\underline{\underline{f_2 = 437\,\mathrm{Hz}}}$ betragen.

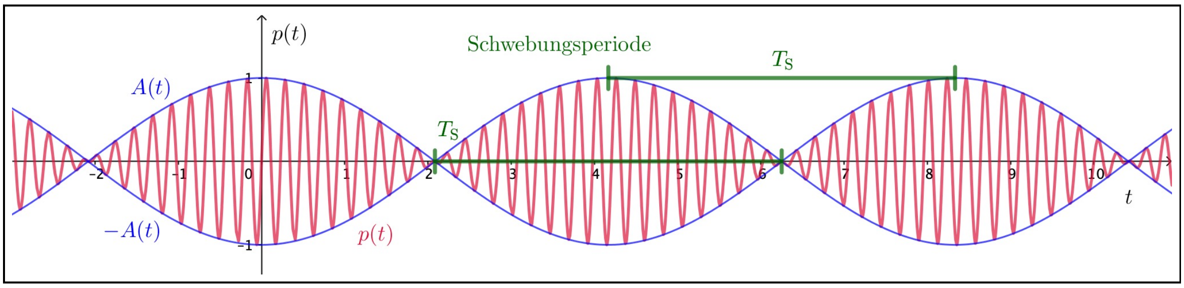
(c) **Interferenzphänomene** lassen sich überall dort beobachten, wo wir es mit **Wellen** zu tun haben. Das Wort Interferenz steht für **Überlagerung** oder **Überschneidung**. Mehrere Welle überlagern sich also. Die zugehörigen Wellenfunktionen werden **aufsummiert**. Man nennt dies eine **Superposition**.

Bei der Aufsummierung mehrerer Wellenfunktionen entstehen in der Regel neue Wellenfunktionen mit für die Überlagerung charakteristischen **Intensitätsmaxima** und -**minima**. Genau diese Beobachtung ist die **Interferenz**.

Die Schwebung ist ein gutes Beispiel hierfür: Die Zeitpunkte mit grosser Lautstärke sind Intensitätsmaxima, diejenigen mit verschwindender Lautstärke Intensitätsminima.

Diese Maxima und Minima lassen sich gut verstehen. Z.B. entsteht ein Intensitätsminimum bei der Überlagerung zweier Wellen dadurch, dass ein **Wellenberg** der einen Welle mit einem **Wellental** der anderen Welle zusammenfällt und die beiden sich gegenseitig aufheben. Dies nennt man eine **destruktive Interferenz**. Umgekehrt spricht man von einer **konstruktiven Interferenz**, wenn Wellenberge und Wellentäler beider Wellen jeweils zusammenfallen und sich echt aufaddieren.

(d) Hier das entsprechende Schalldruckmuster:




(e) Mit den Frequenzwerten $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 443\,\mathrm{Hz}$ erhalten wir für die Kreisfrequenzen:

$$\bar{\omega} = 2\pi\bar{f} = 2\pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2} = \pi(f_1 + f_2) = 883\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi(f_2 - f_1) = 2\pi \cdot 3\,\mathrm{Hz} = 6\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Damit notieren wir gemäss dem Resultat unten auf Seite 24 im Skript:

$$p(t) = \underbrace{2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin\left(\bar{\omega}\,t\right) = \underline{\underline{2\cos\left(3\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)\sin\left(883\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t\right)}}$$