Übungen zur Elektrizitätslehre – Lösungen Serie 5

1. *Verkabelung der Geräte im Haushalt*

   Unsere Geräte sind für eine Netzspannung von $230\,\mathrm{V}$ ausgelegt. Eine höhere oder eine niedrigere Spannung führt automatisch dazu, dass ein Gerät zu viel oder zu wenig Leistung abbekommt. Dies wird durch den Widerstand des Gerätes gesteuert: $P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$.
   Bei Mehrfachsteckern und Steckdosenleisten müssen die Geräte folglich parallel angeschlossen sein, denn nur so liegt über ihnen allen die Netzspannung an.

2. *Rechnungen in einfachen Serie- und Parallelschaltungen*

   (a) **Serielle Schaltung der drei Widerstände**

   i. Gesamtwiderstand: $R = R_1 + R_2 + R_3 = 220\,\Omega + 470\,\Omega + 680\,\Omega = 1370\,\Omega = \underline{\underline{1400\,\Omega}}$
   $\Rightarrow$ Stromstärke $I = \frac{U}{R} = \frac{9.0\,\mathrm{V}}{1370\,\Omega} = 0.006\,57\,\mathrm{A} = \underline{\underline{6.6\,\mathrm{mA}}}$ (in allen Widerständen gleich!)
   ii. Spannungen: $U_1 = R_1 \cdot I = 220\,\Omega \cdot 0.006\,57\,\mathrm{A} = 1.445\,\mathrm{V} = \underline{\underline{1.4\,\mathrm{V}}}$
   Ebenso: $U_2 = R_2 \cdot I = 3.088\,\mathrm{V} = \underline{\underline{3.1\,\mathrm{V}}}$ und $U_3 = R_3 \cdot I = 4.468\,\mathrm{V} = \underline{\underline{4.5\,\mathrm{V}}}$
   iii. Leistung total: $P_{\mathrm{el}} = U \cdot I = 9.0\,\mathrm{V} \cdot 0.006\,57\,\mathrm{A} = 0.0591\,\mathrm{W} = \underline{\underline{59\,\mathrm{mW}}}$
   In den Einzelwiderständen: $P_{\mathrm{el},1} = U_1 \cdot I = 1.445\,\mathrm{V} \cdot 0.006\,57\,\mathrm{A} = 0.009\,49\,\mathrm{W} = \underline{\underline{9.5\,\mathrm{mW}}}$
   Ebenso: $P_{\mathrm{el},2} = U_2 \cdot I = \underline{\underline{20\,\mathrm{mW}}}$ und $P_{\mathrm{el},3} = U_2 \cdot I = \underline{\underline{29\,\mathrm{mW}}}$

   Parallele Schaltung der drei Widerstände

   i. Gesamtwiderstand: $R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{220\,\Omega} + \frac{1}{470\,\Omega} + \frac{1}{680\,\Omega}\right)^{-1} = 123\,\Omega = \underline{\underline{120\,\Omega}}$
   $\Rightarrow$ Gesamtstromstärke: $I = \frac{U}{R} = \frac{9.0\,\mathrm{V}}{123\,\Omega} = 0.0732\,\mathrm{A} = \underline{\underline{73\,\mathrm{mA}}}$
   ii. Spannung: $U = 9\,\mathrm{V}$ (über allen Widerständen gleich!)
   Teilstromstärken: $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{9.0\,\mathrm{V}}{220\,\Omega} = 0.0409\,\mathrm{A} = \underline{\underline{41\,\mathrm{mA}}}$
   Ebenso: $I_2 = \frac{U}{R_2} = 0.0191\,\mathrm{A} = \underline{\underline{19\,\mathrm{mA}}}$ und $I_3 = \frac{U}{R_3} = 0.0132\,\mathrm{A} = \underline{\underline{13\,\mathrm{mA}}}$
   iii. Leistung total: $P_{\mathrm{el}} = U \cdot I = 9.0\,\mathrm{V} \cdot 0.0732\,\mathrm{A} = 0.659\,\mathrm{W} = \underline{\underline{660\,\mathrm{mW}}}$
   In den Einzelwiderständen: $P_{\mathrm{el},1} = U \cdot I_1 = 9.0\,\mathrm{V} \cdot 0.0409\,\mathrm{A} = 0.368\,\mathrm{W} = \underline{\underline{370\,\mathrm{mW}}}$
   Ebenso: $P_{\mathrm{el},2} = U \cdot I_2 = \underline{\underline{170\,\mathrm{mW}}}$ und $P_{\mathrm{el},3} = U \cdot I_3 = \underline{\underline{120\,\mathrm{mW}}}$

   (b) Für die Parallelschaltung der 8 Widerstände folgt:

   $$R_{\mathrm{total}} = \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^{-1} \Omega = 2^1\,\Omega = \underline{\underline{0.5\,\Omega}}$$

   Da für jeden einzelnen der Widerstände das Ohmsche Gesetz $U_i = R_i \cdot I_i$, wobei alle Spannungen U_i gleich gross sind, müssen die Stromstärken gerade im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen wie die Widerstände. Es gilt also:

   $$\underline{\underline{I_1 : I_2 : I_4 : I_8 : I_{16} : I_{32} : I_{64} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}}}$$

3. Es gilt: $R_1 + R_2 = 100$ und $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5}$. Dabei wissen wir, dass die Widerstände in Ω angegeben sind und demzufolge am Ende der Rechnung auch in dieser Einheit herauskommen.
   Umformung der ersten Gleichung: $R_2 = 100 - R_1$. Einsetzen in die zweite Gleichung und ausrechnen:

   $$\begin{aligned}
   & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} && \mid R_2 = 100 - R_1 \\
   \Rightarrow\quad & \frac{1}{R_1} - \frac{1}{100 - R_1} = \frac{1}{5} && \mid \cdot 5R_1(100 - R_1) \\
   \Leftrightarrow\quad & R_1^2 - 100 \cdot R_1 + 500 \cdot R_1 = 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \\
   \Leftrightarrow\quad & R_{1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 500}}{2 \cdot 1} && \mid \text{ausrechnen} \\
   & = 94.7 \text{ oder } 5.28 \quad (\text{in } \Omega)
   \end{aligned}$$

   R_1 und R_2 treten im anfänglichen Problem völlig symmetrisch auf. D.h., wir haben hier gerade ihre beiden Werte erhalten. Es gibt nichts mehr zurückeinzusetzen: $R_1 = \underline{\underline{94.7\,\Omega}}$ und $R_2 = \underline{\underline{5.28\,\Omega}}$ (oder umgekehrt).

4. *Messbereichserweiterung im Amperemeter*

   Die maximale Spannung über dem Messwerk beträgt in jedem Fall:

$$U = R_\mathrm{M} \cdot I_\mathrm{M} = 107.5\,\Omega \cdot 0.002\,000\,\mathrm{A} = 0.2150\,\mathrm{V}$$

   Diese Spannung über dem Messwerk entspricht aber auch gerade der Spannung über dem Zusatzwiderstand (Parallelschaltung!).

   Andererseits können wir aus den geforderten Gesamtströmen von $20.0\,\mathrm{mA}$ resp. $2\underline{0}\,\underline{0}\,\mathrm{mA}$ auf die Stromstärke durch den jeweiligen Zusatzwiderstand schliessen:

$$\begin{aligned} I_\mathrm{total} &= 20.0\,\mathrm{mA} \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{Z} = I_\mathrm{total} - I_\mathrm{M} = 20.0\,\mathrm{mA} - 2.000\,\mathrm{mA} = 18.0\,\mathrm{mA} \\ I_\mathrm{total} &= 2\underline{0}\,\underline{0}\,\mathrm{mA} \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{Z} = I_\mathrm{total} - I_\mathrm{M} = 2\underline{0}\,\underline{0}\,\mathrm{mA} - 2.000\,\mathrm{mA} = 198\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

   Daraus folgt für den jeweils erforderlichen Zusatzwiderstand:

$$R_\mathrm{Z} = \frac{U}{I_\mathrm{Z}} = \frac{0.2150\,\mathrm{V}}{0.0180\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{11.9\,\Omega}} \quad \text{resp.} \quad R_\mathrm{Z} = \frac{U}{I_\mathrm{Z}} = \frac{0.2150\,\mathrm{V}}{0.198\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{1.09\,\Omega}}$$

5. *Berechnungen in etwas grösseren Widerstandsschaltungen*

   Für die Schaltungen ergeben sich die folgenden Werte zu den einzelnen Widerständen:

Widerstand Nr.	1	2	3	4
Schaltung A: $R_\mathrm{total} = 830\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 3.6\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	0.36	0.65	0.79	1.19
Stromstärke I_i (mA)	3.6	3.6	3.6	3.6
Schaltung B: $R_\mathrm{total} = 186\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 16.2\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	1.07	1.93	1.20	1.80
Stromstärke I_i (mA)	10.7	10.7	5.5	5.5
Schaltung C: $R_\mathrm{total} = 43\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 69.4\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	3.00	3.00	3.00	3.00
Stromstärke I_i (mA)	30.0	16.7	13.6	9.1
Schaltung D: $R_\mathrm{total} = 176\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 17.0\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	1.70	1.30	1.30	1.30
Stromstärke I_i (mA)	17.0	7.2	5.9	3.9
Schaltung E: $R_\mathrm{total} = 196\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 15.3\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	0.98	0.98	2.02	2.02
Stromstärke I_i (mA)	9.8	5.5	9.2	6.1
Schaltung F: $R_\mathrm{total} = 529\,\Omega$, $I_\mathrm{total} = 5.7\,\mathrm{mA}$				
Spannung U_i (V)	0.57	0.56	0.56	1.87
Stromstärke I_i (mA)	5.7	3.1	2.6	5.7

6. *Rechnen in umfangreicheren Schaltungen*

(a) R_6 ersetzt R_1 und R_2 und R_7 ersetzt R_3 und R_4:

$$R_6 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 18.7\,\Omega \quad \text{und} \quad R_7 = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = 11.3\,\Omega$$

Diese beiden Ersatzwiderstände werden zusammen durch den Widerstand R_8 ersetzt (Serie):

$$R_8 = R_6 + R_7 = 18.7\,\Omega + 11.3\,\Omega = 30.0\,\Omega$$

Schliesslich ergibt sich der Gesamtwiderstand R durch Parallelschaltung von R_8 und R_5:

$$R = \left(\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{30.0\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega}\right)^{-1} = \underline{\underline{8.57\,\Omega}}$$

Damit errechnet sich der Gesamtstrom zu:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{96\,\text{V}}{8.57\,\Omega} = \underline{\underline{11.2\,\text{A}}}$$

Ab diesem Moment rechnet man sich wieder von aussen nach innen in die Schaltung hinein.
Die Spannung über dem Widerstand R_5 und dem Ersatzwiderstand R_8 ist gleich der Gesamtspannung ($U_5 = U_8 = U$). Daraus folgt für die Teilströme I_5 und I_8:

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{96\,\text{V}}{12\,\Omega} = \underline{\underline{8.0\,\text{A}}} \quad \text{und} \quad I_8 = \frac{U_8}{R_8} = \frac{96\,\text{V}}{30.0\,\Omega} = 3.2\,\text{A}$$

I_8 ist der Gesamtstrom durch die Parallelschaltungen von R_1 und R_2 resp. R_3 und R_4, also durch die Ersatzwiderstände R_6 und R_7 ($I_6 = I_7 = I_8$). Daraus folgt für die Spannung U_6 über R_6 resp. U_1 und U_2 über den beiden Widerständen R_1 und R_2:

$$U_1 = U_2 = U_6 = R_6 \cdot I_6 = 18.7\,\Omega \cdot 3.2\,\text{A} = \underline{\underline{59.8\,\text{V}}} \qquad U_3 = U_4 = U_7 = R_7 \cdot I_7 = 11.3\,\Omega \cdot 3.2\,\text{A} = \underline{\underline{36.2\,\text{V}}}$$

Mit diesen Werten erhält man schliesslich die Stromstärken in den einzelnen Widerständen:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{59.8\,\text{V}}{56\,\Omega} = \underline{\underline{1.1\,\text{A}}} \qquad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \underline{\underline{2.1\,\text{A}}} \qquad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \underline{\underline{2.4\,\text{A}}} \qquad I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \underline{\underline{0.8\,\text{A}}}$$

Übersicht zu allen Teilstromstärken und -spannungen:

Widerstandsname	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R
Wert (in Ω)	56	28	15	45	12	18.7	11.3	30.0	8.57
Spannung (in V)	59.8	59.8	36.2	36.2	96	59.8	36.2	96	96
Stromstärke (in A)	1.1	2.1	2.4	0.8	8.0	3.2	3.2	3.2	11.2

(b) R_6 = Serieschaltung (R_1, R_2), R_7 = Parallelschaltung (R_3, R_6), R_8 = Serieschaltung (R_6, R_7).
R = Gesamtwiderstand der Schaltung = parallele Zusammenfassung von R_5 und R_8.
Für die diversen Strom- und Spannungswerte erhält man:

Widerstandsname	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R
Wert (Ω)	56	28	15	45	12	84	12.7	57.7	9.9
Spannung (V)	2.30	1.15	3.45	12.20	15.65	3.45	3.45	15.65	15.65
Stromstärke (A)	0.041	0.041	0.230	0.271	1.30	0.041	0.271	0.271	1.57

(c) Am meisten Strom fliesst insgesamt, wenn der Gesamtwiderstand am geringsten ist. Dies ist bei der Parallelschaltung der Fall, weil der Widerstand einer Parallelschaltung kleiner ist als jeder einzelne in ihr enthaltene Widerstand. Umgekehrt hat die Serieschaltung sicher den grössten Gesamtwiderstand. Dann fliesst am wenigsten Strom. Dazwischen liegen die beiden Schaltungen mit den einzelnen Widerständen alleine, wobei bei R_1 alleine mehr Strom fliesst ($R_1 < R_2$). Für die Reihenfolge der Heizleistungen folgt also:

$$P_{\text{parallel}} > P_1 > P_2 > P_{\text{seriell}}$$

Für die kombinierten Schaltungen ergibt sich:

$$R_{\text{parallel}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 42.8\,\Omega \qquad \text{und} \qquad R_{\text{seriell}} = R_1 + R_2 = 180\,\Omega$$

Somit erhalten wir für die vier Heizstufen die Leistungen:

$$P_{\text{parallel}} = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R_{\text{parallel}}} = \frac{U^2}{R_{\text{parallel}}} = \frac{(230\,\text{V})^2}{42.8\,\Omega} = \underline{\underline{1236\,\text{W}}}$$

$$P_1 = \frac{(230\,\text{V})^2}{70\,\Omega} = \underline{\underline{756\,\text{W}}} \qquad P_2 = \frac{(230\,\text{V})^2}{110\,\Omega} = \underline{\underline{481\,\text{W}}} \qquad P_{\text{seriell}} = \frac{(230\,\text{V})^2}{180\,\Omega} = \underline{\underline{294\,\text{W}}}$$

(d) **Heizstufe 1:** Nur der $416\,\Omega$-Widerstand ist angehängt.

$\Rightarrow P_{\text{el},1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{(230\,\text{V})^2}{416\,\Omega} = \underline{\underline{127\,\text{W}}}$

Heizstufe 2: Serieschaltung des $169\,\Omega$- und des $86\,\Omega$-Widerstands.

$\Rightarrow R_2 = 169\,\Omega + 86\,\Omega = 255\,\Omega \Rightarrow P_{\text{el},2} = \frac{U^2}{R_2} = \frac{(230\,\text{V})^2}{255\,\Omega} = \underline{\underline{207\,\text{W}}}$

Heizstufe 3: Nur der $169\,\Omega$-Widerstand ist angehängt.

$\Rightarrow P_{\text{el},3} = \frac{U^2}{R_3} = \frac{(230\,\text{V})^2}{169\,\Omega} = \underline{\underline{313\,\text{W}}}$

Heizstufe 4: Nur der $86\,\Omega$-Widerstand ist angehängt.

$\Rightarrow P_{\text{el},4} = \frac{U^2}{R_4} = \frac{(230\,\text{V})^2}{86\,\Omega} = \underline{\underline{615\,\text{W}}}$

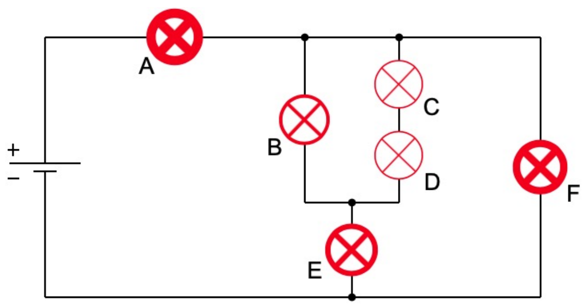
Heizstufe 5: Parallelschaltung des $169\,\Omega$- und des $86\,\Omega$-Widerstands.

$\Rightarrow R_5 = \left(\frac{1}{169\,\Omega} + \frac{1}{86\,\Omega}\right)^{-1} = 57\,\Omega \quad \Rightarrow \quad P_{\text{el},5} = \frac{U^2}{R_5} = \frac{(230\,\text{V})^2}{57\,\Omega} = \underline{\underline{928\,\text{W}}}$

Heizstufe 6: Parallelschaltung aller drei Widerstände.

$\Rightarrow R_6 = \left(\frac{1}{169\,\Omega} + \frac{1}{86\,\Omega} + \frac{1}{416\,\Omega}\right)^{-1} = 50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad P_{\text{el},6} = \frac{U^2}{R_6} = \frac{(230\,\text{V})^2}{50\,\Omega} = \underline{\underline{1060\,\text{W}}}$

(e) Es geht darum, die Verteilung des Gesamtstroms in die Teilströme richtig zu erkennen. Klar ist, dass der ganze Strom durch Lämpchen A fliesst. Dieses ist sicher das hellste.



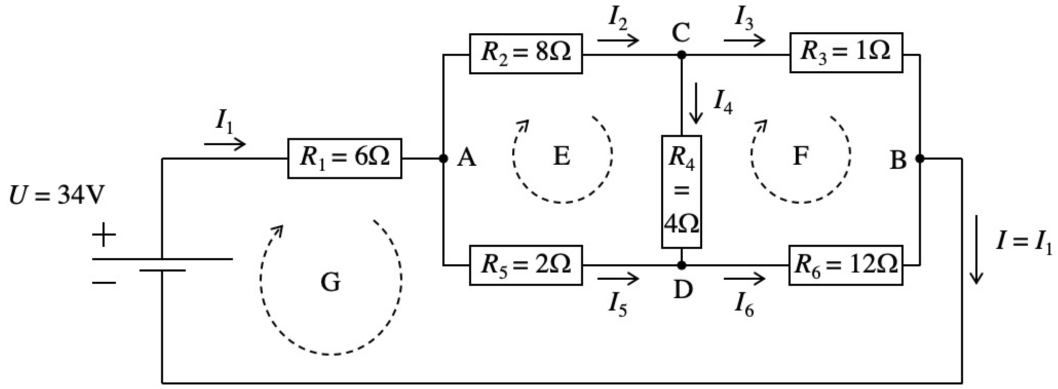
Danach teilt sich der Strom auf zwei Wege auf: Ein Teil des Stroms fliesst durch Kombination aus den Lämpchen B,C,D und E, der andere Teil durch das Lämpchen F. Da die Kombination aus B, C, D und E sicher einen grösseren Widerstand als das Lämpchen F aufweist (das Lämpchen E ist in Serie zum Rest geschaltet), wird mehr Strom durch das Lämpchen F fliessen als durch den anderen Weg. F ist somit am zweit hellsten.

Da Lämpchen E in Serie zur Kombination aus B, C, und D geschaltet ist, wird E vom ganzen Strom durch diesen Weg passiert. Es muss das dritt hellste Lämpchen sein.

Lämpchen B ist das viert hellste Lämpchen, da dieser Weg nur halb soviel elektrischen Widerstand aufweist wie der Weg über die beiden Lämpchen C und D. Letztere leuchten beide gleich schwach, da sie in Serie geschaltet sind und somit durch beide Lämpchen der gleiche Strom fliesst.

7. *Anwendungen der Kirchhoff'schen Gesetze*

(a) Tragen wir als Erstes Maschen- und Stromrichtungen ins Schaltschema ein:



Mit Maschen- und Knotenregel finden wir:

$$\begin{array}{r|rcl|} \mathrm{A}: & I_1 - I_2 - I_5 & = & 0 \\ \mathrm{C}: & I_2 - I_3 - I_4 & = & 0 \\ \mathrm{D}: & I_4 + I_5 - I_6 & = & 0 \\ \mathrm{E}: & R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_5 I_5 & = & 0 \\ \mathrm{F}: & R_3 I_3 - R_6 I_6 - R_4 I_4 & = & 0 \\ \mathrm{G}: & R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_6 I_6 & = & U \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{rcl} I_1 - I_2 - I_5 & = & 0 \\ I_2 - I_3 - I_4 & = & 0 \\ I_4 + I_5 - I_6 & = & 0 \\ 8\,I_2 + 4\,I_4 - 2\,I_5 & = & 0 \\ 1\,I_3 - 12\,I_6 - 4\,I_4 & = & 0 \\ 6\,I_1 + 2\,I_5 + 12\,I_6 & = & 34 \end{array}\right|$$

N.B.: Die Spannungsquelle sitzt in der Masche G. Geht die Maschenrichtung vom Minus- zum Pluspol durch die Quelle, so ist ihr Spannungswert eigentlich negativ in die Maschenregel einzubauen. Auf der anderen Seite der Gleichung wird er positiv:

$$\mathrm{G}: \quad U_1 + U_5 + U_6 + U = 6\,I_1 + 2\,I_5 + 12\,I_6 - 34 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6\,I_1 + 2\,I_5 + 12\,I_6 = 34$$

Die Auflösung dieses 6x6-Gleichungssystems gibt nun algebraisch einiges zu tun. Wir haben 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten I_1 bis I_6!

Zwischenbemerkung: Die Knotenregel zu Knoten B wäre $I_3 + I_6 - I_1 = 0$. Sie ist allerdings schon vollständig in den anderen drei Knotengleichungen enthalten:

$$I_3 + I_6 \overset{\mathrm{C\&D}}{=} I_2 - I_4 + I_4 + I_5 = I_2 + I_5 \overset{\mathrm{A}}{=} I_1$$

Zum Glück brauchen wir aber "nur" 6 Gleichungen, sodass dieser "Gleichungsverlust" kein Problem ist.

Dank der oberen drei Gleichungen lassen sich auf einen Schlag drei Stromstärken eliminieren (Einsetzungsverfahren). Ich löse die erste Gleichung nach I_1, die zweite nach I_3 und die dritte nach I_6 auf:

$$I_1 = I_2 + I_5 \qquad I_3 = I_2 - I_4 \qquad I_6 = I_4 + I_5$$

Setze ich diese Ausdrücke für I_1, I_3 und I_6 in die unteren drei Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$\left|\begin{array}{rcl} 8I_2 + 4I_4 - 2I_5 & = & 0 \\ I_2 - I_4 - 12(I_4 + I_5) - 4I_4 & = & 0 \\ 6(I_2 + I_5) + 2I_5 + 12(I_4 + I_5) & = & 34 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{rcl} 8I_2 + 4I_4 - 2I_5 & = & 0 \\ I_2 - 17I_4 - 12I_5 & = & 0 \\ 3I_2 + 6I_4 + 10I_5 & = & 17 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Nun eliminiere ich mit zweimaligem Additionsverfahren z.B. zuerst I_5:

$$\begin{array}{r|rcl|l} 6 \cdot ① - ②: & 47I_2 + 41I_4 & = & 0 & ④ \\ 5 \cdot ① + ③: & 43I_2 + 26I_4 & = & 17 & ⑤ \end{array} \quad \Rightarrow \quad 41 \cdot ⑤ - 26 \cdot ④: \quad 541 I_2 = 697 \quad \Leftrightarrow \quad I_2 = \frac{697}{541} \approx \underline{1.288}$$

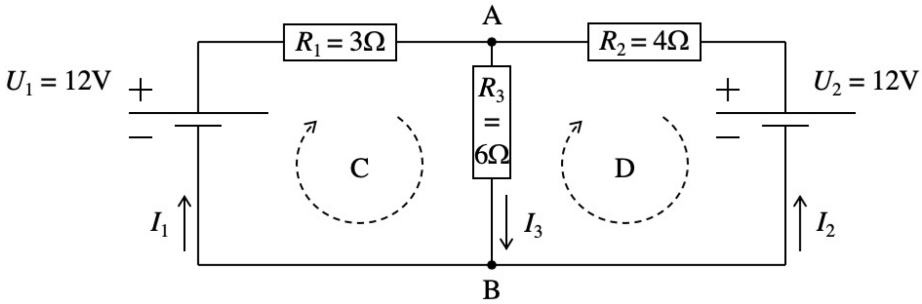
Die weiteren Stromstärken erhält man durch Zurückeinsetzen (TR):

$$I_1 = 3.49\,\mathrm{A} \quad I_2 = 1.29\,\mathrm{A} \quad I_3 = 2.77\,\mathrm{A} \quad I_4 = -1.48\,\mathrm{A} \quad I_5 = 2.20\,\mathrm{A} \quad I_6 = 0.72\,\mathrm{A}$$

Da der Strom $I_4 = \underline{\underline{-1.48\,\mathrm{A}}}$ negativ herauskommt, fliesst er entgegen der eingezeichneten Richtung, also von D nach C. Für die Spannung zwischen A und B erhalten wir:

$$U_{\mathrm{AB}} = U_5 + U_6 = R_5\,I_5 + R_6\,I_6 = 2\,\Omega \cdot 2.20\,\mathrm{A} + 12\,\Omega \cdot 0.72\,\mathrm{A} = \underline{\underline{13\,\mathrm{V}}}$$

(b) Die beiden Spannungsquellen scheinen im Schema in gewisser Weise zusammenzuarbeiten. Beide sorgen für Strom durch den $6\,\Omega$-Widerstand. Gibt es nun eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Maschen oder könnte man sie genau so gut trennen und die Stromstärke im $6\,\Omega$-Widerstand wäre dann einfach die Summe der beiden getrennten Teilströme? Die Rechnungen werden es zeigen.



$$\begin{array}{l|rcl|} \mathrm{A:} & I_1 + I_2 - I_3 & = & 0 \\ \mathrm{C:} & 3\,I_1 + 6\,I_3 & = & 12 \\ \mathrm{D:} & -4\,I_2 - 6\,I_3 & = & -12 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{|c|l} I_1 + I_2 - I_3 = 0 & ① \\ I_1 = 4 - 2I_3 & ② \\ I_2 = 3 - \frac{3}{2}\,I_3 & ③ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \text{② und ③ in ①:} \quad 4 - 2I_3 + 3 - \frac{3}{2}\,I_3 - I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = \frac{9}{2}\,I_3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I_3 = \frac{14}{9}}$$

Hier lassen sich die anderen beiden Ströme auch gut ohne TR berechnen:

$$I_1 = 4 - 2I_3 = 4 - 2 \cdot \frac{14}{9} = \frac{36-28}{9} = \underline{\frac{8}{9}} \qquad \text{und} \qquad I_2 = 3 - \frac{3}{2}\,I_3 = 3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{9} = 3 - \frac{7}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$$

Damit haben wir unsere Stromdaten beisammen: $\underline{\underline{I_1 = \frac{8}{9}\,\mathrm{A}}}$, $\underline{\underline{I_2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{A}}}$ und $\underline{\underline{I_3 = \frac{14}{9}\,\mathrm{A}}}$.

Tatsächlich beeinflussen sich die beiden Maschen! Allerdings zeigt das erhaltene Resultat genau das Gegenteil der obigen Vermutung: Die beiden Spannungsquellen arbeiten eher gegen- als miteinander! Würde man nämlich jeweils eine der beiden Maschen weglassen, so entstände in der verbleibenden Masche mit Sicherheit ein grösserer Strom als in der kombinierten Schaltung:

$$\frac{12\,\mathrm{V}}{9\,\Omega} = \frac{12}{9}\,\mathrm{A} > \frac{8}{9}\,\mathrm{A} \qquad \text{und} \qquad \frac{12\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = \frac{6}{5}\,\mathrm{A} > \frac{6}{9}\,\mathrm{A}$$

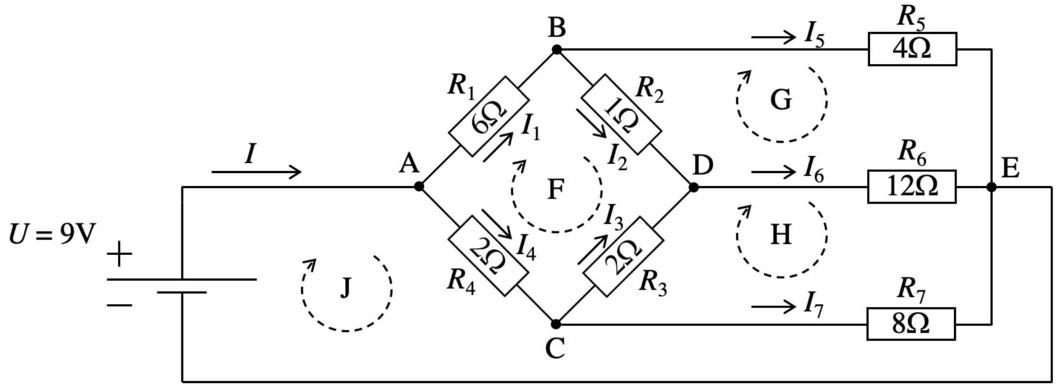
Grund dafür ist, dass der Zusatzstrom in R_3, der aufgrund der jeweils anderen Spannungsquelle fliesst, über R_3 eine grössere Spannung erzeugt. So wird in der kombinierten Schaltung über R_3 stets eine grössere Spannung herrschen als in der Schaltung mit nur einer Masche. Damit sind aber die Spannungen über R_1 und R_2 in der kombinierten Schaltung eben geringer als im voneinander getrennten Fall und es fliesst durch diese Widerstände weniger Strom.

Der Strom in R_3 ist allerdings schon grösser als bei einzelnen Maschen:

$$\frac{14}{9} > \frac{12}{9} \qquad \text{und} \qquad \frac{14}{9} = \frac{70}{45} > \frac{54}{45} = \frac{6}{5}$$

In diesem Sinne arbeiten die Spannungsquellen schon zusammen. Sie vergrössern schon die Stromstärke im Widerstand R_3, aber es ist eben nicht einfach die Summe aus den Stromstärken in den beiden voneinander losgelösten Fällen.

(c) Auch hier beginnen wir mit der Beschriftung des Schemas, wobei ich auf die Strombezeichnungen verzichte. Die Indizes sind dieselben wie diejenigen des zugehörigen Widerstandes:



Bei den Gleichungssystemen benötigen wir die Knoten A und E nicht:

$$
\begin{array}{r|rcl|c|rcl|}
\mathrm{B}: & I_1 - I_2 - I_5 & = & 0 & & I_1 - I_2 - I_5 & = & 0 \\
\mathrm{C}: & I_4 - I_3 - I_7 & = & 0 & & I_4 - I_3 - I_7 & = & 0 \\
\mathrm{D}: & I_2 + I_3 - I_6 & = & 0 & & I_2 + I_3 - I_6 & = & 0 \\
\mathrm{F}: & R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 & = & 0 & \Rightarrow & 6\,I_1 + 1\,I_2 - 2\,I_3 - 2\,I_4 & = & 0 \\
\mathrm{G}: & R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_2 I_2 & = & 0 & & 4\,I_5 - 12\,I_6 - 1\,I_2 & = & 0 \\
\mathrm{H}: & R_3 I_3 + R_6 I_6 - R_7 I_7 & = & 0 & & 2\,I_3 + 12\,I_6 - 8\,I_7 & = & 0 \\
\mathrm{J}: & R_4 I_4 + R_7 I_7 & = & U & & 2\,I_4 + 8\,I_7 & = & 9
\end{array}
$$

Die Auflösung dieses 7x7-Gleichungssystems überlasse ich fleissigen Leuten und zeige hier einfach die Rechenresultate:

$\underline{\underline{I_1 = 0.77\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_2 = -0.31\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_3 = 0.70\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_4 = 1.46\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_5 = 1.09\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_6 = 0.39\,\mathrm{A}}}$ $\underline{\underline{I_7 = 0.76\,\mathrm{A}}}$

Nur in Widerstand R_2 fliesst der Strom gegen die Pfeilrichtung. Dies ist nicht verwunderlich, wenn man den niederohmigen Stromweg A-C-D-B-E erkennt.