

# KERNPHYSIK

ein Physik-Skript für die Promotion 153

Zürich im August 2023

Alex Gertsch

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Zusammensetzung von Atomkernen</b>	<b>1</b>
1.1 Die Bausteine der Atomkerne . . . . .	1
1.2 Die Nuklidschreibweise ${}^A_ZX$ . . . . .	3
1.3 Das natürliche Isotopengemisch . . . . .	6
1.4 Erhaltungsgrößen bei Kernreaktionen . . . . .	7
<b>2 Energieumsätze bei Kernreaktionen</b>	<b>8</b>
2.1 Kernfusion in der Sonne . . . . .	9
2.2 Massenverlust und Energiefreisetzung bei Kernreaktionen . . . . .	10
2.3 Kernspaltung (Kernfission) . . . . .	14
2.4 Die technische Nutzung der Kernfusion – eine Option für die Zukunft? . . . . .	17
<b>3 Die Existenz von Atomkernen</b>	<b>18</b>
3.1 Bindungskräfte und -energien bei Kernbindungen . . . . .	18
3.2 Die Berechnung der Bindungsenergie von Atomkernen . . . . .	19
3.3 Die Existenz von Atomkernen . . . . .	20
3.4 Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon . . . . .	20
3.5 Exotherme Kernreaktionen . . . . .	23
<b>4 Radioaktive Zerfälle</b>	<b>24</b>
4.1 $\alpha$ -Zerfälle . . . . .	24
4.2 $\beta^-$ -Zerfälle . . . . .	25
4.3 $\beta^+$ -Zerfälle . . . . .	26
4.4 $\gamma$ -Zerfälle . . . . .	28
4.5 Zerfallsreihen . . . . .	28
<b>5 Zerfallsgesetz und Aktivität</b>	<b>30</b>
5.1 Das quantenmechanische Verhalten beim Zerfall . . . . .	30
5.2 Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ und das Zerfallsgesetz . . . . .	32
5.3 Die Aktivität einer radioaktiven Quelle . . . . .	35
<b>A Nuklidmassen und Periodensystem</b>	<b>36</b>
<b>B Bindungskräfte und -energien in bekannten Beispielen</b>	<b>42</b>
B.1 Bindungskräfte . . . . .	42
B.2 Bindungsenergien . . . . .	42
<b>C Das Tröpfchenmodell der Kernphysik</b>	<b>43</b>
<b>D Die mathematische Herleitung der Aktivität <math>A(t)</math></b>	<b>47</b>

# Kapitel 1

## Die Zusammensetzung von Atomkernen

Zu Beginn der Kernphysik müssen die Begriffe zur Beschreibung von Atomkernen definiert werden. Da wir dieses Vokabular später ständig verwenden werden, sollten wir es hinreichend präsent haben.

### 1.1 Die Bausteine der Atomkerne

Die Atomphysik nahm ihren Anfang um das Jahr 1900. Von grosser Bedeutung waren dabei verschiedene Teilchenentdeckungen, von welchen ich drei hervorheben möchte.

- Das **Elektron**  $e^-$  wurde im Jahre 1897 durch **Sir John Joseph Thomson** entdeckt. Thomson konnte nachweisen, dass eine Kathodenstrahlung aus einzelnen Teilchen, eben aus Elektronen besteht.<sup>1</sup> Da die Kathodenstrahlung einem Metall entsprang, musste man ab diesem Moment die Unteilbarkeit von Atomen fallen lassen.
- Die Existenz von **Atomkernen** wurde im Jahre 1911 durch **Sir Ernest Rutherford** anhand von Streuversuchen entdeckt. Rutherford schoss  $\alpha$ -Teilchen auf eine dünne Goldfolie. Die dabei beobachteten Ablenkungen liessen sich nur erklären, wenn man annahm, dass die gesamte Masse und die gesamte positive Ladung der Goldatome in kleinen Kernen konzentriert ist. Ab 1920 nannte Rutherford den Kern des Wasserstoff-Atoms ein **Proton**  $p$ , wusste aber noch nicht genau, wie sich die Atomkerne schwerer Elemente zusammensetzen. Er stellte diesbezüglich allerdings durchaus richtige Vermutungen an.
- Erst im Jahre 1932 gelang es **James Chadwick**, einem Schüler von Rutherford, die Existenz von **Neutronen**  $n$  experimentell nachzuweisen. Diese zweite Sorte von Kernbausteinen war in den 1920er Jahren von mehreren Physikern vorausgesagt worden, weil man damit die verschiedenen **Isotope** ein- und desselben Elementes elegant erklären konnte.

---

<sup>1</sup>Der Name des Elektrons leitet sich vom griechischen Ausdruck für Bernstein ab. Bernstein, das erstarrte Harz von Nadelbäumen, zeigt eine besonders hohe statische Elektrizität.

Teilchen	el. Ladung $q$	Masse $m$
Elektron $e^-$	$-e = -1.602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$9.109\,382 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx \frac{1}{2000} \text{ u}$
Proton $p$	$+e = +1.602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1.672\,622 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 1 \text{ u}$
Neutron $n$	0	$1.674\,927 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 1 \text{ u}$

Tabelle 1.1: Elektrische Ladungen und Massen von Elektron, Proton und Neutron.

Für die Massen ganzer Atome wird in der Regel die **Atommasseneinheit** u verwendet:

$$1 \text{ u} = 1.660\,539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Atome bestehen aus Elektronen  $e^-$  in der Hülle sowie aus Protonen  $p$  und Neutronen  $n$  im Kern.  $p$  und  $n$  nennt man deshalb auch **Nukleonen**, also "Kernteilchen".

Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde klar, dass sich Protonen und Neutronen wiederum aus kleineren Teilchen, den **Quarks**, zusammensetzen.<sup>2</sup> Beim Elektron hat man bis heute keinen Hinweis auf eine innere Struktur gefunden, weshalb man es, wie übrigens auch die Quarks, als (echtes) **Elementarteilchen** auffasst.<sup>3</sup>

### Die Unvorstellbarkeit der Grössenordnungen

Wenn man Atome und die darin vorkommenden Teilchen untersucht, so sollte man sich ab und zu die unvorstellbar kleinen Massstäbe vor Augen führen, über die man da spricht.

Ein einzelnes Atom besitzt, je nach Platz im Periodensystem, d.h. je nach Grösse der Elektronenhülle, einen Durchmesser von 0.1 nm bis 0.5 nm (1 nm = 1 Nanometer =  $10^{-9}$  m). Das sind 0.1 bis 0.5 Millionstel Millimeter!

Versuchen wir uns diese Grössenordnung klarzumachen: Ein Apfel besteht aus einer Unzahl von Atomen. Wäre ein einzelnes dieser Atome gerade so gross wie der ganze Apfel insgesamt, so wäre der vergrösserte Apfel so gross wie die Erde! Und nun schauen wir mal zum Fenster hinaus und stellen uns alles, was wir da an Landschaft sehen, aus Äpfeln aufgebaut vor. Sofort wird uns klar, wie unvorstellbar viele das sein müssten, wenn die ganze Erde daraus bestände.

Schauen wir "ins Atom" hinein: Ein Atomkern ist etwa 10 000- bis 100 000-mal kleiner als ein Atom. Kerndurchmesser betragen 0.5 fm bis 5 fm (1 fm = 1 Femtometer =  $10^{-15}$  m). Hätte der Kern die Grösse eines Tennisballs, so wäre der Durchmesser der Elektronenhülle zwischen 1 und 10 Kilometern gross! Und in dieser Hülle befinden sich nur gerade bis zu 100 verschwindend kleine Elektronen. D.h., der grösste Teil des Raums ist einfach leer, selbst wenn wir makroskopisch den Eindruck haben, dass Materie vorhanden ist!

<sup>2</sup>Proton und Neutron bestehen jeweils aus drei Quarks. Beim Proton handelt es sich um zwei **Up-Quarks** und ein **Down-Quark**, während es beim Neutron zwei Down- und ein Up-Quark sind.

<sup>3</sup>Von solchen die Materie aufbauenden Elementarteilchen kennt man bis heute nur gerade zwölf Stück (und ihre **Antiteilchen**): Sechs **Leptonen** (= "leichte Teilchen") auf der einen Seite. Dazu gehören das Elektron und seine zwei "schwereren Brüder" **Myon** und **Tau**, sowie drei **Neutrinos**. Auf der anderen Seite sechs **Quarks**: **Up**-, **Down**-, **Strange**-, **Charme**-, **Top**- und **Bottom-Quark**. Im **Standardmodell** der Teilchenphysik denkt man damit alle Elementarteilchen der Materie zu kennen. Allerdings gibt es im Universum nach wie vor unverständene Phänomene, welche vermutlich die Einführung weiterer Elementarteilchen erforderlich machen werden.

## 1.2 Die Nuklidschreibweise $\frac{A}{Z}X$

### **$Z$ , $N$ und $A$ : Drei Zahlen zur Beschreibung des Atomkerns**

Die **Kernladungs-, Protonen- oder Ordnungszahl  $Z$**  gibt an, wie stark ein Kern positiv geladen ist, also wie viele Protonen er enthält.  $Z$  bestimmt somit das chemische Element, zu welchem ein Atom mit diesem Kern gehört, und legt so dessen Position im Periodensystem fest (Ordnungszahl).

Die **Neutronenzahl  $N$**  gibt an, wie viele Neutronen ein Kern enthält.

Die **Massen- oder Nukleonenzahl  $A$**  gibt an, wie viele Nukleonen, also Protonen und Neutronen, ein Kern insgesamt enthält. Logischerweise gilt:

$$A = Z + N \quad (1.1)$$

Da Protonen und Neutronen je eine Masse von ungefähr  $1 \text{ u}$  besitzen und die Elektronenhülle im Vergleich dazu praktisch masselos ist, gibt  $A$  die **ungefähre Masse des Atomkerns resp. des ganzen Atoms in der Atommasseinheit  $\text{u}$**  an.

### **Was ist ein Nuklid resp. Isotop?**

Unter einem **Nuklid oder Isotop** verstehen wir ein **elektrisch neutrales Atom mit einer ganz bestimmten Kernzusammensetzung ( $Z, N$ )** von Protonen und Neutronen. Wir schreiben dafür:



Dabei ist  $X$  das im Periodensystem aufgeführte Symbol für das Element mit Ordnungszahl  $Z$ .

### **Anmerkungen zur Kernzusammensetzung und zur Nuklidschreibweise**

- Beide Schreibweisen, also  $\frac{235}{92}\text{U}$  und  $\text{U-235}$  werden als "Uran 235" ausgesprochen.
- In der Schreibweise  $\frac{235}{92}\text{U}$  ist eine Information doppelt vorhanden, denn zur Protonenzahl  $Z = 92$  gehört stets das Element Uran ( $\text{U}$ ), wie wir dem Periodensystem auf der letzten Seite des Anhangs **A** entnehmen.
- Bei vorgegebener Protonenzahl  $Z$ , also in den Atomkernen eines bestimmten **chemischen Elementes** kann die Neutronenzahl  $N$  immer noch variieren. D.h., nicht alle zu einem bestimmten Element gehörenden Atome sind gleich schwer. Wir sagen: "Von jedem Element gibt es verschiedene **Isotope**".
- **Die Begriffe "Nuklid" und "Isotop" verwenden wir völlig gleichbedeutend!**  
Zwar wird je nach Kontext eher der eine oder eher der andere bevorzugt, inhaltlich gibt es allerdings keinen Unterschied.

## Die Karlsruher Nuklidkarte

Abb. 1.1 zeigt die sogenannte **Karlsruher Nuklidkarte**. Sie listet alle bekannten Nuklide systematisch auf. Jedes Kästchen steht für ein Nuklid, gehört also zu einer bestimmten Kombination  $(Z, N)$ . Wie wir bemerken, gibt es enorm viele bezüglich ihrer  $Z$ - $N$ -Zusammensetzung verschiedene Kerne, weshalb in Abb. 1.1 von den einzelnen Kästchen kaum etwas zu erkennen ist.<sup>4</sup> Abb. 1.2 auf der folgenden Seite zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der Karte.

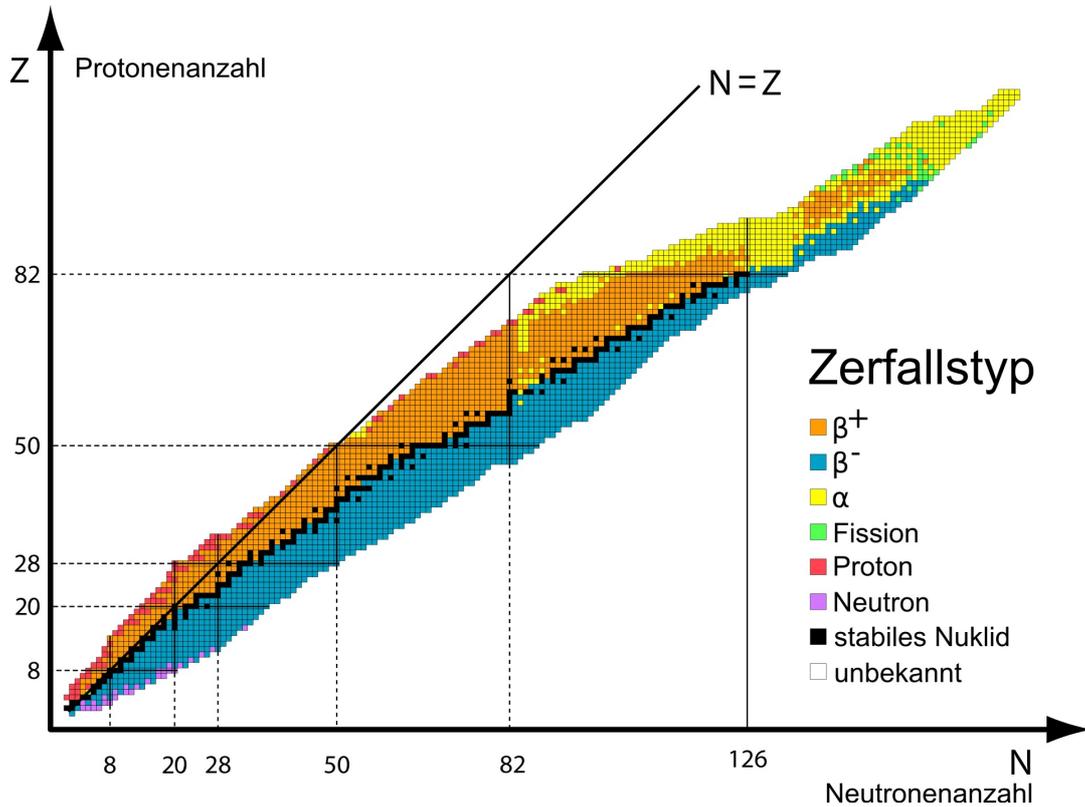


Abbildung 1.1: Die Karlsruher Nuklidkarte. An der Krümmung erkennt man, dass in grösseren stabilen Kernen deutlich mehr Neutronen als Protonen vorhanden sind.

In der Karte liegt die  $N$ -Achse horizontal, die  $Z$ -Achse vertikal. D.h., wenn man um eine Zeile nach oben wechselt, gelangt man zum nächsthöheren Element. Jede Zeile listet somit die Isotope eines einzelnen Elementes auf. Gehen wir in der Nuklidkarte einen Schritt nach rechts, so kommt einfach ein Neutron dazu, während das Element unverändert bleibt.

<sup>4</sup>Die 2015 erschienene 9. Auflage der Karlsruher Nuklidkarte listet Daten 118 Elementen mit total 3126 Nukliden auf.

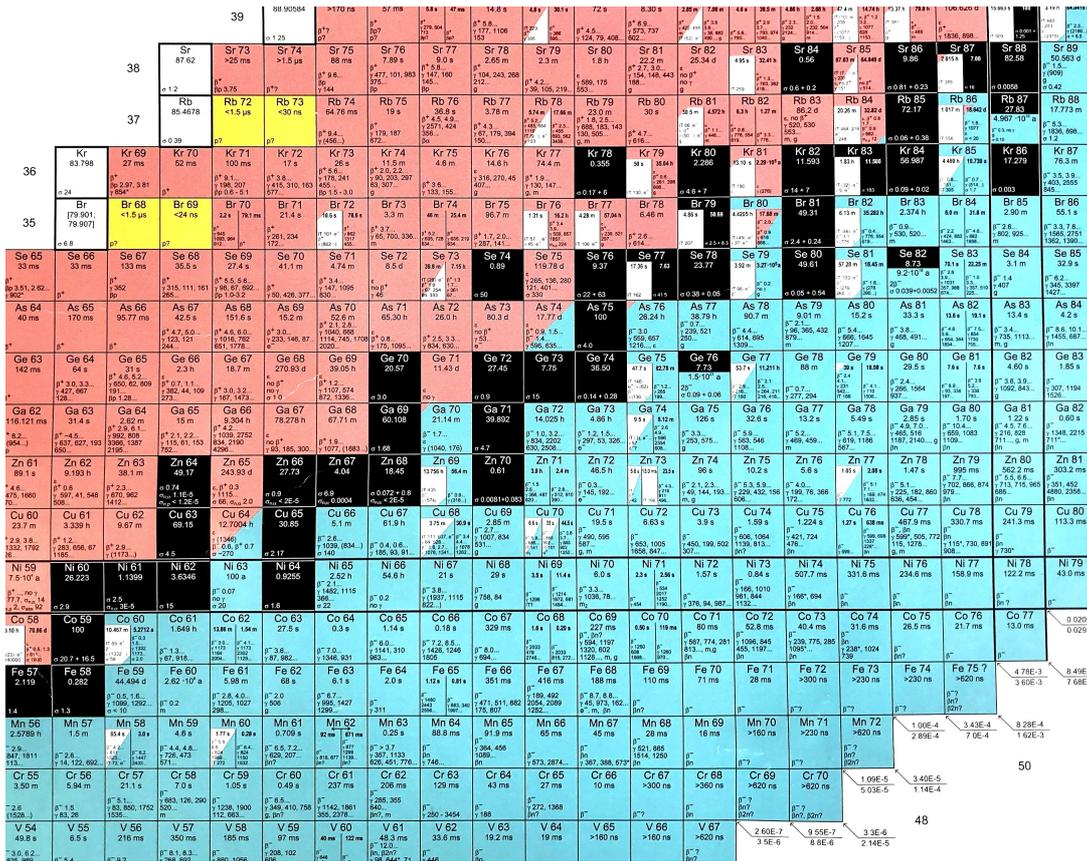


Abbildung 1.2: Ein Ausschnitt der Nuklidkarte. Schwarze Kästchen gehören zu stabilen Nukliden, alle anderen Nuklide sind instabil und zerfallen früher oder später.

Nur etwa 7% aller bekannten Nuklide sind **stabil**, bleiben also im Prinzip unendlich lange erhalten. Die zu stabilen Kernen gehörenden Kästchen sind in der Nuklidkarte schwarz eingefärbt. Es ist die Zusammensetzung aus Protonen und Neutronen, also die richtige Kombination von  $Z$  und  $N$ , die darüber entscheidet, ob ein Kern stabil ist. Bei jeder instabilen Kernzusammensetzung wird früher oder später spontan ein **radioaktiver Zerfall** stattfinden. Dabei gibt der Kern Energie in Form von Strahlung ab und wandelt sich in eine stabilere Form um. Es handelt sich nach dem Zerfall also um ein anderes Nuklid!

In Abb. 1.1 erkennt man an der leichten Rechtskrümmung des Gesamtbildes der Nuklidkarte, dass die stabilen Kombinationen von  $Z$  und  $N$  immer neutronenlastiger wird, je größere Kerne man anschaut.

In jedem Kästchen sind die Eigenschaften des entsprechenden Nuklids aufgeführt, welche in meistens extrem aufwändigen Experimenten erhoben wurden. Zu diesen Eigenschaften gehören z.B. die **Zerfallsart**, welche in der Regel bereits durch die Kästchenfarbe angezeigt wird, die **Halbwertszeit**  $T_{1/2}$  des Zerfalls, die beim Zerfall frei werdende **Strahlungsenergie** und bei stabilen Kernen auch die **relative Häufigkeit** im natürlichen Isotopengemisch. Auf all diese Begriffe werden wir noch genau eingehen.

Die Karlsruhe Nuklidkarte ist für die Kernphysik ein wichtiges Nachschlagewerk. Wir erfahren aus ihr in übersichtlicher Weise, "was es überhaupt gibt" und "was daraus via verschiedene Kernprozesse allenfalls werden kann". Ein klein wenig darf man die Bedeutung dieser Karte für die Kernphysik mit derjenigen des Periodensystems der Elemente für die Chemie vergleichen.

## 1.3 Das natürliche Isotopengemisch

Gehört ein Atom zu einem bestimmten chemischen Element  $X$ , so ist damit die Protonenzahl  $Z$  festgelegt, die Neutronenzahl  $N$  kann jedoch variieren. Wir sprechen von den **Isotopen** eines Elementes. Damit können Atome desselben Elementes ( $Z$  gleich) eine unterschiedliche Masse aufweisen ( $N$  verschieden).

Wie im Abschnitt 1.2 bereits erläutert wurde, wandeln sich nicht-stabile Kombinationen ( $Z, N$ ) über kurz oder lang unter Aussendung hochenergetischer Strahlung in stabilere Kerne um (radioaktive Zerfälle). In der Natur treffen wir deshalb fast ausschliesslich stabile Kerne an – die meisten instabilen Kerne sind in den 4.5 Milliarden Jahren Erdgeschichte bereits zerfallen. Im Anhang A sind sämtliche stabilen Nuklide mit ihren Massen aufgelistet.

Wie wir dieser **Tabelle der stabilen Nuklide** entnehmen können, gibt es bei den meisten Elementen mehrere stabile Isotope, also mehrere die Zeit überdauernde Varianten ( $Z, N$ ). Neben der in u angegebenen Masse  $m_A$  des elektrisch neutralen Atoms (= Nuklid) findet sich dort auch die **relative Häufigkeit (rel.H.)**, mit welcher das Isotop in der Natur vorkommt.<sup>5</sup> Die Zusammensetzung der in der Natur vorhandenen stabilen Isotope eines Elementes nennt man das **natürliche Isotopengemisch**.

Die Tabelle der stabilen Nuklide beinhaltet übrigens auch die Definition der **Atommaseneinheit**: 1 u ist der zwölfte Teil der Masse eines C-12-Nuklids. Die Masse dieses Nuklids beträgt also nicht per Zufall exakt 12 u!

### Die Masse das natürlichen Isotopengemischs am Beispiel Chlor

Beim Element 17, also bei Chlor (Cl), sind die beiden Isotope Cl-35 und Cl-37 stabil. D.h., es gibt lediglich zwei stabile Sorten von Chlor-Atomen mit Massen von etwa 35.0 u und 37.0 u.

Diese beiden Isotope treten mit unterschiedlichen relativen Häufigkeiten in der Natur auf. Könnte man aus einem Haufen Chlor-Atome eines herauspicken, so bestände eine Chance von 75.78 %, dass es sich um einen Vertreter des Cl-35-Isotops handelt. Nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 24.22 % wäre es ein Cl-37-Nuklid. Über den ganzen Haufen gerechnet ergibt sich ein mittlerer Wert für die Atommasse. Dieser berechnet sich wie eine **gewichtete Mittelung** der Einzelnuklidmassen, wobei die relativen Häufigkeiten die Funktion der Gewichte einnehmen (vgl. Notenberechnung bei verschiedenen gewichteten Prüfungen):

$$\begin{aligned} m_A(\text{Cl}) &= \text{rel.H.}_{(17}^{35}\text{Cl)} \cdot m_A(^{35}_{17}\text{Cl}) + \text{rel.H.}_{(17}^{37}\text{Cl)} \cdot m_A(^{37}_{17}\text{Cl}) \\ &= 0.7578 \cdot 34.969 \text{ u} + 0.2423 \cdot 36.966 \text{ u} = 35.453 \text{ u} \end{aligned}$$

Dies ist genau die im Periodensystem aufgeführte **Massenzahl**. Es handelt sich dabei also um die **Masse des natürlichen Isotopengemischs**, d.h. eine gewichtet gemittelte Atommasse neutraler Atome – und nur in dieser Form ist der Wert in der Chemie brauchbar.

---

<sup>5</sup>Diese relativen Häufigkeiten der Isotope eines Elementes sind immer die gleichen, weshalb man sie tabellieren kann. Sie haben ihren Ursprung in der Verschmelzung leichterer Kerne zu schwereren. Solche **Kernfusionen** finden in Sternen statt. Dabei ist eine Fusion je nach Nuklidsorte, welche entstehen soll, mehr oder weniger wahrscheinlich. Ist ein Stern ausgebrannt, d.h., sind nicht mehr genügend leichte Kerne für weitere Fusionsreaktionen vorhanden, so kann er, je nach Sternsorte, seine Masse in einem letzten spektakulären Abgang, in einer **Supernova**, ins Weltall schleudern. Aus dieser "Sternenasche" können sich dann neue Himmelskörper, wie z.B. Planeten und Monde, bilden. So entstand vor etwa 4.5 Milliarden Jahren auch unser Planet, die Erde.

## 1.4 Erhaltungsgrößen bei Kernreaktionen

An dieser Stelle sollten wir uns fragen, weshalb man in der Nuklidschreibweise  ${}^A_ZX$  ausgerechnet die Nukleonenzahl  $A$  und die Ordnungszahl  $Z$  angibt – und nicht etwa anstelle von  $A$  die Neutronenzahl  $N$ . Dafür gibt es einen guten Grund. Es handelt sich bei  $A$  und  $Z$  nämlich um **Erhaltungsgrößen**. Das sind Größen, die sich in ihrer Gesamtheit niemals verändern. Egal, welchen Prozess man untersucht, die Gesamtsumme über eine solche Größe ist vor und nach dem Prozess immer dieselbe. Als Beispiele für solche Erhaltungsgrößen kennen wir bereits die **Energie**  $E$ , aber auch die **elektrische Ladung**  $Q$ .<sup>6</sup>

Bei **Kernreaktionen** sind zwei Erhaltungsgrößen wichtig – eine altbekannte und eine neue:

**Ladungserhaltung:** Elektrische Ladung kann weder erzeugt, noch vernichtet werden. Die Summe über die elektrischen Ladungen bleibt bei allen uns bekannten Prozessen erhalten.

Da aber  $Z$  gerade die elektrische Ladung eines Kerns angibt, muss die Summe über die  $Z$ 's aller Kerne oder Teilchen vor und nach einer Kernreaktion die gleiche sein.

**Baryonenzahlerhaltung:** **Baryon** ist der Oberbegriff für alle Teilchen, welche sich aus drei **Quarks** zusammensetzen (vgl. Fussnoten 2 und 3 auf Seite 2). Dazu gehören auch Nukleonen, also Protonen und Neutronen.

Die Gesamtzahl Baryonen kann offenbar durch keinen Prozess verändert werden.

Daraus folgt, dass die Summe über die Nukleonenzahlen  $A$  aller Kerne und Teilchen vor und nach einer Kernreaktion die gleiche sein muss.

Aus diesen Erhaltungsgrößen ergeben sich Regeln für Kernreaktionen. Erlaubt sind nur Reaktionen, welche diese Erhaltungsregeln befolgen. Zwei Beispiele:



Vor und nach der Reaktion bleiben die Summen oben und unten gleich:

Nukleonenzahlen:  $2 + 3 = 4 + 1$     resp.     $235 + 1 = 144 + 90 + 2 \cdot 1$

Ladungszahlen:  $1 + 2 = 2 + 1$     resp.     $92 + 0 = 56 + 36 + 2 \cdot 0$

**Anmerkung:** Zwar verwenden wir bei der Notation von Kernreaktionen die Nuklidschreibweise, gemeint sind aber stets nur die Kerne. Die Elektronenhülle spielt dabei keine Rolle!

Nebenbei sehen wir hier die Nuklidschreibweise für einzelne Protonen und Neutronen:

${}^1_1\text{p}$     “Ein Proton ist 1-fach positiv geladen und ist 1 Baryon.”

${}^1_0\text{n}$     “Ein Neutron ist elektrisch neutral und ist 1 Baryon.”

---

<sup>6</sup>Bisher wurde auch die **Masse**  $m$  als Erhaltungsgröße angesehen. Die Kernphysik resp. die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) Albert Einsteins zeigen aber klar auf, dass dies nur in beschränktem Masse zutrifft. In der klassischen Physik, also in der Mechanik, der Wärmelehre oder der Elektrizitätslehre darf man durchaus von der Massenerhaltung ausgehen. Ebenso in der Chemie. In der modernen Physik hingegen muss man sich davon verabschieden. Bei Vorgängen in der Kern- und Teilchenphysik wird andauernd Masse vernichtet oder neu erzeugt.

## Kapitel 2

# Energieumsätze bei Kernreaktionen

Dieses Kapitel befasst sich mit einer ganz grundlegenden, vielleicht etwas seltsam anmutenden Eigenschaft von **Kernreaktionen**:

**Wird bei einer Kernreaktion Energie frei (exotherme Reaktion), so ist sie mit einem Massenverlust verbunden. Die Produkte der Reaktion sind leichter als die hinein gegebenen Edukte.**

Hier kommt die von **Albert Einstein** im Jahre 1905 formulierte **Spezielle Relativitätstheorie (SRT)** ins Spiel. Laut Einstein ist Masse eine Form von Energie. Das ist die physikalische Aussage der allgemein bekannten Gleichung  $E = m \cdot c^2$ . Geht Masse verloren, so muss demzufolge Energie freigesetzt werden. Genau auf diese Weise ist der bei einer exothermen Reaktion beobachtete Massenverlust  $\Delta M$  mit der frei werdenden Energie  $\Delta E$  verbunden:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2$$

Dabei ist  $c$  die **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum** – also etwa  $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ . Dieser riesige Wert, resp. das noch riesigere Quadrat davon, bewirkt, dass bereits ein einzelnes Kilogramm Masse im Prinzip eine gigantische Menge Energie enthält. Könnte man diese Energiequelle "anzapfen", so sollte das Problem der Energieversorgung ein für allemal gelöst sein. So zumindest dachte man um 1910, nachdem Einsteins Theorie in wissenschaftlichen Kreisen Fuss gefasst hatte...

In diesem Kapitel lernen wir also die Energieumsätze von Kernreaktionen zu berechnen. Neben dem Erwerb der reinen Rechenfähigkeit ist vor allem wichtig, dass wir die diesen Berechnungen zugrunde liegenden Überlegungen gründlich nachvollzogen und verstanden haben.

Da die meisten in Natur und technischer Anwendung vorkommenden Kernreaktionen **exotherm** sind, beschäftigen wir uns praktisch ausschliesslich mit diesen Reaktionstypen. Dazu gehören die **Kernfusion**, die **Kernspaltung**, aber auch **radioaktive Zerfälle**.

## 2.1 Kernfusion in der Sonne

Die Sonne besteht zu ca. 78 % aus Wasserstoff und zu ca. 20 % aus Helium und einigen schwereren Kernen. Wegen der Gravitation herrscht in ihrem Innern ein enormer Druck, welcher mit einer Temperatur von etwa 15 Mio. °C einhergeht (an der Sonnenoberfläche sind es immerhin noch 5500 °C). Diese ungeheure Temperatur im Sonneninneren hat zur Folge, dass wir nicht eigentlich von H- oder He-Atomen sprechen dürfen. Vielmehr handelt es sich um ein gasförmiges Gemisch aus Kernen und Elektronen. Die Atome sind wegen der immensen Energiedichte **komplett ionisiert**. Kein Elektron ist dauerhaft an einen Kern gebunden. Man bezeichnet diesen Zustand oft als vierten Aggregatzustand eines Stoffes und gibt ihm den Namen **Plasma**.

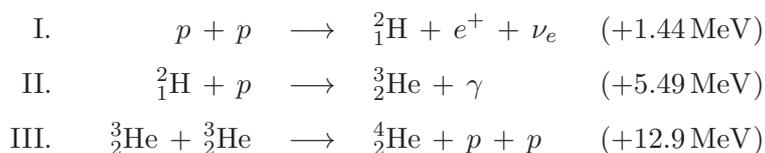
Im Plasma fliegen die Teilchen mit so grossen Geschwindigkeiten umher, dass selbst Kerne, die ja positiv geladen sind und auf kurze Distanz beträchtliche abstossende Coulombkräfte untereinander erfahren, aufeinander treffen können. Wenn dies passiert, kann es zur **Kernfusion** kommen. Die starke, aber extrem kurzreichweitige **Kernkraft** zwischen den Nukleonen wird erst aktiv, wenn sich diese Nukleonen fast schon "berühren". Dann aber dominiert sie über die Coulombkraft und verbindet die Nukleonen zu einem Kern. Dabei wird **Bindungsenergie** frei.

Das tönt in dieser Kürze recht einfach. Tatsächlich ist die Sonne aber ein sehr kompliziertes System von Prozessen in mehreren Schichten unterschiedlicher Temperatur. Die Astrophysik ist ständig daran, ihr Modell der Sonne zu überarbeiten und können bis heute das, was da in "unserem" Stern passiert, nicht mit allerletzter Bestimmtheit erklären.

Auf der anderen Seite wollen wir nicht vergessen, was bezüglich Fusionen in der Sonne als gesichert gilt. Z.B. weiss man sehr genau, welche Fusionsreaktionen in der Sonne ablaufen. Ein wichtiges Beispiel ist das nachfolgend beschriebene **Wasserstoffbrennen**, bei welchem über mehrere Prozesse hinweg Protonen zu Heliumkernen fusioniert werden.

### Wasserstoffbrennen (H → He)

Die in der Sonne entstehenden  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne werden nicht durch ein direktes Zusammentreffen von vier Protonen (= Wasserstoff-Kerne) gebildet. Dazu müssten vier Teilchen zum gleichen Zeitpunkt am selben Ort sein, was effektiv unmöglich ist. Vielmehr verläuft die Entstehung von Helium aus Wasserstoff in mehreren Teilschritten ab. Eine typische Abfolge ist die folgende Reaktionskette, die man **Proton-Proton-Zyklus** nennt (vgl. Abb. 2.1):



Über Zwischenschritte wie das Deuteron (so bezeichnet man den Kern des schweren Wasserstoffs  ${}^2_1\text{H}$ ) und den He-3-Kern entsteht aus vier Protonen ein He-4-Kern.

Im Verlauf der drei Teilprozesse werden diverse "Nebenprodukte" erzeugt (Positronen  $e^+$ , Neutrinos  $\nu_e$  und Gammastrahlung  $\gamma$ ), auf welche ich im Moment nicht weiter eingehe.<sup>1</sup> Ausserdem werden im letzten Teilprozess (III.) wieder zwei Protonen freigesetzt.

---

<sup>1</sup>Diese Teilchen sind allerdings für die Physik von grossem Interesse. Speziell die Neutrinos  $\nu_e$  haben es in sich. Diese extrem leichten Teilchen – für ihre Masse konnte bis heute nur eine ungefähre Obergrenze angegeben werden – wechselwirken praktisch mit keiner Materie und fliegen deshalb direkt aus dem Sonneninnern ins Weltall. Tatsächlich entstehen dort so viele Neutrinos, dass selbst hier auf der Erde noch jeder einzelne Quadratzentimeter einer gegen die Sonne ausgerichteten Fläche pro Sekunde von etwa 70 Milliarden solcher Teilchen durchflutet wird, ohne dass wir etwas davon bemerken!

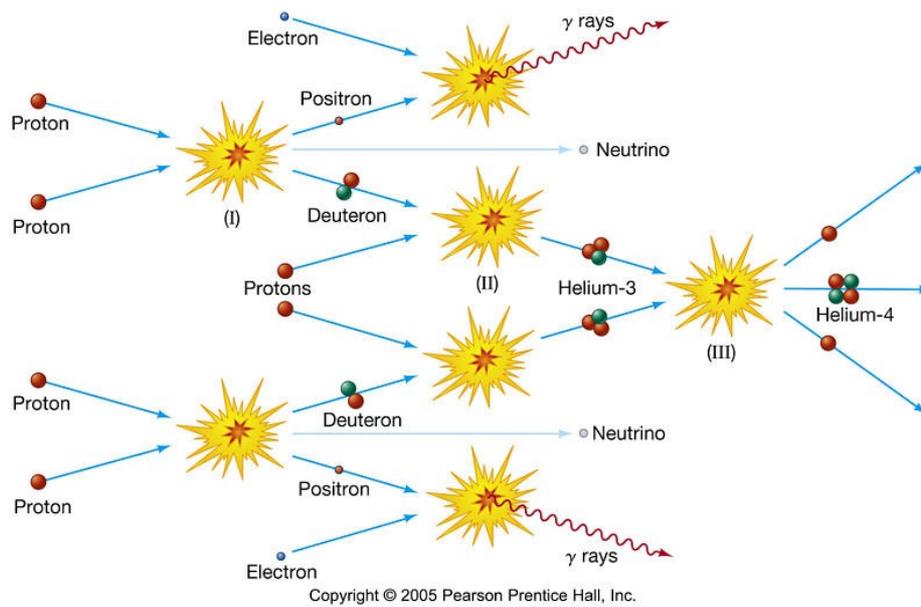


Abbildung 2.1: Eine Variante des Wasserstoffbrennens in der Sonne: der **Proton-Proton-Zyklus**. Über die Zwischenstufen “schwerer Wasserstoff” (Deuteron) H-2 und “leichtes Helium” He-3 entsteht aus vier einzelnen  $p$ 's ein He-4-Kern.

## 2.2 Massenverlust und Energiefreisetzung bei Kernreaktionen

Wird bei einer Kernreaktion Energie freigesetzt, so gibt es einen merkwürdigen Befund:

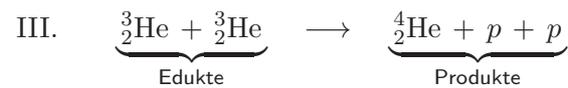
### Massenverlust bei exothermen Kernreaktionen

Ist eine Kernreaktion **exotherm**, so geht diese Freisetzung von Energie stets mit einem **Massenverlust**  $\Delta M$  einher. Bei jeder exothermen Kernreaktion sind die Produkte leichter als die Edukte! Es gilt also:

$$\Delta M := M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} > 0 \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet  $M_{\text{Edukte}}$  die Summe über die Massen aller Teilchen, welche in die Reaktion hinein gegeben werden (= **Edukte**), und  $M_{\text{Produkte}}$  die Summe über die Massen aller Teilchen, welche aus der Reaktion hervorgehen (= **Produkte**).

**Beispiel:** Der Prozess III. des auf Seite 9 beschriebenen Proton-Proton-Zyklus lautet:



Daraus ergibt sich für den Massenverlust  $\Delta M$  bei dieser Kernreaktion:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} \\ &= 2 \cdot m_{\text{Kern}}({}^3_2\text{He}) - m_{\text{Kern}}({}^4_2\text{He}) - 2 \cdot m_p \\ &= 2 \cdot (m_{\text{A}}({}^3_2\text{He}) - 2 \cdot m_e) - (m_{\text{A}}({}^4_2\text{He}) - 2 \cdot m_e) - 2 \cdot m_p \\ &= 2 \cdot m_{\text{A}}({}^3_2\text{He}) - 4 \cdot m_e - m_{\text{A}}({}^4_2\text{He}) + 2 \cdot m_e - 2 \cdot m_p \\ &= 2 \cdot m_{\text{A}}({}^3_2\text{He}) - m_{\text{A}}({}^4_2\text{He}) - 2 \cdot m_p - 2 \cdot m_e \\ &= (2 \cdot 3.016\,029\,3 - 4.002\,603\,3) \text{ u} - 2 \cdot m_p - 2 \cdot m_e \\ &= 2.292 \cdot 10^{-29} \text{ kg} > 0 \end{aligned}$$

### Anmerkungen zur Berechnung des Massenverlustes

- Für die Berechnung von  $\Delta M$  müssen die **Kernmassen**  $m_{\text{Kern}}$  verwendet werden! Im Anhang A sind allerdings **Nuklidmassen**  $m_{\text{A}}$  aufgelistet. Von diesen Massen elektrisch neutraler Atome müssen also jeweils die Massen der Elektronenhüllen abgezogen werden, um die reinen Kernmassen  $m_{\text{Kern}}$  zu erhalten:

$$m_{\text{Kern}}({}^A_Z\text{X}) = m_{\text{A}}({}^A_Z\text{X}) - Z \cdot m_e \quad (2.2)$$

- Für  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_e$  und u wurden die Werte von Seite 2 eingesetzt. (Im Konstantenspeicher des TI-30X Pro MultiView sind diese Werte bereits vorhanden.)
- Der Massenverlust bewegt sich im Bereich von etwa 1‰ einer Atommasseneinheit u. Er ist also gering im Vergleich zu der gesamten am Prozess beteiligten Masse!

Zur Berechnung solcher Massenverluste mussten die Nuklidmassen  $m_{\text{A}}$  sehr genau ausgemessen werden. Es ist nicht selbstverständlich, dass dies bei so kleinen Teilchen auf sieben oder noch mehr signifikante Ziffern genau möglich ist. Man sollte die wissenschaftliche Leistung, die hinter den Zahlen in Anhang A steckt, also nicht gering schätzen!

### Einsteins Masse-Energie-Äquivalenz

An dieser Stelle ist ein Input aus **Albert Einsteins spezieller Relativitätstheorie (SRT)** notwendig. Einstein hatte im Jahre 1905 entscheidende Gedanken über das Zusammenspiel von Raum und Zeit formuliert. Ihm zufolge sind Raum und Zeit nicht mehr voneinander unabhängige und absolute Rahmenbedingungen der physikalischen Abläufe, sondern sie sind miteinander in einer **vierdimensionalen Raumzeit** verbunden. Damit brach er mit den bis dahin uneingeschränkt geltenden Newton'schen Konzepten und löste in der Physik eine von mehreren in dieser Zeit aktuellen Revolutionen aus.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Die SRT heisst übrigens nicht **spezielle** Relativitätstheorie, weil sie so "speziell" wäre, sondern weil sie lediglich einen Spezialfall der später ebenfalls durch Einstein formulierten **Allgemeinen Relativitätstheorie (ART)** darstellt. In der ART liefert Einstein schliesslich die Anknüpfung der Materie an die vierdimensionale Raumzeit: Masse verändert die Eigenschaften der Raumzeit.

Ein Resultat der SRT ist die folgende Verknüpfung von Masse und Energie:

### Äquivalenz von Masse und Energie (Einstein, SRT)

Masse muss als eine Form von Energie aufgefasst werden. Die in einer Masse  $m$  enthaltene **Massenenergie**  $E$  beträgt:

$$E = m \cdot c^2 \quad (2.3)$$

Dabei ist  $c$  die **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum**. Sie beträgt:

$$c = 2.997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Weshalb Masse und Energie ausgerechnet über die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  miteinander verknüpft werden, wird in der SRT erklärt. Wir gehen an dieser Stelle nicht näher darauf ein.

### Die Berechnung der bei einem Kernprozess freigesetzten Energiemenge

Wir hatten weiter oben festgehalten: Bei jeder exothermen Kernreaktion wird ein Massenverlust  $\Delta M$  beobachtet. Genau dieser Massenverlust ist nun laut SRT an einen Energieverlust resp. an eine Energieabgabe oder -freisetzung  $\Delta E$  gekoppelt. Allgemein gilt:

### Massenverlust und freigesetzte Energiemenge

Geht bei einer Kernreaktion die Masse  $\Delta M$  verloren, so beträgt die dabei freigesetzte Energie  $\Delta E$  aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = (M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}}) \cdot c^2 \quad (2.4)$$

**Beispiel:** Im Prozess III. des Proton-Proton-Zyklus geht die Masse  $\Delta M = 2.292 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$  verloren. Aus dieser Massendifferenz  $\Delta M$  ergibt sich für die bei dieser Fusion freigesetzte Energiemenge  $\Delta E$ :

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 2.292 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot c^2 = 2.06 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 12.9 \text{ MeV}$$

Dies entspricht dem Wert, der auf der Seite 9 hinter der Reaktion angegeben wurde.

### Anmerkungen zur Berechnung der freigesetzten Energie

- Werden die Massendifferenz  $\Delta M$  in Kilogramm und die Lichtgeschwindigkeit in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  eingesetzt, so ergibt sich das Resultat in Joule (lauter SI-Einheiten).
- Die Energieangabe in Joule ist wegen der grossen negativen Zehnerpotenz recht unansehnlich. Deshalb gibt man solche Energieumsätze in einer deutlich kleineren Energieeinheit, dem **Megaelektronvolt** MeV, an:

$$1 \text{ MeV} = 1 \text{ Mega-elektron-Volt} = \underbrace{10^6}_{\text{Mega}} \cdot \underbrace{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}_e \cdot \underbrace{1 \text{ V}}_{\text{Volt}} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

## Was passiert mit der freigesetzten Energie?

Die freigesetzte Energie nehmen die Produkte der Reaktion in Form von **kinetischer Energie** (= Bewegungsenergie) mit.

Laut dem Rechenbeispiel scheint es sich um enorm kleine Energiemengen zu handeln ( $\Delta E_{\text{III}} = 2.06 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ ). Allerdings sind diese Energiemengen für derart kleine und somit leichte Teilchen gigantisch. Die aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen sind extrem schnell unterwegs und müssen in der mikroskopischen Welt als wahre Geschosse angesehen werden. Deshalb sagt man: bei Kernreaktionen entstehen **hochenergetische Teilchen** resp. eine **hochenergetische Strahlung**.<sup>3</sup>

Will man die aus einer Kernreaktion hervorgehende Energie verwenden, so muss man sich überlegen, wie man die kinetische Energie der Teilchen weiterverwenden kann.

**Ein Beispiel:** Im Reaktor eines Atomkraftwerkes werden geeignete sehr schwere Kerne gespalten (siehe Abschnitt 2.3). Dabei entstehen insbesondere hochenergetische Neutronen. Da sich das gesamte Spaltungsmaterial im Innern des Kernreaktors z.B. in einem Wasserbad befindet, werden diese Neutronen automatisch nach relativ kurzer Strecke auf Wassermoleküle treffen. Diese Moleküle übernehmen einen Grossteil der Bewegungsenergie der Neutronen. Das bedeutet aber einfach, dass das Wasser heiss wird. Mit dem aus dieser Hitze erzeugten Hochdruckdampf lässt sich schliesslich eine Turbine und dahinter ein Generator antreiben.

## Zusammenfassung: Das Prinzip der Energiefreisetzung bei Kernreaktionen

Halten wir kurz allgemein fest, was wir nun am Beispiel eines Kernfusionsprozesses Schritt für Schritt über die Energiefreisetzung bei Kernreaktionen erfahren haben:

### Energiefreisetzung bei Kernreaktionen

#### Bei jeder exothermen Kernreaktion geht Masse verloren!

*Der Massenverlust  $\Delta M$  ist der Unterschied zwischen der Gesamtmasse  $M_{\text{Edukte}}$  der Edukte und der Gesamtmasse  $M_{\text{Produkte}}$  der Produkte.*

*Gemäss der aus der SRT folgenden Äquivalenz von Masse und Energie entspricht die bei einer Kernreaktion freigesetzte Energie  $\Delta E$  genau der Massenenergie der verlorenen Masse  $\Delta M$ . Es gilt also:*

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = (M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}}) \cdot c^2$$

*Die freigesetzte Energie  $\Delta E$  liegt unmittelbar nach der Reaktion stets in Form von **kinetischer Energie** der Produkte vor!*

<sup>3</sup>Jede Strahlungsart besteht aus einer bestimmten Teilchensorte. Z.B. ist eine  $\alpha$ -Strahlung gleichbedeutend mit hochenergetischen Helium-4-Kernen,  $\beta^-$ -Strahlung besteht aus hochenergetischen Elektronen, sichtbares Licht setzt sich aus relativ niederenergetischen  $\gamma$ -Teilchen (Photonen) zusammen, bei einer Röntgenstrahlung handelt es sich umgekehrt um hochenergetische Photonen, etc.

## Energieumsätze bei verschiedenen Kernreaktionstypen

Die bei Kernreaktionen freigesetzten Energiemengen  $\Delta E$  sind relativ klar einzugrenzen. Den jeweiligen Energiebereich (engl. *range*) zu kennen kann bei der Berechnung einer solchen Energie als Absicherung des Resultates recht nützlich sein. Wir halten fest:

Kernfusion:	$0 \text{ MeV} < \Delta E < 20 \text{ MeV}$
Kernspaltung:	$150 \text{ MeV} < \Delta E < 220 \text{ MeV}$
Radioaktive Zerfälle:	$0 \text{ MeV} < \Delta E < 15 \text{ MeV}$

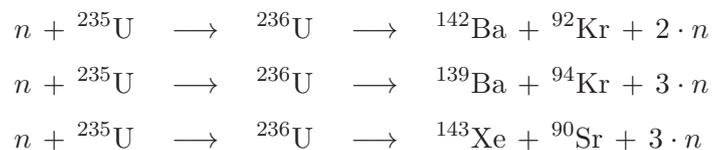
### 2.3 Kernspaltung (Kernfission)

Auch bei der **Spaltung** gewisser sehr schwerer Kerne wird Energie freigesetzt. Wird ein solcher Kern durch Zugabe eines Neutrons zur Aufspaltung in zwei mittelschwere **Tochterkerne** gebracht, so sind auch hier die Produkte insgesamt leichter als die Edukte.

Will man die Energieabgabe von Spaltungsprozessen technisch zur Energiegewinnung nutzen, so stellen sich die folgenden grundlegenden Fragen:

1. Wie kann man viele schwere Kerne gezielt dazu bringen, sich in kleinere Kerne aufzuspalten?
2. Gibt es in der Natur genügend spaltbares Material, dass sich eine technische Nutzung von Spaltungsprozessen lohnt?
3. Sind die Produkte der Spaltungsreaktion weiter verwertbar, oder muss man sie im Gegenteil sogar entsorgen?

Tatsächlich gibt es einige schwere Kerne, welche sich durch einen Beschuss mit anderen Teilchen zur Spaltung anregen lassen. Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang das **Uran-235-Isotop**. Trifft ein Neutron auf einen U-235-Kern, so wird es von diesem "verschluckt", was den Kern in einen instabilen Zwischenzustand  $^{236}\text{U}$  bringt. Dieser Zwischenzustand kann sich auf unterschiedliche Art in **2 Tochterkerne** und **2 bis 4 Neutronen** aufspalten, z.B.:



Durch solche Reaktionen, also durch den Neutronenbeschuss des Uran-235-Kerns, wurde die Kernspaltung 1938 von **Otto Hahn, Lise Meitner** und **Fritz Strassmann** entdeckt.

Die prominentesten sich selbst aufspaltenden Kerne sind neben dem  $^{236}\text{U}$ - der  $^{233}\text{U}$ - und der  $^{239}\text{Pu}$ -Kern.



Abbildung 2.2: Die Entdecker\*innen der Kernspaltung: Otto Hahn (1879 – 1968), Lise Meitner (1878 – 1968) und Fritz Strassmann (1902 – 1980).

Dass bei der Spaltung neben den Tochterkernen auch noch einzelne Neutronen freigesetzt werden, ermöglicht die Etablierung einer **Kettenreaktion**, welche in einem **Kernreaktor kontrolliert**, bei der Explosion einer **Atombombe unkontrolliert** abläuft. Die Kettenreaktionen lassen sich kontrollieren, indem man dafür sorgt, dass nicht alle frei werdenden Neutronen wieder auf einen Uran-235-Kern treffen, sondern zum Teil von anderem Material absorbiert werden. Das bewerkstelligt man in Kernreaktoren grob durch die Beigabe speziell gut Neutronen absorbierender Atomkerne ins Reaktorwasser, die Feinabstimmung geschieht dann durch das mehr oder weniger tiefe Einfahren sogenannter **Steuerstäbe** in den Reaktor. Je tiefer die Steuerstäbe eingefahren sind, umso mehr Neutronen werden absorbiert, können also keine weiteren Spaltungen mehr anregen.

Das Freiwerden weiterer Neutronen erstaunt nicht sonderlich, denn wie man aus der Rechtskurve der Nuklidkarte in Abb. 1.1 auf Seite 4 folgern kann, werden die Tochterkerne eines sich aufspaltenden schweren Kerns mit Sicherheit überproportional viele Neutronen enthalten. Abb. 2.3 zeigt schematisch den Ablauf der Spaltungskettenreaktion.

Zusammenfassend können wir auf die erste der drei Fragen von Seite 14 zur Antwort geben, dass es die Natur gerade so eingerichtet hat, dass eben eine Kettenreaktion und damit die Spaltung vieler Kerne tatsächlich möglich ist.

Der technische Aufwand dafür ist allerdings relativ hoch. Man muss dafür sorgen, dass ausreichend viele spaltbare Kerne nahe beieinander liegen, was eine **Anreicherung spaltbaren Materials** – am häufigsten eben U-235 – erforderlich macht. Ausserdem ist die Konstruktion einer Reaktoranlage zur Energieproduktion eine technische Herausforderung. Die Anlage muss enormen Sicherheitsanforderungen genügen. . .

Die Antwort auf die zweite Frage – “Existiert in der Natur genügend spaltbares Material?” – lautet “Ja” und ist gleichzeitig der Grund für die grosse Bedeutung des Elements Uran in der heutigen Zeit. Uran-235 und Uran-238 sind selber radioaktiv, haben aber derart grosse Halbwertzeiten, dass für die technische Nutzung immer noch ausreichende Erzmengen vorhanden sind, welche in Minen abgebaut werden. Hier schliesst sich allerdings eine ethische Frage an, denn die Bedingungen für Menschen in und die Umgebung um die Minen sind katastrophal – eine Tatsache, welcher momentan bei uns kaum Beachtung geschenkt wird! Können wir es vertreten, dass andere Menschen extremen Lebensbedingungen ausgesetzt sind, damit unsere Energieversorgung gewährleistet ist?

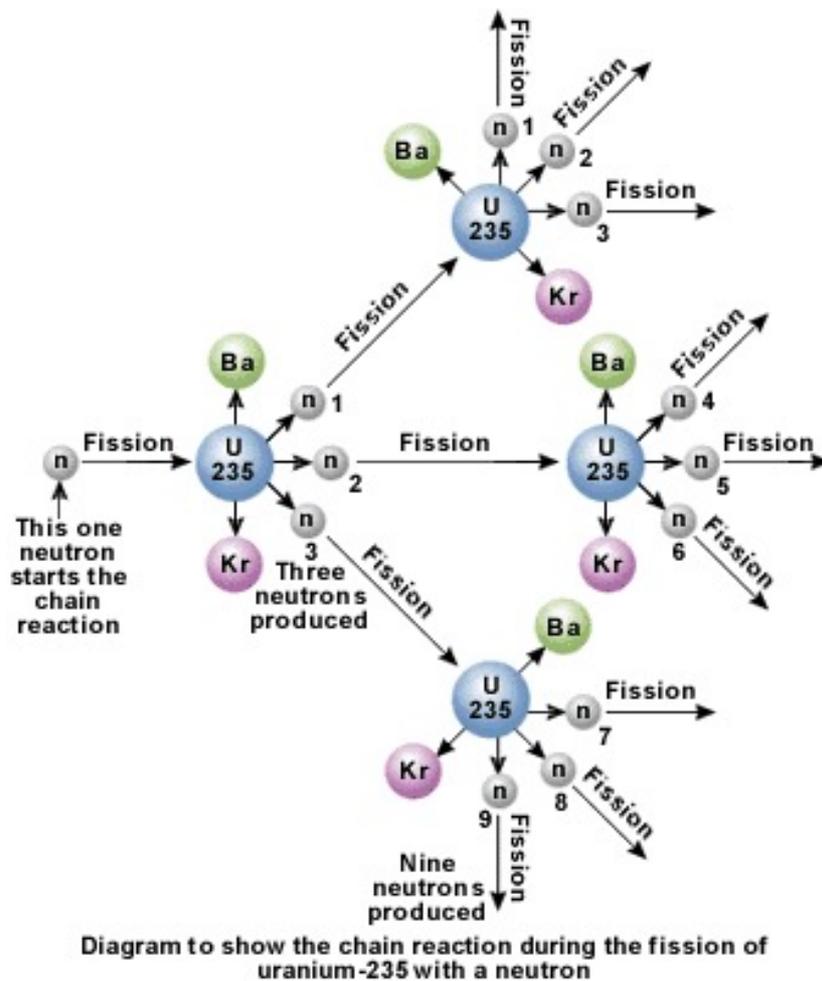


Abbildung 2.3: Die Kettenreaktion bei der Kernspaltung: Die frei werdenden Neutronen regen weitere Kerne zur Spaltung an.

Schliesslich noch zur letzten Frage von Seite 14: “Ausgebranntes” Kernspaltungsmaterial enthält immer noch einen grossen Anteil spaltbarer Kerne und könnte daher in **Wiederaufbereitungsanlagen** teilweise recycelt werden. Dabei müssen die Tochterkerne von den noch nicht gespaltenen Uran-Kernen getrennt werden. Mit dem ausgebrannten Material aus Schweizer Kernanlagen wird dies derzeit aber nicht gemacht.

Die bei der Kernspaltung entstehenden Tochterkerne sind instabil, sie werden also über kurz oder lang zerfallen und dabei hochenergetische Strahlung aussenden; wir sprechen von **radioaktiven Abfällen**. Die **Entsorgungsproblematik** solcher Abfälle ist bis heute ein Problem. Man müsste dieses Material aufgrund hoher Halbwertszeiten für Jahrtausende sicher von der Menschheit fernhalten können. Wer kann das zu 100 % garantieren? Auch hier schliesst sich also eine ethische Frage an die Energiegewinnung aus Kernspaltungsreaktionen an: Wie viel radioaktiven Atommüll wollen wir unserer Nachwelt zumuten? Dürfen wir ihr eine solche Verantwortung überhaupt zumuten, ohne dass sie etwas dazu zu sagen hat?

## 2.4 Die technische Nutzung der Kernfusion – eine Option für die Zukunft?

Gerne würde man neben der Kernspaltung auch die Kernfusion unserer Energiegewinnung zugänglich machen. Rohstoffprobleme gäbe es hier keine, denn Wasserstoff-Atome gibt es wirklich zuhauf auf der Erde (im Gegensatz zu den zur Kernspaltung benötigten Uran-Atomen), und – noch besser – auch die Entsorgungsproblematik radioaktiver Abfälle (vgl. Abschnitt 2.3) würde entfallen, denn die fusionierten Kerne wären stabil. Allerdings ist die Fusion rein technisch äusserst schwierig zu realisieren.

Das Problem liegt in der Aufrechterhaltung eines Plasmas, in welchem die Protonen bei extrem hohen Temperaturen aufeinanderprallen und fusionieren können. Dieses Plasma darf mit keinen anderen Körpern in Kontakt kommen, weil es selber eine Temperatur von mehreren Millionen Grad hat! Es soll deshalb in einem geeigneten Magnetfeld eingeschlossen werden.<sup>4</sup> Allerdings braucht die Anlage, ein sogenannter **Tokamak**<sup>5</sup>, in welcher man so ein Plasma festhalten kann, zurzeit noch wesentlich mehr Energie, als schlussendlich produziert wird.

In Abb. 2.4 zeigt das linke Bild den schematischen Aufbau eines Tokamaks. Auf dem rechten Bild wird das Innere einer solchen Anlage gezeigt, in welchem sich bei Betrieb das Plasma befindet.

Nach dem heutigen Stand der Dinge wird es noch mindestens 40 Jahre dauern, bis die Technik in der Lage ist, einen profitablen Fusionsreaktor zu betreiben. Dabei ist übrigens noch nicht klar, ob dieses Ziel überhaupt erreicht werden kann.

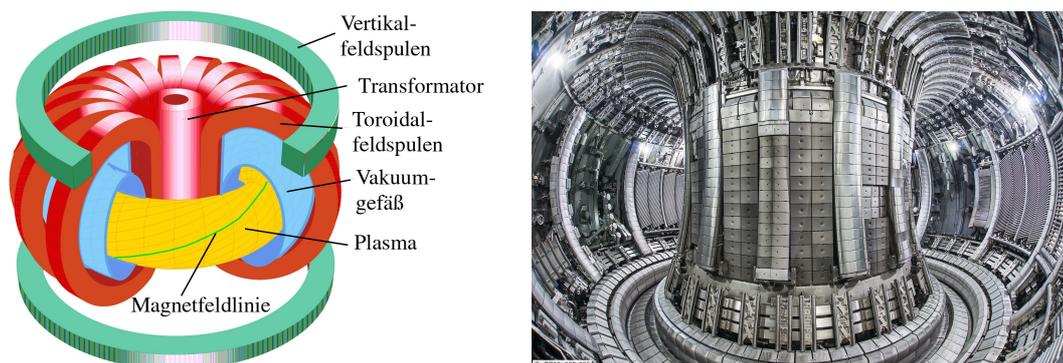


Abbildung 2.4: Das Tokamak-Projekt. In einem ringförmigen Plasma, welches durch ein Magnetfeld schwebend zusammengehalten wird, finden die Kernfusionen statt.

<sup>4</sup>Im geforderten Plasma gibt es praktisch nur noch einzelne Protonen und Elektronen, also lauter elektrisch geladene Teilchen, welche durch ein geeignetes Magnetfeld "gefangen gehalten" werden können.

<sup>5</sup>Das Wort Tokamak steht für **toroidale Kammer in Magnetspulen**, wobei die Endsilbe "mak" von der russischen Formulierung dieses Ausdrucks übernommen wird. Der Begriff **Torus** bezeichnet in der Geometrie die typische Form eines Donuts. Die Plasmakammer im Fusionsreaktor wäre toroidal, also donutförmig (siehe Abb. 2.4).

# Kapitel 3

## Die Existenz von Atomkernen

Mit den energetischen Betrachtungen in Kapitel 2 werden wir nun nachvollziehen, weshalb es in der Natur Atomkerne gibt, also "Pakete" von Protonen und Neutronen: Gehen diese Teilchen Kernbindungen ein, so wird Energie frei, die sich – wie bei chemischen Bindungen – als **Bindungsenergie**  $E_B$  auffassen lässt. Wollte man einen Kern in seine einzelnen Bestandteile zerlegen, so müsste man ihm dafür genau diese Bindungsenergie wieder zuführen.

Mit diesem Wissen werden wir anschliessend etwas allgemeiner nachvollziehen resp. besser verstehen, weshalb nur bei der Fusion **leichter** Atomkerne, der Spaltung **schwerer** Atomkerne und beim Zerfall **instabiler** Atomkerne Energie freigesetzt wird – weshalb diese Reaktionstypen also exotherm sind.

### 3.1 Bindungskräfte und -energien bei Kernbindungen

Das "Zusammenklumpen" von Materie lässt sich auf zwei Arten erklären: Einerseits muss es zwischen den Komponenten anziehende Kräfte geben, andererseits muss beim Eingehen der Bindung Energie freigesetzt werden, d.h., der gebundene Zustand ist energieärmer als der voneinander getrennte. Im Anhang B werden diese beiden Aspekte für gravitative und elektrische Bindungen beleuchtet. Dasselbe gilt aber auch für Kernbindungen:

**Kernkraft:** Protonen und Neutronen halten als Atomkerne zusammen, weil zwischen ihnen anziehende Kräfte vorhanden sind. Wir sprechen von der **Kernkraft**. Sie ist an eine Materieeigenschaft gekoppelt, die man als **Farbladung**<sup>1</sup> bezeichnet.<sup>2</sup> Allerdings lässt sich mit dieser Materieeigenschaft nicht so einfach umgehen wie beispielsweise mit elektrischen Ladungen oder mit Massen. Während nämlich Coulombkraft und Gravitation unendliche Reichweiten besitzen, ist die Kernkraft extrem **kurzreichweitig**. Ein Nukleon "spürt" das nächste praktisch erst dann, wenn es schon auf ihm drauf sitzt. Das macht die Sache sehr kompliziert und hat zur Konsequenz, dass es zur Berechnung von Kernkräften keine so einfache Formel gibt, wie dies bei Gravitation und Coulombkraft der Fall ist.

**Konsequenz:** Wir sprechen zwar von Kernkräften und machen sie für den Zusammenhalt der Kerne verantwortlich, es lassen sich damit aber keine Berechnungen anstellen.

---

<sup>1</sup>Die Teilchenphysik bezeichnet die Kernkraft in der Regel als **starke Wechselwirkung**, weil sie nicht nur für den Zusammenhalt von Atomkernen, sondern bereits für die Existenz der Protonen und Neutronen selber verantwortlich ist. Diese besitzen nämlich selber wieder eine innere Struktur, bestehend aus sogenannten **Quarks** (vgl. Fussnote 3 auf Seite 2). Es sind diese Quarks, welche die verschiedenen Farbladungen tragen.

<sup>2</sup>Vgl.: Bei der Gravitation ist die erzeugende Materieeigenschaft die Masse, bei der elektrischen Kraft ist es die Ladung. Gravitation:  $F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ , Coulombkraft:  $F_{el} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ .

**Kernenergie:** Die Nukleonen werden als Kern zusammengehalten, weil sie in diesem gebundenen Zustand weniger **Kernenergie** besitzen als im freien Zustand voneinander losgelöster Protonen und Neutronen. Diese Kernenergie ist als **potentielle Energie** zu verstehen, denn es ist eine Energieform, welche von der **gegenseitigen Lage mehrerer Teilchen** mit einer bestimmten Materieeigenschaft (Farbladung) abhängt.

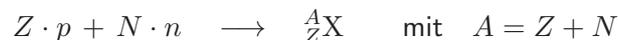
Nukleonen verbinden sich zu Atomkernen, weil sie dabei Kern- resp. Bindungsenergie abgeben können. Deshalb existieren Atomkerne! Wollte man irgendeinen Kern wieder in seine Einzelteile, also in Protonen und Neutronen, zerlegen, so müsste man ihm dafür zwangsläufig Energie zuführen!<sup>3</sup>

Mit dieser Idee der Kernenergie lassen sich konkrete Berechnungen durchführen, so wie wir es im Abschnitt 2.1 gesehen haben. Ausserdem lässt sich damit allgemein nachvollziehen, weshalb Atomkerne überhaupt existieren, weshalb also Nukleonen zu Atomkernen "zusammenklumpen".

### 3.2 Die Berechnung der Bindungsenergie von Atomkernen

Die Bildung eines grösseren Atomkerns aus seinen einzelnen Bestandteilen erfolgt nicht auf einen Schlag. Vielmehr braucht es dazu ein ganze Reaktionskette. Als Beispiel dafür können wir den auf den Seiten 9f und in Abb. 2.1 beschriebenen Proton-Proton-Zyklus betrachten: In mehreren Schritten entsteht aus vier Protonen schliesslich ein He-4-Kern.

Auch wenn es den direkten Prozess, bei dem  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen zu einem einzigen Atomkern  ${}^A_ZX$  fusionieren, in der Realität nicht gibt, können wir ihn uns **virtuell** vorstellen. Die zugehörige Reaktionsgleichung lautet:



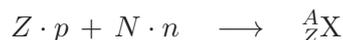
Wie bei jeder anderen Kernreaktion, so können wir auch hier aus Gleichung (2.4) die frei werdende Energie berechnen:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_{\text{Kern}}({}^A_ZX)] \cdot c^2$$

Diese Energiemenge wird **Bindungsenergie**  $E_B$  des Kerns  ${}^A_ZX$  genannt. Es ist die Energiemenge, die insgesamt freigesetzt würde, wenn man über alle Teilschritte von den voneinander losgelösten  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen bis zum fertigen  ${}^A_ZX$ -Kern summieren würde. Den dabei total anfallenden Massenverlust  $\Delta M$  bezeichnet man als **Massendefekt**  $\Delta M$  des Kerns  ${}^A_ZX$ . Halten wir fest:

#### Die Bindungsenergie $E_B$ eines Atomkerns

Die **Bindungsenergie**  $E_B$  eines Atomkerns  ${}^A_ZX$  ist die Energiemenge  $\Delta E$ , die frei würde, wenn man diesen Kern in einer einzigen Kernreaktion aus der entsprechenden Anzahl Protonen und Neutronen zusammensetzen könnte:

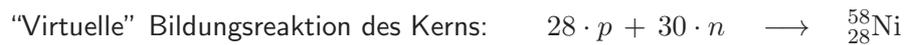


$$\Rightarrow E_B = \Delta E = \Delta M \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_{\text{Kern}}({}^A_ZX)] \cdot c^2$$

Der bei dieser Reaktion eintretende Massenverlust  $\Delta M$  wird als **Massendefekt** des Kerns  ${}^A_ZX$  bezeichnet.

<sup>3</sup>So wie die Auftrennung jeder chemischen Bindung in einzelne Atome oder das Loslösen der Elektronen von einem Atom (Ionisierung) garantiert Energie erfordert.

### Beispiel: Die Bindungsenergie beim Nickel-58-Nuklid (vgl. Abb. 3.1)



Daraus ergibt sich für den Massendefekt des Ni-58-Kerns:

$$\begin{aligned}\Delta M &= M_{\text{Edukte}} - M_{\text{Produkte}} = 28 \cdot m_p + 30 \cdot m_n - m_{\text{Kern}}({}_{28}^{58}\text{Ni}) \\ &= 28 \cdot m_p + 30 \cdot m_n - (m_{\text{A}}({}_{28}^{58}\text{Ni}) - 28 \cdot m_e) \\ &= 28 \cdot m_p + 30 \cdot m_n - m_{\text{A}}({}_{28}^{58}\text{Ni}) + 28 \cdot m_e \\ &= 28 \cdot m_p + 30 \cdot m_n - 57.935\,348 \text{ u} + 28 \cdot m_e = 9.028 \cdot 10^{-28} \text{ kg}\end{aligned}$$

Und somit beträgt die Bindungsenergie des Ni-58-Kerns:

$$E_{\text{B}}({}_{28}^{58}\text{Ni}) = \Delta M \cdot c^2 = 9.028 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot c^2 = 8.114 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 506.5 \text{ MeV}$$

Um einen Ni-58-Kern wieder in 28 einzelne Protonen und 30 einzelne Neutronen aufzutrennen, müsste man also 506.5 MeV Energie aufbringen.

## 3.3 Die Existenz von Atomkernen

Nun wird nachvollziehbar, weshalb nicht beliebige Kombinationen von Protonen und Neutronen einen Atomkern bilden können:

### Welche Atomkerne können existieren?

*Das Freiwerden von Bindungsenergie beim Zusammenfügen eines Kerns aus seinen Einzelteilen ist die Voraussetzung dafür, dass der Kern überhaupt existieren kann. Ansonsten gäbe es energetisch keinen Grund, warum sich Protonen und Neutronen zu einem Kern vereinigen sollten.*

*Dazu äquivalent ist wegen Einsteins Masse-Energie-Äquivalenz die Aussage: Nur Kerne mit positivem Massendefekt  $\Delta M > 0$  können existieren. Die Masse jedes Atomkerns muss kleiner sein als die Summe über die Massen der gleichen Anzahl voneinander losgelöster Protonen und Neutronen.*

**Achtung! Das eben Gesagte hat noch nichts mit der Frage zu tun, ob ein Atomkern langfristig stabil ist oder radioaktiv zerfallen wird! Die Aussage hier ist grundlegender: Alle Atomkerne, egal ob stabil oder radioaktiv, müssen einen positiven Massendefekt aufweisen, sonst würde es sie gar nicht geben können!**

## 3.4 Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon

Jedes in einem Kern eingebundene Nukleon besitzt weniger Masse, als wenn es frei wäre. Es hat somit seinen Teil zur Bindungsenergie des gesamten Kerns beigesteuert. Gehen wir davon aus, dass alle Nukleonen in egal welchem Kern immer etwa dieselbe Energiemenge zu dessen Bindungsenergie beitragen, so muss die Bindungsenergie  $E_{\text{B}}$  ungefähr proportional zur Nukleonenzahl  $A$  anwachsen.

Dass dies ungefähr richtig ist, wird klar, wenn man die Bindungsenergien  $E_{\text{B}}$  verschiedenen grosser Kerne als Funktion ihrer Massenzahlen  $A$  aufträgt (vgl. Abb. 3.2). Je mehr Nukleonen ein Kern enthält, desto grösser seine Bindungsenergie.

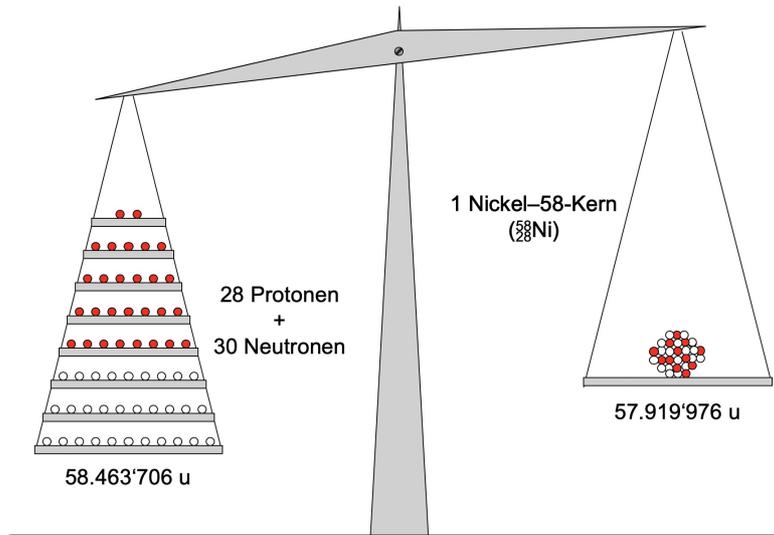


Abbildung 3.1: Der Massendefekt am Beispiel des Ni-58-Kerns: Im voneinander losgelösten Zustand links sind die 28 Protonen und 30 Neutronen schwerer als im gebundenen Zustand des Ni-58-Kerns rechts. Beim Eingehen der Kernbindung ist also Masse verloren gegangen.

Die Zunahme der Bindungsenergie  $E_B$  erfolgt allerdings nicht ganz genau proportional zur Massenzahl  $A$ . Der Graph in Abb. 3.2 zeigt bei genauerem Hinsehen doch eine deutliche Abweichung von einer Geraden, nämlich eine leichte "Rechtskurve". Das bedeutet, die Nukleonen sind nicht in jedem Kern gleich gut eingebunden. Nicht in jedem Kern haben sie gleich viel Bindungsenergie abgegeben resp. Masse verloren!

Um eine Aussage darüber zu machen, wie stark die Nukleonen in einem Kern gebunden sind, sollten wir demnach besser untersuchen, wie gut die Ausbeute an **Bindungsenergie pro Nukleon**  $\frac{E_B}{A}$  ist. Es ergeben sich die in Abb. 3.3 gezeigten Werte.

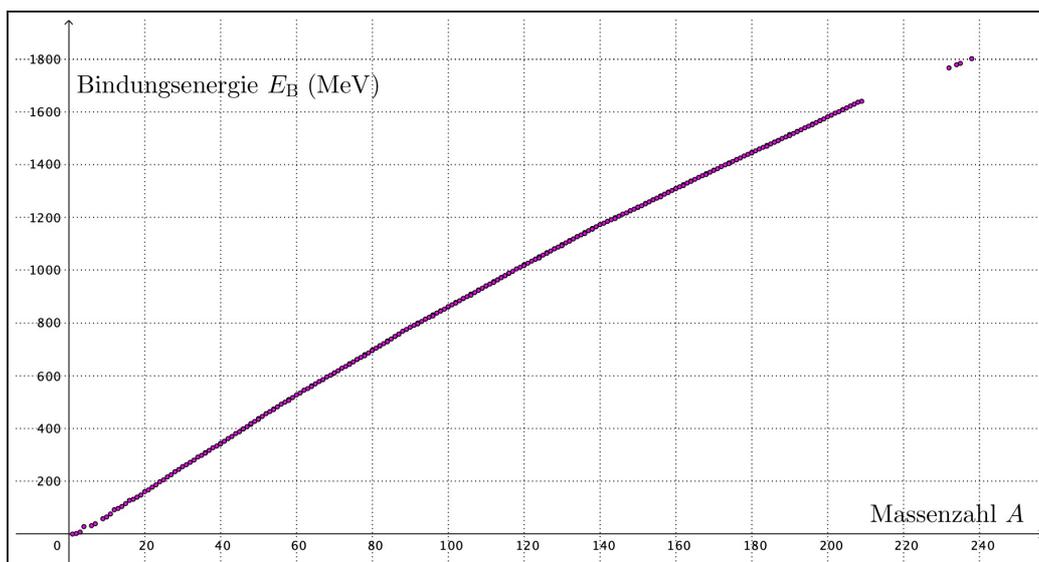


Abbildung 3.2: Die Bindungsenergien  $E_B$  aller stabilen Kerne, aufgetragen gegen ihre Massenzahl  $A$ . Je mehr Nukleonen ein Kern umfasst, desto grösser ist seine Bindungsenergie.

### Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon

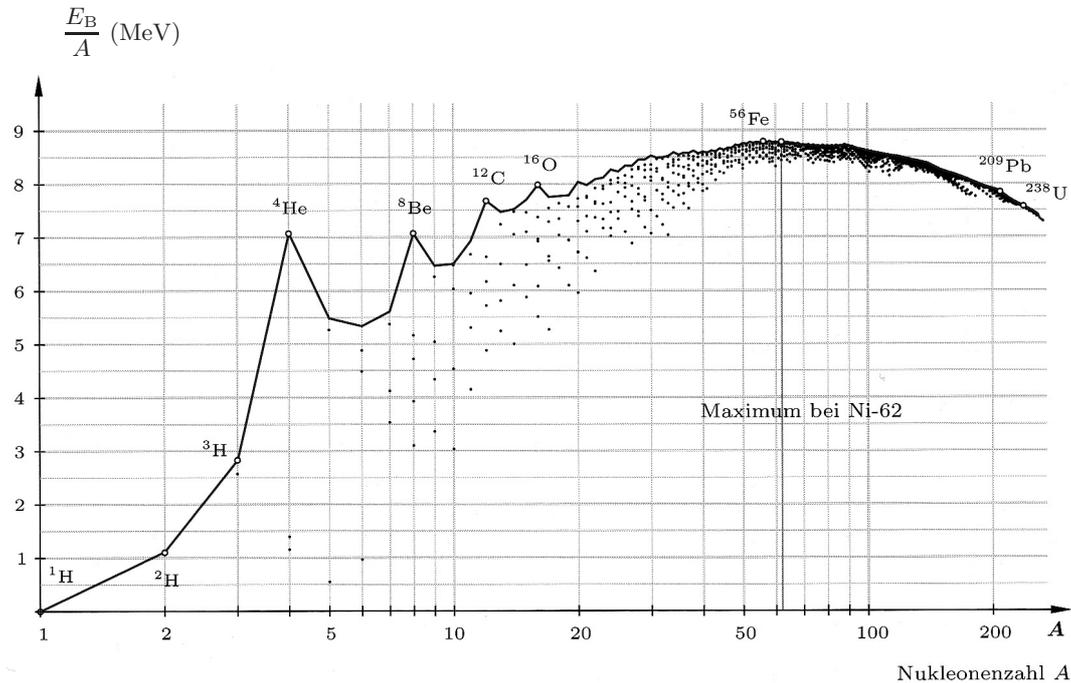


Abbildung 3.3: Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon  $\frac{E_B}{A}$  aufgetragen in Abhängigkeit der Nukleonenzahl  $A$ .

Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon  $\frac{E_B}{A}$  erreicht bei Kernen mit etwa 60 Nukleonen ein Maximum von knapp 8.8 MeV pro Nukleon. Leichtere Kerne haben zum Teil markant geringere Werte und auch bei schwereren Kernen nehmen die Werte ab, wenn auch etwas weniger stark.

In mittelgrossen Kernen sind die Nukleonen also besonders stark gebunden, während sie in kleinen und eher grossen Kernen noch Masse und damit Energie abzugeben hätten.

Interessant ist, dass es unter den leichteren Kernen ein paar gibt, deren Bindungsenergie pro Nukleon besonders gross ist. Man erkennt sie an den Spitzen (Peaks) in Abb. 3.3. Als erster solcher Kern erscheint  $^4_2\text{He}$ . Weiter hervorzuheben sind  $^8_4\text{Be}$ ,  $^{12}_6\text{C}$  und  $^{16}_8\text{O}$ . Offenbar gibt es bei Atomkernen gewisse **magische Massenzahlen**, bei welchen die Bindungsenergie pro Nukleon besonders gross ist.<sup>4</sup> Wir werden hier allerdings nicht weiter auf diese "Magie" eingehen.

<sup>4</sup>Dies ist vergleichbar mit der **Oktettregel** der Chemie: Bei einer bestimmten **magischen** Anzahl Elektronen in der Atomhülle sind die chemischen Bindungen besonders gut.

### 3.5 Exotherme Kernreaktionen

Abb. 3.3 zeigt, durch welche Kernreaktionen weitere Bindungsenergie freigesetzt werden kann. Die Produkte müssen im Mittel einfach näher am Maximum der Kurve liegen, also insgesamt eine grössere Bindungsenergie pro Nukleon aufweisen:

**Kernfusion:** Fügen sich leichte Kerne zu einem schwereren zusammen, so kann dabei pro Nukleon relativ viel Bindungsenergie frei werden.

Dieser Reaktionstyp findet in Sternen statt. Sterne sind also **Fusionsreaktoren**. Das gilt auch für unsere Sonne. Die von ihr erhaltene Energie und damit die Existenz von Leben auf der Erde verdanken wir genau dieser Art von Kernreaktion!

**Kernspaltung:** Spaltet sich ein sehr schwerer Kern in zwei mittelschwere auf, so werden die Nukleonen dadurch im Mittel ebenfalls etwas leichter, d.h. es wird Bindungsenergie frei.

Mit diesem Reaktionstyp arbeiten Kernreaktoren in Atomkraftwerken. Es sind **Spaltungsreaktoren**. Auch das zerstörerische Potenzial von **Kernwaffen** der ersten Generation (Hiroshima, Nagasaki) basierte auf Spaltungsreaktionen, währenddem die späteren Wasserstoffbomben zwar auch eine Spaltungsbombe enthalten, diese aber "lediglich" zum Zünden einer viel gewaltigeren Fusionsbombe verwendet wird.

**Zerfälle radioaktiver Kerne:** Zu jeder Nukleonenzahl  $A$  gibt es wesentlich mehr instabile als stabile Kombinationen  $(Z, N)$ . Instabil bedeutet, dass die Zusammensetzung aus Protonen und Neutronen energetisch nicht optimal ist, sodass sich der Kern früher oder später in eine stabilere Form umwandeln wird.

Die Nukleonen in instabilen Kernen haben demzufolge das Potenzial, noch mehr Bindungsenergie resp. Masse abzugeben. In Abb. 3.3 gehören also die instabilen Kerne zu den Punkten unterhalb der obersten Kurve, die von den stabilen Kerne gebildet wird.

Wandelt sich ein instabiler Kern in einen stabileren um, so wird dabei auch Bindungsenergie frei. Die Nukleonen werden dabei ebenfalls leichter. Die abgegebene Energie wird in Form von **hochenergetischer Strahlung** freigesetzt. Deshalb spricht man bei diesen Umwandlungen von **radioaktiven Zerfällen**.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Engl. *radiation* = Strahlung.

## Kapitel 4

# Radioaktive Zerfälle

In Kapitel 2 haben wir Beispiele von **Kernfusions-** und **-spaltungsreaktionen** gesehen. Diese beiden Reaktionstypen bedingen jeweils zwei Edukte, die miteinander reagieren. D.h., solche Reaktionen können nur stattfinden, wenn zwei bestimmte Teilchen zusammentreffen.

Andererseits können sich einzelne Kerne auch **spontan** umwandeln und Energie abgeben. Dies passiert bei Kernen mit einer "schlechten", also eben nicht-stabilen Zusammensetzung aus Protonen und Neutronen. Bei solchen Kernumwandlungen wird stets eine Art von **Strahlung** (engl. *radiation*) erzeugt. D.h., es entstehen neue Teilchen, die vom Reaktionsort wegfliegen und dabei die frei gewordene Bindungsenergie in Form von kinetischer Energie "abtransportieren". Man spricht von **radioaktiven Kernen** resp. **radioaktiven Zerfällen**.<sup>1</sup>

Für solch kleine Teilchen sind die freigesetzten Energiemengen enorm gross. Deshalb handelt es sich bei den ausgesandten Teilchen um wahrhaftige Geschosse und man spricht zurecht von **hochenergetischen Teilchen** resp. **hochenergetischer Strahlung**.<sup>2</sup>

Drei **Zerfallsarten** sind besonders häufig, der  $\alpha$ -, der  $\beta$ - und der  $\gamma$ -Zerfall, wobei wir bei der zweiten Variante zusätzlich zwischen  $\beta^-$ - und  $\beta^+$ -Zerfällen unterscheiden wollen. Die emittierten (= ausgesandten) **Strahlungen** bezeichnen wir als  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung:

- $\alpha$ -Teilchen sind **Helium-4-Kerne**  ${}^4_2\text{He}^{2+}$ . Sie sind also 2-fach positiv geladen und besitzen im Vergleich mit anderen Strahlungsteilchen eine sehr grosse Masse.
- $\beta^-$ -Teilchen sind **Elektronen**  $e^-$ , also einfach negativ geladene, sehr leichte Teilchen.
- $\beta^+$ -Teilchen sind **Positronen**  $e^+$ . Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons: es besitzt dieselbe Masse, aber die entgegengesetzte elektrische Ladung, und wird beim Zusammentreffen mit einem Elektron zusammen mit diesem vernichtet – man spricht von **Annihilation** – wobei in der Regel zwei hochenergetische Photonen  $\gamma$  entstehen.
- $\gamma$ -Teilchen sind **Photonen**  $\gamma$ , also Lichtteilchen, mit einer Frequenz weit oberhalb des sichtbaren Bereichs. Sie sind masselos und bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.

### 4.1 $\alpha$ -Zerfälle

Bei einem  $\alpha$ -Zerfall stösst ein in der Regel grosser bis sehr grosser Kern zwei Protonen und zwei Neutronen zusammen ab, d.h., es wird ein **Helium-Kern** freigesetzt ( ${}^4_2\text{He}$ ). Die

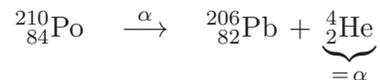
---

<sup>1</sup>Zur Terminologie: "Radio-aktiv" bedeutet "strahlungs-aktiv" resp. "Strahlung aussendend". In diesem Sinne gibt es "radioaktive Kerne", "radioaktives Material" und "radioaktive Zerfälle". Den Ausdruck "**radio-aktive Strahlung**" gibt es streng genommen nicht, denn die Strahlung sendet selber keine weitere Strahlung mehr aus.

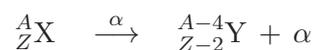
<sup>2</sup>D.h. auch, dass diese Strahlung gefährlich ist und man es vermeiden sollte, zuviel davon abzubekommen.

**$\alpha$ -Teilchen**, aus welchen sich  $\alpha$ -Strahlung zusammensetzt, sind somit nichts anderes als solche Helium-Kerne. Die Energie, welche beim Kernzerfall frei wird, trägt das  $\alpha$ -Teilchen grösstenteils in Form von Bewegungsenergie mit sich. Da es sich hierbei um eine für ein einzelnes Teilchen sehr grosse Energiemenge handelt, ist es sehr schnell. Wir sprechen von **schnellen** oder auch **hochenergetischen** Teilchen. Genau diese Tatsache macht die Strahlung für uns gefährlich.

**Beispiel:** Polonium-210 ( $^{210}_{84}\text{Po}$ ) zerfällt via  $\alpha$ -Zerfall. Die Reaktionsgleichung lautet folgendermassen:



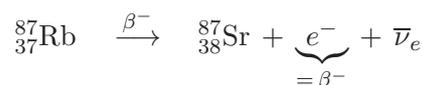
Ganz allgemein lässt sich für jeden  $\alpha$ -Zerfall schreiben:



## 4.2 $\beta^-$ -Zerfälle

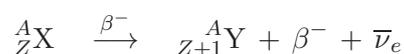
Bei einem  $\beta^-$ -Zerfall sendet ein Kern mit zu vielen Neutronen ein **Elektron**  $e^-$  aus. Dieses wird neu erzeugt, es existiert vorher nicht, sitzt also nicht bereits irgendwo im Kern drin.<sup>3</sup>  $\beta^-$ -Strahlung besteht somit aus hochenergetischen resp. schnellen Elektronen.

**Beispiel:** Rubidium-87 ( $^{87}_{37}\text{Rb}$ ) zerfällt via  $\beta^-$ -Zerfall:

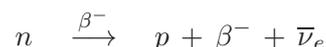


Neben dem Elektron entsteht zudem ein **Anti-Elektronneutrino**  $\bar{\nu}_e$ . Dies ist ein Teilchen, welches charakteristisch für diesen Zerfallstyp ist. Sein Auftreten zeigt, dass hier eine weitere fundamentale Kraft, die sogenannte **schwache Wechselwirkung**, am Werk ist. Dieses Teilchen braucht uns vorerst allerdings nicht weiter zu beschäftigen. Es nimmt einen Teil der beim Zerfall frei werdenden Energie mit sich, macht ansonsten aber nichts. Wir müssen uns auch nicht speziell vor diesem Teilchen in acht nehmen, da Neutrinos und ihre Antiteilchen nur äusserst selten mit anderen Teilchen reagieren. Im Wesentlichen fliegt es ungestört durch alles hindurch und behelligt dabei nichts und niemanden.<sup>4</sup>

Ganz allgemein lässt sich für jeden  $\beta^-$ -Zerfall schreiben:



Beim  $\beta^-$ -Zerfall wird ein Neutron des Kerns in ein Proton umgewandelt, weshalb die Ordnungszahl um 1 ansteigt. In gleicher Weise gehen auch Neutronen, welche nicht in einem Kern gebunden sind, durch einen  $\beta^-$ -Zerfall in ein Proton über. Dies funktioniert nur, weil ein einzelnes Neutron etwas mehr Masse besitzt als ein einzelnes Proton:



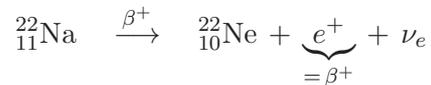
<sup>3</sup> $E = m \cdot c^2$  lässt grüssen! Aus Energie kann neue Masse erzeugt werden.

<sup>4</sup>Du kannst dir vorstellen, wie schwierig es war, dieses Teilchen zu entdecken! In der Tat war es so, dass seine Existenz 30 Jahre vor seinem experimentellen Nachweis in der Theorie vorausgesagt wurde. Neutrino-Experimente zählen heute allerdings zu den spannendsten Gebieten der modernen Physik. Z.B. interessiert man sich sehr für die Neutrinomasse. Diese ist nach aktuellstem Stand zwar verschieden von Null, aber unmessbar klein. In unseren Betrachtungen ist dieses Teilchen deshalb masselos.

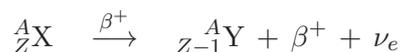
### 4.3 $\beta^+$ -Zerfälle

Bei einem  $\beta^+$ -Zerfall sendet ein Kern mit zu vielen Protonen ein hochenergetisches **Positron**  $e^+$  aus. Auch dieses Teilchen wird, wie das  $e^-$  beim  $\beta^-$ -Zerfall, neu erzeugt.

**Beispiel:** Natrium-22 zerfällt via  $\beta^+$ -Zerfall:



Bei diesem Zerfall entsteht zusätzlich ein **Elektronneutrino**  $\nu_e$ , für welches dieselben Aussagen gelten wie für das Antineutrino vom  $\beta^-$ -Zerfall. Allgemein schreiben wir für den  $\beta^+$ -Zerfall:



Beim  $\beta^+$ -Zerfall wandelt sich im Kern ein Proton in ein Neutron um, weshalb die Ordnungszahl um 1 abnimmt. Dieser Zerfall ist aber nur in einem Kernverbund zu beobachten. Ein einzelnes freies Proton ist stabil und wird niemals diesen Zerfall spontan durchführen, einfach weil es leichter ist als ein freies Neutron!

Das Positron  $e^+$  ist das Antiteilchen des Elektrons. Es besitzt exakt dieselbe Masse, also  $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , jedoch die entgegengesetzte Ladung  $q_{e^+} = +e$ . Ausserdem **annihilieren** sich die beiden Teilchen, wenn sie aufeinander treffen. D.h., sie vernichten sich gegenseitig. Bei einer solchen **Paar-Annihilation** entsteht als Produkt in der Regel ein Paar hochenergetische  $\gamma$ -Teilchen, welche exakt entgegengesetzt zueinander ausgesendet werden.



Aufgrund dieses Annihilationsprozesses lassen sich  $\beta^+$ -Zerfälle normalerweise nicht direkt, d.h. anhand des ausgesandten Positrons beobachten. Sobald das Positron auf Materie – Atome mit einer Unzahl Elektronen in den Hüllen – trifft, wird die Annihilation stattfinden. Diese Zerfallsart lässt sich also nur indirekt über das emittierte  $\gamma$ -Paar beobachten.

Dies nutzt man heutzutage z.B. in der Nuklearmedizin gezielt aus. Einem Patienten wird ein sogenanntes **Radiopharmakon**, also eine schwach  $\beta^+$ -radioaktive Substanz verabreicht. Diese verteilt sich je nach Substanzart, Eingabeweg und Krankheit unterschiedlich gut im Körper. Anschliessend detektiert man rund um den Patienten die ausgesandten  $\gamma$ -Teilchen, woraus man sehr genau auf die Zerfallsorte im Körper schliessen kann. Man erfährt also, wie sich die Substanz im Körper verteilt hat und kann mit dem gesunden Menschen vergleichen. Dieses **bildgebende Verfahren** nennt sich **Positronen-Emissions-Tomographie (PET)**. Das am häufigsten verwendete Radioisotop ist Fluor-18. Abb. 4.1 zeigt eine PET-Anlage und schematisch deren Funktionsweise.

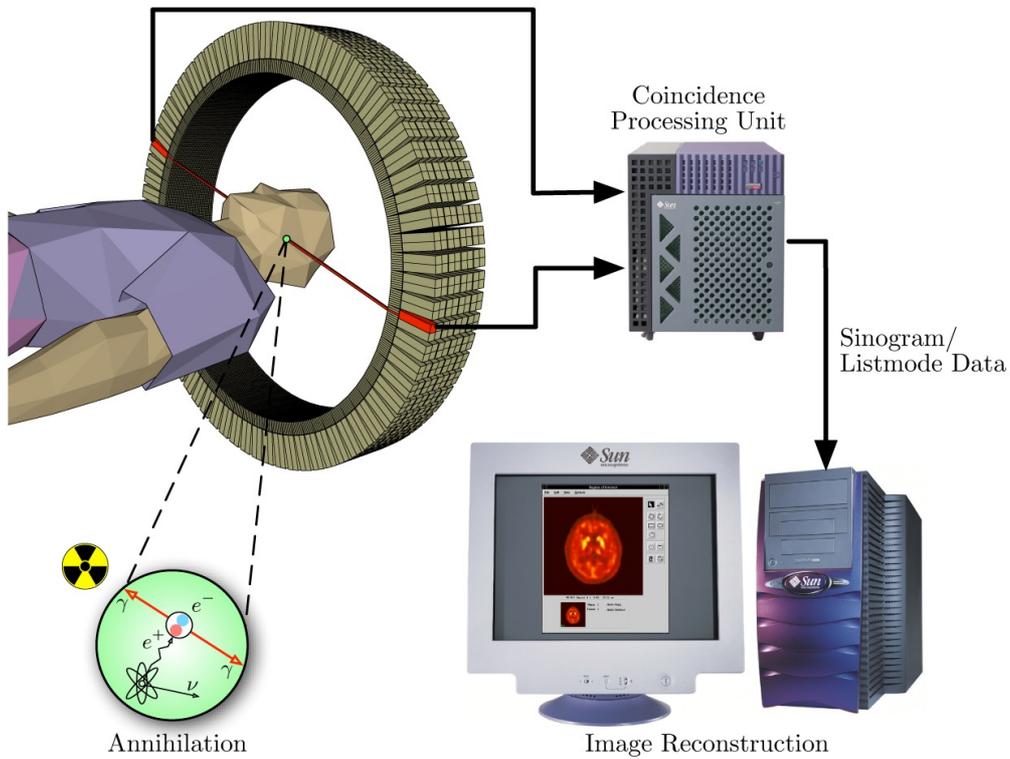


Abbildung 4.1: Das obere Bild zeigt den realen Positronen-Emissions-Tomographen (PET). Das untere Bild erläutert die Funktionsweise: Im Detektor-Ring werden die ankommenden  $\gamma$ -Teilchen registriert. Aus den Auftrefforten und dem Zeitunterschied zwischen den beiden Registrations wird im Computer auf den genauen Zerfallsort geschlossen, woraus in der Gesamtheit ein Bild des Gewebes erstellt werden kann.

## 4.4 $\gamma$ -Zerfälle

Bei dieser dritten Zerfallsart besteht die Umwandlung des Kernes nicht darin, dass sich die Protonen- oder die Neutronenzahl verändern würde. Vielmehr ist es so, dass ein Kern – wie jedes Gebilde, das sich aus mehreren Teilchen zusammensetzt – selber verschiedene innere Energiezustände aufweist. Den Zustand mit der niedrigsten Energie nennt man jeweils den **Grundzustand**. Alle anderen Zustände sind **angeregt**.<sup>5</sup>

Wenn sich ein angeregter Kern "abregt", also in einen Zustand niedriger Energie übergeht, so sendet er ein hochenergetisches **Photon**, also ein Lichtteilchen aus. Wir sprechen von  $\gamma$ -**Teilchen** oder  $\gamma$ -**Quanten**.

Kerne bleiben nur für kurze Zeit angeregt.  $\gamma$ -Strahlung können wir demzufolge nur bei gerade neu entstandenen Kernen beobachten. Oder anders: Ein  $\gamma$ -Zerfall ist die Folge einer vorangehenden anderen Kernreaktion. Auch hierzu ein Beispiel:



Ich habe beim  $\alpha$ -Zerfall der Übersichtlichkeit halber das ausserdem entstehende  $\alpha$ -Teilchen weggelassen. Das Sternchen beim  ${}_{93}^{237}\text{Np}$ -Nuklid kennzeichnet den angeregten Zustand.

In der tabellierten Auswahl von radioaktiven Nukliden (vgl. Anhang A, Seite A.5f) ist jeweils ersichtlich, ob ein  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall zusätzlich von einem  $\gamma$ -Zerfall begleitet wird. Das ist meistens der Fall und führt auf eine der Schwierigkeiten bei der Lagerung radioaktiven Materials: Währenddem man sich vor  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung durch **Abschirmung** einigermaßen gut schützen kann, ist die  $\gamma$ -Strahlung extrem durchdringend und kann lediglich abgeschwächt, aber nicht vollständig aufgehalten werden.

## 4.5 Zerfallsreihen

Neben den eben erwähnten  $\gamma$ -Zerfällen ist es auch sonst möglich, dass ein frisch entstandener **Tochterkern** selber wieder instabil ist, also weiter zerfallen kann. Auf diese Weise gibt es ganze Ketten von hintereinander stattfindenden Zerfällen. Man spricht von **Zerfallsreihen**. Erst wenn ein stabiler Kern entsteht, stoppt die Reihe.

Dies ist eine weitere Problematik radioaktiver Abfälle. Die in einem Kernkraftwerk bei der Uranspaltung entstehenden Tochterkerne sind in der Regel so beschaffen, dass sie nicht durch einen einmaligen Zerfall in einen stabilen Endkern übergehen, sondern dass es dazu mehrere Zerfälle, also eine Zerfallsreihe braucht.

Abb. 4.2 zeigt die drei sogenannten **natürlichen radioaktiven Zerfallsreihen** als prominenteste Beispiele dieses Phänomens.

---

<sup>5</sup>Aus der Chemie kennst du den Ausdruck eines angeregten Atoms. Damit meint man, dass nicht alle Elektronen die energetisch niedrigst möglichen Schalen besetzen. Es gibt mindestens ein Elektron, welches sich in einer höheren Schale aufhält und demnach in eine tiefere Schale "zurückfallen" kann. Dabei wird Energie frei, welche in Form von Strahlung abgegeben wird. In der Chemie sind die frei werdenden Energien verhältnismässig gering und damit ungefährlich für den Menschen. Es kann sogar vorkommen, dass die Energie gerade so gross ist, dass die frei gesetzte Strahlung eine Frequenz im sichtbaren Bereich hat. Diese Tatsache liegt dem Phänomen der **Flammenfärbung** zugrunde, wenn man z.B. Alkali- oder Erdalkalimetallehaltige Verbindungen erhitzt.

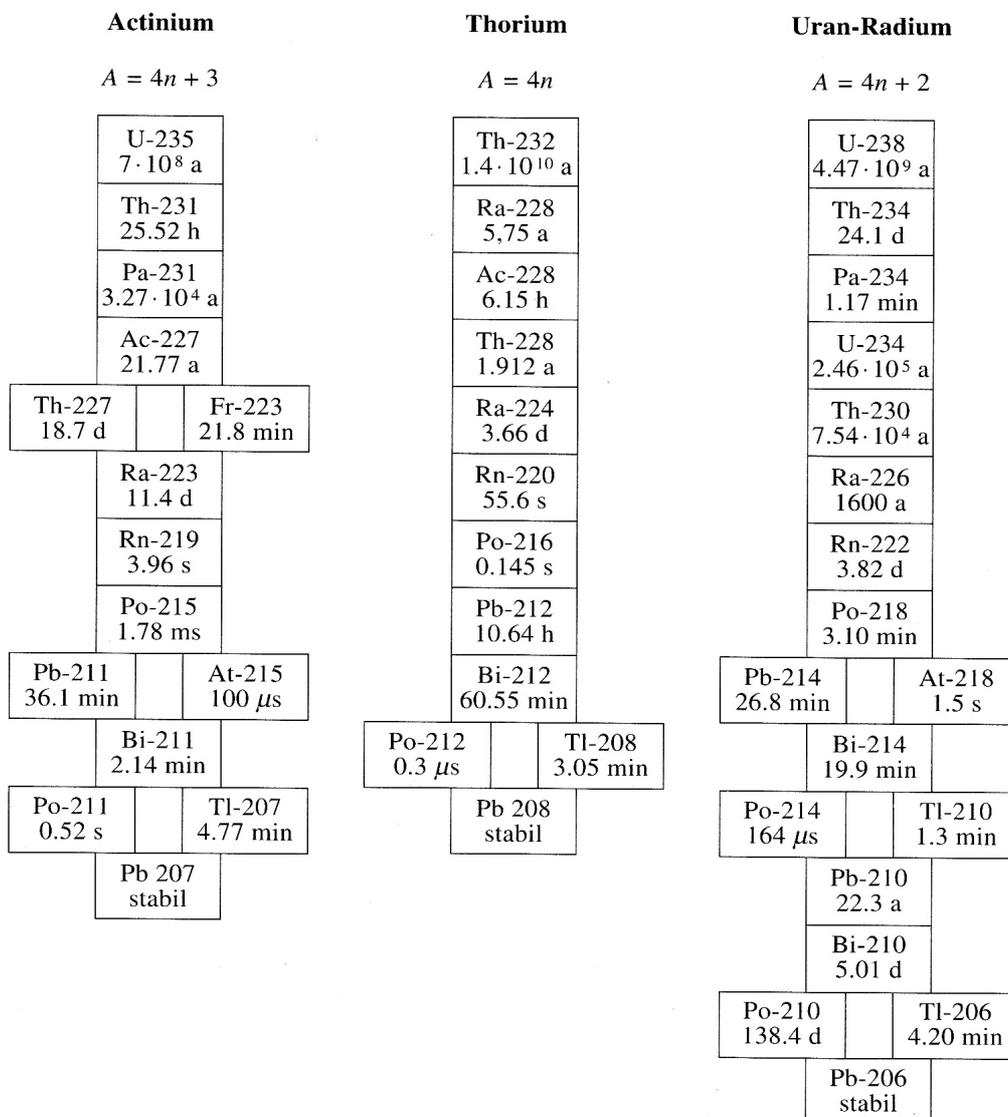


Abbildung 4.2: Die drei natürlichen Zerfallsreihen. "Natürlich" nennt man sie, weil Spuren der drei Ausgangsisotope U-235, Th-232 und U-238 aufgrund ihrer hohen Halbwertzeiten seit der Entstehung der Erde immer noch natürlich vorhanden sind. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von **primordialen** Radionukliden (**Radionuklid** = radioaktives Nuklid).

# Kapitel 5

## Zerfallsgesetz und Aktivität

Radioaktive Strahlung ist wegen der hohen Teilchenenergien für lebende Organismen schädlich. D.h., man sollte es vermeiden, zuviel Strahlung aufzunehmen.<sup>1</sup>

Wie gefährlich ist nun eine radioaktive Quelle, also ein Körper, welcher radioaktive Kerne beinhaltet? Um dies zu beurteilen müssen wir u.a. herausfinden, wie viele hochenergetische Teilchen pro Zeitabschnitt, also z.B. pro Sekunde, ausgesendet werden und wie lange die Quelle noch mit dieser Häufigkeit Teilchen aussenden wird.<sup>2</sup> In diesem Kapitel werden wir diesen Fragen auf den Grund gehen.

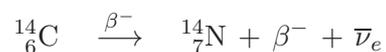
### 5.1 Das quantenmechanische Verhalten beim Zerfall

Die Verhaltensweise kleiner Teilchen, also von Quantenobjekten, unterscheidet sich ganz wesentlich von demjenigen makroskopischer Körper. Der **Determinismus** der klassischen Newton'schen Mechanik, gemäss welchem alle zukünftigen Zustände eines Systems vorher-sagbar sind, wenn man seinen aktuellen Zustand genau kennt, muss aufgegeben werden. Er muss einer statistischen Theorie, eben der **Quantenmechanik** weichen, welche über einzelne Teilchen nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen machen kann.

#### Ein Beispiel: der Zerfall von $^{14}\text{C}$

Wir betrachten zwei C-14-Kerne. Beide sehen für uns in ihrem energetischen Grundzustand ganz genau gleich aus. Sie haben identische Eigenschaften; es lassen sich keine Unterschiede entdecken, mit keiner bekannten Methode.

Die beiden C-14-Kerne sind radioaktiv und werden früher oder später via  $\beta^-$ -Zerfall in stabile N-14-Kerne übergehen:



---

<sup>1</sup>Es ist nicht so, dass wir gar keine Strahlung vertragen würden. Wir werden nämlich alle ganz natürlich von solcher Strahlung getroffen. Aber eben im Mass. . .

<sup>2</sup>Es ist klar, dass eine Quelle irgendwann aufhört zu strahlen, nämlich genau dann, wenn alle radioaktiven Kerne in ihr zerfallen sind. Wir erwarten also eine Abnahme der Zerfallshäufigkeit.

Und nun kommt das Verrückte! Obwohl die beiden Kerne für uns gleich aussehen, verhalten sie sich in einem Punkt ganz unterschiedlich: Sie zerfallen nicht im selben Moment, also nach der gleichen Wartezeit. Während ein Kern z.B. gerade in der nächsten Sekunde zerfallen könnte, mag es beim anderen noch Jahrtausende dauern. Ausserdem könnte die Reihenfolge ebenso gut vertauscht sein! Jeder C-14-Kern "wählt" für sich separat eine "Lebenszeit" zwischen Entstehung und Zerfall. Keine zwei C-14-Kerne werden exakt gleich alt, obwohl sie für uns alle ganz genau gleich aussehen, es also keinen messbaren Unterschied zwischen ihnen gibt!

Diese Verhaltensweise ist nach klassischen, also vor-quantenmechanischen physikalischen Vorstellungen absolut widersprüchlich. Der Zustand zweier Teilchen ist in einem ersten Moment identisch, aber die beiden Teilchen verhalten sich im weiteren Verlauf der Zeit unterschiedlich, ja irgendwie zufällig!<sup>3</sup>

### Der quantenmechanisch fallende Stein

Wie verrückt dieses quantenmechanische Verhalten wirklich ist, zeige ich am imaginären Beispiel eines makroskopischen Gegenstandes vor, der sich quantenmechanisch verhalten soll: Ich präsentiere den "quantenmechanisch fallenden Stein"!

Die Newton'sche Mechanik lässt uns berechnen – und unsere Alltagserfahrung stimmt damit überein – dass ein Stein nach einer Fallzeit von ziemlich genau 0.6 s auf dem Boden aufprallt, wenn wir ihn aus einer Höhe von 1.8 m fallen lassen.<sup>4</sup>

Bei unserem quantenmechanischen Stein ist eine derartige Aussage aber nicht möglich. Stattdessen könnte man sagen, es besteht eine **Wahrscheinlichkeit** von z.B. 65 %, dass der Stein nach 0.6 s auf dem Boden liegt. Er hat aber auch die Möglichkeit, sich dann immer noch auf der Starthöhe zu befinden. Wir könnten schlichtweg nicht genau voraussagen, wann der quantenmechanische Stein auf dem Boden aufschlägt. Hingegen könnten wir dafür eine **Wahrscheinlichkeit pro Zeitabschnitt** angeben, also eben 65 % pro 0.6 s. Natürlich würde es für den Stein immer unwahrscheinlicher, dass er noch nicht gefallen ist, wenn wir genügend lange warten.

Des Weiteren könnten wir, wenn wir ganz viele genau gleiche quantenmechanische Steine gleichzeitig loslassen würden, sagen, dass nach 0.6 s ein Anteil von 65 % dieser Steine auf dem Boden liegen. Die Wahrscheinlichkeitsaussage über einen einzelnen Stein wird, wenn wir viele Steine betrachten, ganz anschaulich zu einer **statistischen Aussage über das Kollektiv**.

Das Ganze wäre für uns, die wir an die Gesetze der klassischen Physik gewohnt sind, wohl ziemlich irritierend.<sup>5</sup>

<sup>3</sup>Um so etwas mit einer Theorie zu erklären, mussten ganz neue und revolutionäre Ansätze gefunden werden. 1927 war dieser Findungsprozess fürs Erste abgeschlossen, als die sogenannte **Kopenhagener Deutung** der Quantenmechanik formuliert wurde. Wesentlich daran beteiligt waren Physiker wie **Niels Bohr**, **Werner Heisenberg** und **Max Born**, aber auch **Albert Einstein** – Letzterer zwar vor allem in seiner Rolle als Gegner der neuen Theorie. Für ihn war es nicht akzeptierbar, den Zufall in die physikalischen Gesetzmässigkeiten mit einzubauen. Sein berühmter Ausspruch in diesem Zusammenhang: "Gott würfeln nicht!"

<sup>4</sup>Freier Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit:  $h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.8 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{kg}}}} \approx 0.6 \text{ s}$ .

<sup>5</sup>Noch irritierender dürfte die folgende quantenmechanische Aussage sein: "Solange niemand nachschaut, ob der Stein schon gefallen ist, befindet er sich sowohl oben, als auch unten."

Hinter dieser Aussage steckt das berühmte Gedankenbeispiel der sogenannten **Schrödinger'schen Katze**, welche in einer verschlossenen Box gefangen ist. Leider enthält die Box auch einen Giftbehälter, welcher sich aufgrund eines zerfallenden Atomkerns irgendwann öffnen und die Katze umbringen wird. Solange niemand nachschaut, ist die Katze – quantenmechanisch gesehen – in einem Mischzustand aus "tot" und "lebendig"...

## 5.2 Die Halbwertzeit $T_{1/2}$ und das Zerfallsgesetz

Zurück zum radioaktiven C-14-Kern. Wie beim quantenmechanisch fallenden Stein gibt es auch hier eine Wahrscheinlichkeitsaussage: Pro 5730 Jahre besteht eine Chance von 50 %, dass dieser zerfällt. Diese Zeitspanne bezeichnen wir als die **Halbwertzeit**  $T_{1/2}$  von C-14. Lassen wir eine Halbwertzeit verstreichen und ist der Kern dann noch nicht zerfallen, so besteht auch in den darauf folgenden 5730 Jahren erneut eine Chance von 50 % für den Zerfall. Nach zwei Halbwertzeiten ergibt sich folglich:

$$p(\text{“Kern ist nach } 2T_{1/2} \text{ noch nicht zerfallen”}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

Nach drei Halbwertzeiten beträgt die Chance, noch immer den ursprünglichen C-14-Kern anzutreffen, nur noch  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12.5\%$ . Abb. 5.1 zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $p(t)$  wir einen einzelnen radioaktiven C-14-Kern nach der Zeit  $t$  noch unzerfallen antreffen. Diese Wahrscheinlichkeitsfunktion nimmt **exponentiell** ab.

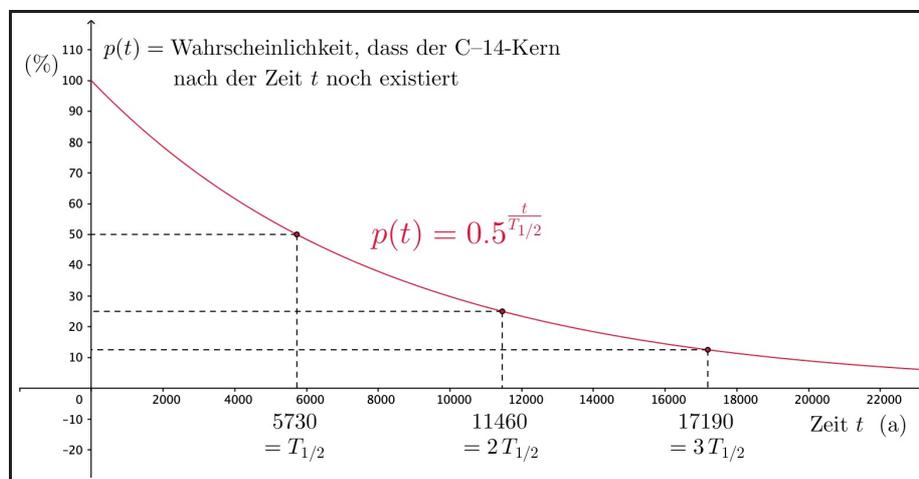


Abbildung 5.1: Die exponentiell abfallende Existenzwahrscheinlichkeit  $p(t)$  eines C-14-Kerns.

Wie wir im vorangehenden Abschnitt gesehen haben, **wird die Wahrscheinlichkeitsaussage für ein einzelnes Teilchen zu einer statistischen Aussage für sehr viele Teilchen**. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(t)$  gibt also ebenfalls an, welcher Bruchteil einer anfänglichen Anzahl Kerne  $N_0$  nach der Zeit  $t$  noch nicht zerfallen ist. Es gilt somit für die Anzahl Kerne  $N(t)$ , welche zum Zeitpunkt  $t$  noch nicht zerfallen sind:

$$N(t) = N_0 \cdot p(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

### Das Zerfallsgesetz

Sind in einer radioaktiven Quelle zum Zeitpunkt  $t = 0$  von einem bestimmten Radioisotop  $N_0$  Nuklide vorhanden, so nimmt diese Anzahl **exponentiell** mit der Zeit ab. Das **Zerfallsgesetz** beschreibt die Anzahl noch vorhandener Nuklide  $N(t)$  nach der Zeit  $t$ :

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (5.1)$$

Dabei steht  $T_{1/2}$  für die **Halbwertszeit** des Radioisotops.

Abb. 5.2 zeigt die durch das Zerfallsgesetz beschriebene exponentielle Abnahme der Anzahl noch nicht zerfallener Nuklide  $N(t)$ . Es ist dieselbe exponentiell abfallende Kurve, die wir schon bei der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(t)$  in Abb. 5.1 gesehen haben, nur dass jetzt die Achsen anders beschriftet sind.

Das Zerfallsgesetz kann im Übrigen mit allen irgendwie "Teilchen zählenden" Größen notiert werden, z.B. mit der Masse  $m$  oder der Stoffmenge  $n$  (in Mol) der noch vorhandenen Radionuklide:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \text{oder} \quad n(t) = n_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

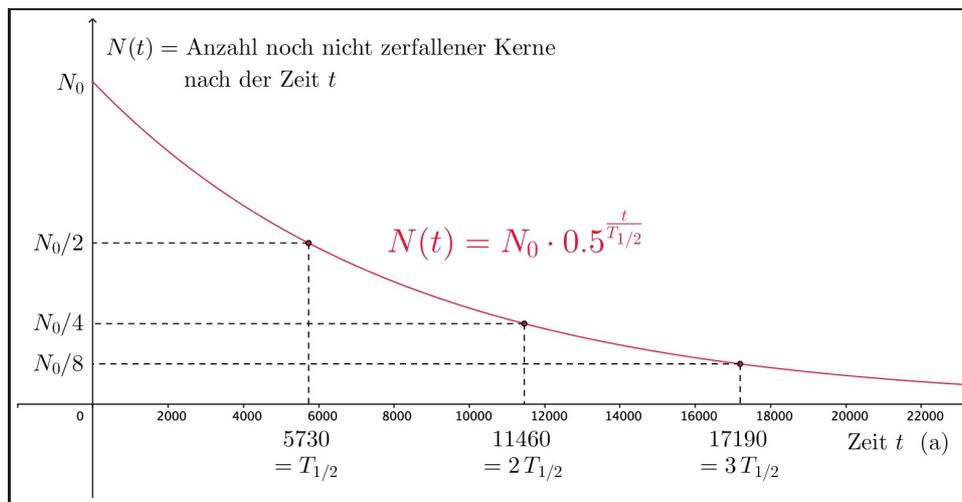


Abbildung 5.2: Das Zerfallsgesetz im Diagramm. Die Anzahl der noch nicht zerfallenen C-14-Kerne nimmt exponentiell ab. Nach einer Halbwertszeit ( $t = T_{1/2} \Rightarrow \frac{t}{T_{1/2}} = 1$ ) ist noch die Hälfte, nach zwei Halbwertszeiten ( $t = 2T_{1/2} \Rightarrow \frac{t}{T_{1/2}} = 2$ ) noch ein Viertel der ursprünglichen Anzahl Kerne vorhanden, etc.

## Eine Standardaufgabe mit dem Zerfallsgesetz

Mit dem Zerfallsgesetz lassen sich, sobald die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  einer Nuklidsorte bekannt ist, verschiedene Fragestellungen speditiv beantworten. Hier ein typisches Beispiel:

**Fragestellung:** Das Problem bei der Endlagerung radioaktiver Abfälle aus Kernkraftwerken liegt in der Langlebigkeit gewisser Nuklide. Dazu gehört z.B. Strontium-90 mit einer Halbwertszeit von 28.79 Jahren.

Wie lange dauert es, bis von einer anfängliche Menge  $^{90}\text{Sr}$  99% zerfallen sind?

**Antwort:** Sollen 99% der Anfangsmenge  $N_0$  zerfallen sein, so muss die Menge der noch nicht zerfallenen Kerne  $N(t) = 1\% \cdot N_0 = 0.01 \cdot N_0$  betragen. Daraus ergibt sich eine Gleichung, welche uns auf die Zeit  $t$  schliessen lässt:

$$\begin{aligned} N(t) &= 0.01 \cdot N_0 && | \text{Zerfallsgesetz einsetzen} \\ \Rightarrow N_0 \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.01 \cdot N_0 && | : N_0 \\ \Leftrightarrow 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.01 && | \log_{0.5}(\dots) \\ \Leftrightarrow \frac{t}{T_{1/2}} &= \log_{0.5} 0.01 && | \cdot T_{1/2} \\ \Leftrightarrow t &= T_{1/2} \cdot \log_{0.5} 0.01 && | \text{Halbwertszeit einsetzen} \\ &= 28.79 \text{ a} \cdot \log_{0.5} 0.01 = 191.3 \text{ a} \end{aligned}$$

**Nebenbei:** Auf der dritten Zeile siehst du den mathematischen Knackpunkt, nämlich eine **Exponentialgleichung**.

Zur Auflösung einer solchen Gleichung muss stets **logarithmiert** werden, und zwar mit dem Logarithmus zur selben Basis, die auch in der Gleichung vorkommt, d.h. hier mit  $\log_{0.5}(\dots)$ . Dadurch wird der Exponent  $\frac{t}{T_{1/2}}$  auf die Hauptzeile der Gleichung heruntergenommen. Die Basis fällt weg, denn: **der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion**:

$$\text{Allgemein gilt: } \log_a(a^x) = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a x} = x \quad \text{für beliebige } 0 < a \neq 1$$

$\log_a b$  ist stets die Antwort auf die Frage: "a hoch wie viel ergibt b?"

$$x = \log_a b \quad \text{ist die Lösung der Gleichung} \quad a^x = b$$

**Übrigens:** Zur Berechnung von  $\log_{0.5} 0.01$  auf älteren TRs benutzt man die sogenannte **Basiswechselformel für Logarithmen**:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{Konkret im Beispiel oben: } \log_{0.5} 0.01 = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.5} \approx 6.644$$

Genau wegen dieser Basiswechselformel braucht ein Taschenrechner eigentlich nur gerade eine einzige Logarithmentaste. Üblicherweise handelt es sich dabei um den **Logarithmus naturalis**, also den Logarithmus zur Basis  $e$ :  $\ln a = \log_e a(\dots)$  mit  $e \approx 2.718$  (**Euler'sche Zahl**).

### 5.3 Die Aktivität einer radioaktiven Quelle

Wie stark die Strahlung einer radioaktiven Quelle ist, wird durch ihre momentane **Zerfallsrate**, also die **Anzahl Zerfälle pro Zeitabschnitt** beschrieben. Diese momentane Zerfallsrate wird als **Aktivität**  $A$  der Quelle bezeichnet. Da sie mit zunehmendem Alter der Quelle abnehmen wird, macht es Sinn, sie als Funktion der Zeit zu notieren:  $A(t)$ .

Je mehr noch nicht zerfallene Kerne eine Quelle enthält, desto grösser wird ihre Aktivität sein. Schliesslich besitzt jeder einzelne Kern eine bestimmte Wahrscheinlichkeit in der nächsten Sekunde zu zerfallen. Die Aktivität  $A(t)$  einer radioaktiven Quelle muss also proportional zur Anzahl noch vorhandener Kerne  $N(t)$  sein. Man findet:

#### Aktivität einer bestimmten radioaktiven Quelle

Gegeben sei eine radioaktive Quelle zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Sie enthalte  $N_0$  Radionuklide mit Halbwertszeit  $T_{1/2}$ .

Dann ist die **Aktivität**  $A(t)$  dieser Quelle, d.h. ihre aktuelle Zerfallsrate zum Zeitpunkt  $t$ , gegeben durch:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}} \quad (5.2)$$

Dabei ist  $A_0$  die Aktivität zum Startzeitpunkt  $t = 0$ .

#### Anmerkungen zur Aktivität

- Gleichung (5.2) kann aus dem Zerfallsgesetz hergeleitet werden, denn die Angabe, wie viele Kerne pro Zeitabschnitt zerfallen, beschreibt gerade, wie die Anzahl noch vorhandener Kerne  $N(t)$  abnimmt, also sich **verändert**.

Die Veränderung einer Grösse wird mathematisch aber genau durch die **Differentiation** nach der Zeit  $t$ , also durch die **Ableitung** der Grösse nach  $t$  beschrieben.

Diese Ableitung findet sich als mathematischer Seitenblick im Anhang **D**.

- Die **SI-Einheit** der Aktivität ist das **Becquerel** Bq.

Da  $\ln 2$ ,  $N_0$  und auch der Exponentialteil  $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$  reine Zahlen sind, gilt für das Becquerel:

$$[A] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{\text{s}} =: 1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq}$$

1 Bq steht also für **“1 Zerfall pro Sekunde”**.

# Anhang A

## Nuklidmassen und Periodensystem

Die folgenden Tabellen entstammen dem Formelbuch:

- **DCK, DPK, DMK: Formeln, Tabellen, Begriffe**, 2. Auflage (Orell Füssli 2010)

### Tabelle der stabilen Nuklide (Lebensdauer $\geq 10^9$ Jahre)

Alle stabilen Isotope nach G. Audi et al. in Nuclear Physics A 729 (2003)

$Z$	Ordnungszahl
Sy	Chemisches Symbol
$A$	Nukleonenzahl
rel. H'keit	relative Häufigkeit des Isotops bezogen auf das Isotopengemisch auf der Erde, in % Atome
$m_a$	atomare Masse in u <span style="float: right;">► Umschlag hinten</span>
$M$	Molare Masse in $10^{-3}$ kg/mol

$Z$ Element	Sy	$A$	$m_a; M$	rel. H'keit	$Z$ Element	Sy	$A$	$m_a; M$	rel. H'keit
1 Wasserstoff	H	1	1.007 825 0	99.985	8 Sauerstoff	O	15	15.000 109	0.368
2 Helium	He	2	2.014 101 8	0.015			16	15.994 915	99.757
		3	3.016 029 3	0.000137			17	16.999 132	0.038
		4	4.002 603 3	99.999863			18	17.999 160	0.205
3 Lithium	Li	6	6.015 122	7.5	9 Fluor	F	19	18.998 403	100
		7	7.016 004	92.5	10 Neon	Ne	20	19.992 440	90.48
4 Beryllium	Be	9	9.012 182	100			21	20.993 847	0.27
5 Bor	B	10	10.012 937	19.9			22	21.991 385	9.25
		11	11.009 305	80.1	11 Natrium	Na	23	22.989 770	100
6 Kohlenstoff	C	12	12 (exakt)	98.93	12 Magnesium	Mg	24	23.985 042	78.99
		13	13.003 355	1.07			25	24.985 837	10.00
7 Stickstoff	N	14	14.003 074	99.632			26	25.982 593	11.01

Z	Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit	Z	Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit
13	Aluminium	Al	27	26.981 538	100				66	65.926 037	27.90
14	Silizium	Si	28	27.976 927	92.230				67	66.927 131	4.10
			29	28.976 495	4.683				68	67.924 848	18.75
			30	29.973 770	3.087				70	69.925 325	0.62
15	Phosphor	P	31	30.973 762	100	31	Gallium	Ga	69	68.925 581	60.108
16	Schwefel	S	32	31.972 071	94.93				71	70.924 705	39.892
			33	32.971 458	0.76	32	Germanium	Ge	70	69.924 250	20.84
			34	33.967 867	4.29				72	71.922 076	27.54
			36	35.967 081	0.02				73	72.923 459	7.73
17	Chlor	Cl	35	34.968 853	75.78				74	73.921 178	36.28
			37	36.965 903	24.22				76	75.921 403	7.61
18	Argon	Ar	36	35.967 546	0.337	33	Arsen	As	75	74.921 596	100
			38	37.962 732	0.063	34	Selen	Se	74	73.922 477	0.89
			40	39.962 383	99.600				76	75.919 214	9.37
19	Kalium	K	39	38.963 707	93.258				77	76.919 915	7.63
			40	39.963 999	0.012				78	77.917 310	23.77
			41	40.961 826	6.730				80	79.916 522	49.61
20	Calcium	Ca	40	39.962 591	96.941				82	81.916 700	8.73
			42	41.958 618	0.647	35	Brom	Br	79	78.918 338	50.69
			43	42.958 767	0.135				81	80.916 291	49.31
			44	43.955 481	2.086	36	Krypton	Kr	78	77.920 386	0.35
			46	45.953 693	0.004				80	79.916 378	2.28
			48	47.952 534	0.187				82	81.913 485	11.58
21	Scandium	Sc	45	44.955 910	100				83	82.914 136	11.49
22	Titan	Ti	46	45.952 629	8.25				84	83.911 507	57.00
			47	46.951 764	7.44				86	85.910 610	17.30
			48	47.947 947	73.72	37	Rubidium	Rb	85	84.911 789	72.17
			49	48.947 871	5.41				87	86.909 183	27.83
			50	49.944 792	5.18	38	Strontium	Sr	84	83.913 425	0.56
23	Vanadium	V	50	49.947 163	0.250				86	85.909 262	9.86
			51	50.943 964	99.750				87	86.908 879	7.00
24	Chrom	Cr	50	49.946 050	4.345				88	87.905 614	82.58
			52	51.940 512	83.789	39	Yttrium	Y	89	89.905 848	100
			53	52.940 654	9.501	40	Zirkonium	Zr	90	89.904 702	51.45
			54	53.938 885	2.365				91	90.905 644	11.22
25	Mangan	Mn	55	54.938 050	100				92	91.905 040	17.15
26	Eisen	Fe	54	53.939 615	5.845				94	93.906 316	17.38
			56	55.934 942	91.754				96	95.908 276	2.80
			57	56.935 399	2.119	41	Niob	Nb	93	92.906 378	100
			58	57.933 280	0.282	42	Molybdän	Mo	92	91.906 810	14.84
27	Kobalt	Co	59	58.933 200	100				94	93.905 088	9.25
28	Nickel	Ni	58	57.935 348	68.077				95	94.905 841	15.92
			60	59.930 791	26.223				96	95.904 679	16.68
			61	60.931 060	1.140				97	96.906 021	9.55
			62	61.928 349	3.635				98	97.905 408	24.13
			64	63.927 970	0.926				100	99.907 477	9.63
29	Kupfer	Cu	63	62.929 601	69.17	44	Ruthenium	Ru	96	95.907 598	5.54
			65	64.927 794	30.83				98	97.905 287	1.87
30	Zink	Zn	64	63.929 147	48.63				99	98.905 939	12.76

Z	Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit	Z	Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit
			100	99.904 220	12.60				131	130.905 082	21.18
			101	100.905 582	17.06				132	131.904 154	26.89
			102	101.904 350	31.55				134	133.905 395	10.44
			104	103.905 430	18.62				136	135.907 220	8.87
45	Rhodium	Rh	103	102.905 504	100	55	Cäsium	Cs	133	132.905 447	100
46	Palladium	Pd	102	101.905 608	1.02	56	Barium	Ba	130	129.906 310	0.106
			104	103.904 035	11.14				132	131.905 056	0.101
			105	104.905 084	22.33				134	133.904 503	2.417
			106	105.903 483	27.33				135	134.905 683	6.592
			108	107.903 894	26.46				136	135.904 570	7.854
			110	109.905 152	11.72				137	136.905 821	11.232
47	Silber	Ag	107	106.905 093	51.839				138	137.905 241	71.698
			109	108.904 756	48.161	57	Lanthan	La	138	137.907 107	0.090
48	Cadmium	Cd	106	105.906 458	1.25				139	138.906 348	99.910
			108	107.904 183	0.89	58	Cer	Ce	136	135.907 144	0.185
			110	109.903 006	12.49				138	137.905 986	0.251
			111	110.904 182	12.80				140	139.905 434	88.450
			112	111.902 757	24.13				142	141.909 240	11.114
			113	112.904 401	12.22	59	Praseodym	Pr	141	140.907 648	100
			114	113.903 358	28.73	60	Neodym	Nd	142	141.907 719	27.2
			116	115.904 755	7.49				143	142.909 810	12.2
49	Indium	In	113	112.904 061	4.29				144	143.910 083	23.8
			115	114.903 878	95.71				145	144.912 569	8.3
50	Zinn	Sn	112	111.904 821	0.97				146	145.913 112	17.2
			114	113.902 782	0.66				148	147.916 889	5.7
			115	114.903 346	0.34				150	149.920 887	5.6
			116	115.901 744	14.54	62	Samarium	Sm	144	143.911 995	3.07
			117	116.902 954	7.68				147	146.914 893	14.99
			118	117.901 606	24.22				148	147.914 818	11.24
			119	118.903 309	8.59				149	148.917 180	13.82
			120	119.902 197	32.58				150	149.917 271	7.38
			122	121.903 440	4.63				152	151.919 728	26.75
			124	123.905 275	5.79				154	153.922 205	22.75
51	Antimon	Sb	121	120.903 818	57.21	63	Europium	Eu	151	150.919 846	47.81
			123	122.904 216	42.79				153	152.921 226	52.19
52	Tellur	Te	120	119.904 020	0.09	64	Gadolinium	Gd	152	151.919 788	0.20
			122	121.903 047	2.55				154	153.920 862	2.18
			123	122.904 273	0.89				155	154.922 619	14.80
			124	123.902 819	4.74				156	155.922 120	20.47
			125	124.904 425	7.07				157	156.923 957	15.65
			126	125.903 306	18.84				158	157.924 101	24.84
			128	127.904 461	31.74				160	159.927 051	21.86
			130	129.906 223	34.08	65	Terbium	Tb	159	158.925 343	100
53	Iod	I	127	126.904 468	100	66	Dysprosium	Dy	156	155.924 278	0.06
54	Xenon	Xe	124	123.905 896	0.09				158	157.924 405	0.10
			126	125.904 269	0.09				160	159.925 194	2.34
			128	127.903 530	1.92				161	160.926 930	18.91
			129	128.904 779	26.44				162	161.926 795	25.51
			130	129.903 508	4.08				163	162.928 728	24.90

Z Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit	Z Element	Sy	A	$m_a; M$	rel. H'keit
		164	163.929 171	28.18			186	185.953 838	1.59
67 Holmium	Ho	165	164.930 319	100			187	186.955 748	1.96
68 Erbium	Er	162	161.928 775	0.14			188	187.955 836	13.24
		164	163.929 197	1.61			189	188.958 145	16.15
		166	165.930 290	33.61			190	189.956 445	26.26
		167	166.932 045	22.93			192	191.961 479	40.78
		168	167.932 368	26.78	77 Iridium	Ir	191	190.960 591	37.3
		170	169.935 460	14.93			193	192.962 924	62.7
69 Thulium	Tm	169	168.934 211	100	78 Platin	Pt	190	189.959 930	0.014
70 Ytterbium	Yb	168	167.933 894	0.13			192	191.961 035	0.782
		170	169.934 759	3.04			194	193.962 664	32.967
		171	170.936 322	14.28			195	194.964 774	33.832
		172	161.936 378	21.83			196	195.964 935	25.242
		173	172.938 207	16.13			198	197.967 876	7.163
		174	163.938 858	31.83	79 Gold	Au	197	196.966 552	100
		176	175.942 568	12.76	80 Quecksilber	Hg	196	195.965 815	0.15
71 Lutetium	Lu	175	174.940 768	97.41			198	197.966 752	9.97
		176	175.942 682	2.59			199	198.968 262	16.87
72 Hafnium	Hf	174	173.940 040	0.16			200	199.968 309	23.10
		176	175.941 402	5.26			201	200.970 285	13.18
		177	176.943 220	18.60			202	201.970 626	29.86
		178	177.943 698	27.28			204	203.973 476	6.87
		179	178.945 815	13.62	81 Thallium	Tl	203	202.972 329	29.524
		180	179.946 549	35.08			205	204.974 412	70.476
73 Tantal	Ta	180	179.947 466	0.012	82 Blei	Pb	204	203.973 029	1.4
		181	180.947 996	99.988			206	205.974 449	24.1
74 Wolfram	W	180	179.946 706	0.12			207	206.975 881	22.1
		182	181.948 206	26.50			208	207.976 636	52.4
		183	182.950 224	14.31	83 Bismut	Bi	209	208.980 383	100
		184	183.950 933	30.64	90 Thorium	Th	232	232.038 050	100
		186	185.954 362	28.43	92 Uran	U	234	234.040 946	0.005
75 Rhenium	Re	185	184.952 956	37.40			235	235.043 923	0.720
		187	186.955 751	62.60			238	238.050 783	99.275
76 Osmium	Os	184	183.952 491	0.02					

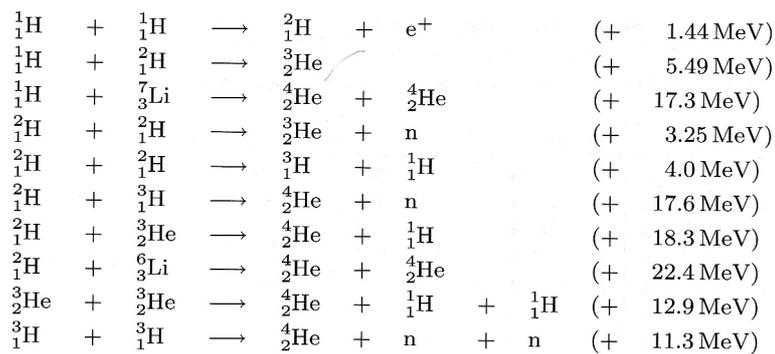
## Auswahl radioaktiver Nuklide

$m_a$	Atommasse in u	
$T_{1/2}$	Halbwertszeit (a = Jahr, d = Tag, h = Stunde, min = Minute, s = Sekunde)	
Zerfallsart	$\varepsilon$ Elektroneneinfang; $\bullet$ Zerfall <i>nicht</i> von $\gamma$ -Strahlung begleitet	
Energien	bei $\beta$ -Energien immer Maximalwerte; Zerfallsanteile < 2% weggelassen	

Nuklid	$m_a; M$	$T_{1/2}$	Zerfallsart	Energien (MeV)
n	1.008 664 915 7	613.9	s	$\beta^- \bullet$ 0.7824
H-3	3.016 049	12.32	a	$\beta^- \bullet$ 0.0186
Be-10	10.013 534	$1.51 \cdot 10^6$	a	$\beta^- \bullet$ 0.5558
C-14	14.003 242	$5.70 \cdot 10^3$	a	$\beta^- \bullet$ 0.1565
Na-22	21.994 436	2.6019	a	$\beta^+ \varepsilon \bullet$ $\beta^+$ : 0.545 / $\gamma$ : 1.275
Na-24	23.990 963	14.9590	h	$\beta^- \gamma$ $\beta^-$ : 1.393 / $\gamma$ : 1.369; 2.754
P-32	31.973 907	14.263	d	$\beta^- \bullet$ 1.710

Ar-41	40.964 501	109.61	min		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 1.198 / $\gamma$ : 1.293 (99%)
K-40	39.963 998	$1.261 \cdot 10^9$	a	$\beta^+$	$\varepsilon \beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 1.311 / $\gamma$ : 1.460 (11%)
Fe-55	54.938 293	2.737	a		$\varepsilon$	
Co-60	59.933 817	5.2713	a		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.318 / $\gamma$ : 1.173; 1.332
Kr-85	84.912 527	10.776	a		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.687
Rb-87	86.909 181	$4.923 \cdot 10^{10}$	a		$\beta^- \bullet$	0.283
Sr-89	88.907 451	50.53	d		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 1.495
Sr-90	89.907 738	28.79	a		$\beta^- \bullet$	0.546
Tc-99 m	98.906 255	6.015	h		$\gamma$	0.140 (90%)
Ag-108	107.905 956	2.37	min	$\beta^+$	$\varepsilon \beta^-$	$\beta^-$ : 1.649
Ag-110	109.906 107	24.6	s		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 2.89 / $\gamma$ : 0.658 (4.5%)
I-128	127.905 809	24.99	min	$\beta^+$	$\varepsilon \beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 2.12 / $\gamma$ : 0.443 (13%)
I-131	130.906 125	8.02070	d		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.606 / $\gamma$ : 0.364 (82%); komplex
Xe-135	134.907 227	9.14	h		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.90 / $\gamma$ : 0.250 (90%); 0.608 (3%)
Cs-137	136.907 090	30.1671	a		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 1.176 (6%); 0.514 (94%) / $\gamma$ : 0.662
Au-198	197.968 242	2.69517	d		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.961 / $\gamma$ : 0.412 (96%) (85%)
Pb-210	209.984 189	22.20	a	$\alpha$	$\varepsilon \gamma$	$\beta^-$ : 0.064 / $\gamma$ : 0.047 (4%)
Bi-208	207.979 742	$3.68 \cdot 10^5$	a		$\varepsilon \gamma$	$\gamma$ : 2.614
Bi-210	209.984 120	5.012	d	$\alpha$	$\beta^-$	$\beta^-$ : 1.162
Po-210	209.982 874	138.376	d	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 5.304
Rn-220	220.011 394	55.6	s	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 6.29
Rn-222	222.017 578	3.8235	d	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 5.49
Ra-226	226.025 410	$1.600 \cdot 10^3$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.78 (94%); 4.60 (6%) / $\gamma$ : komplex
Ac-227	227.027 752	21.772	a	$\alpha$	$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.045
Th-230	230.033 134	$7.538 \cdot 10^4$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.69 (76%); 4.62 (24%)
Th-232	232.038 055	$1.405 \cdot 10^{10}$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.01 (78%); 3.95 (22%)
Pa-231	231.035 884	$3.276 \cdot 10^4$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 5.0 (80%); 4.73 (8%) / $\gamma$ : komplex
U-233	233.039 635	$1.592 \cdot 10^5$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.82 (84%); 4.78 (13%) / $\gamma$ : komplex
U-234	234.040 952	$2.455 \cdot 10^5$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.77 (71%); 4.72 (28%) / $\gamma$ : komplex
U-235	235.043 930	$7.04 \cdot 10^8$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.58 (9%), 4.4 (75%) / $\gamma$ : komplex
U-238	238.050 788	$4.468 \cdot 10^9$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 4.20 (79%); 4.15 (21%)
U-239	239.054 293	23.45	min		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 1.19 / $\gamma$ : 0.044 (4%); 0.075 (49%)
Np-239	239.052 939	2.356	d		$\beta^- \gamma$	$\beta^-$ : 0.330 (42%); 0.436 (45%) / $\gamma$ : komplex
Pu-239	239.052 163	$2.411 \cdot 10^4$	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 5.16 (71%); 5.14 (17%) / $\gamma$ : komplex
Am-241	241.056 829	432.2	a	$\alpha$	$\gamma$	$\alpha$ : 5.49 (85%); 5.44 (13%) / $\gamma$ : komplex

### Einige Fusionsreaktionen



### Periodensystem der Elemente

Gruppe	I A	II A											III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A	
			1 H 1.0079																2 He 4.003
	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B 10.81	6 C 12.011	7 N 14.007	8 O 15.999	9 F 18.998	10 Ne 20.180	
	11 Na 22.990	12 Mg 24.305											13 Al 26.982	14 Si 28.086	15 P 30.974	16 S 32.066	17 Cl 35.453	18 Ar 39.948	
	19 K 39.098	20 Ca 40.078	21 Sc 44.956	22 Ti 47.867	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.938	26 Fe 55.845	27 Co 58.933	28 Ni 58.693	29 Cu 63.546	30 Zn 65.39	31 Ga 69.723	32 Ge 72.61	33 As 74.922	34 Se 78.96	35 Br 79.904	36 Kr 83.80	
	37 Rb 85.468	38 Sr 87.62	39 Y 88.906	40 Zr 91.224	41 Nb 92.906	42 Mo 95.94	43 Tc [98]	44 Ru 101.07	45 Rh 102.906	46 Pd 106.42	47 Ag 107.868	48 Cd 112.41	49 In 114.818	50 Sn 118.710	51 Sb 121.76	52 Te 127.60	53 I 126.904	54 Xe 131.29	
	55 Cs 132.905	56 Ba 137.327	57 La 138.906	58 Hf 178.49	59 Ta 180.948	60 W 183.84	61 Re 186.207	62 Os 190.23	63 Ir 192.217	64 Pt 195.078	65 Au 196.967	66 Hg 200.59	67 Tl 204.383	68 Pb 207.2	69 Bi 208.980	70 Po [209]	71 At [210]	72 Rn [222]	
	87 Fr [223]	88 Ra [226]	89 Ac [227]	90 Rf [261]	91 Db [262]	92 Sg [263]	93 Bh [262]	94 Hs [265]	95 Mt [266]	96 Ds [271]	97 Rg [272]	98 Uud [277]	99 Uut [284]	100 Uuq [289]	101 Uup [288]	102 Uuh [292]	103 Uus [?]	104 Uuo [293]	

58 Ce 140.116	59 Pr 140.908	60 Nd 144.24	61 Pm [145]	62 Sm 150.36	63 Eu 151.964	64 Gd 157.25	65 Tb 158.925	66 Dy 162.50	67 Ho 164.930	68 Er 167.26	69 Tm 168.934	70 Yb 173.04	71 Lu 174.967
90 Th 232.038	91 Pa 231.036	92 U 238.029	93 Np [237]	94 Pu [244]	95 Am [243]	96 Cm [247]	97 Bk [247]	98 Cf [251]	99 Es [252]	100 Fm [257]	101 Md [258]	102 No [259]	103 Lr [262]

In Klammern: Nukleonenzahl des Isotops mit der längsten Halbwertszeit.

## Anhang B

# Bindungskräfte und -energien in bekannten Beispielen

### B.1 Bindungskräfte

Die aneinander gebundenen Körper besitzen offenbar Eigenschaften, aufgrund derer sie sich gegenseitig anziehen. Es gibt also eine **Kraftsorte**, welche an eine bestimmte **Materieeigenschaft** gekoppelt ist. Zwei Ihnen bereits bekannte Beispiele hierfür sind:

**Coulombkraft:** Ist ein Körper positiv und ein anderer negativ **elektrisch geladen** (= Materieeigenschaft), so ziehen sich mittels der **Coulombkraft** (= Kraftsorte) an.

Damit kann man z.B. die Existenz von Atomen und chemischen Verbindungen begründen: Positiv geladene Atomkerne ziehen negativ geladene Elektronen an. In chemischen Verbindungen werden diese Teilchen durch die Coulombkraft auf ihren "Positionen" gehalten.

**Gravitation:** Zwei Körper ziehen sich aufgrund ihrer **Massen** (= Materieeigenschaft) gegenseitig an. Diese Kraft nennen wir **Gravitation** resp. **Schwerkraft** (= Kraftsorte).

Z.B. sind wir Menschen durch die Schwerkraft an die Erde gebunden. . .

### B.2 Bindungsenergien

Die Lage zweier Körper ist – immer noch aufgrund bestimmter **Materieeigenschaften** – im **gebundenen Zustand** offenbar energetisch günstiger als im voneinander losgelösten. Solche Energien der Lage bezeichnet man als **potentielle Energien**:

**Potentielle elektrische Energie:** Zwei elektrisch geladene Körper mit ungleichem Ladungsvorzeichen sind aneinander gebunden, weil dieser gebundene Zustand energetisch günstiger ist als der voneinander losgelöste. Elektronen gruppieren sich also um Atomkerne, weil sie in diesem gebundenen Zustand weniger potentielle elektrische Energie besitzen als im freien.

Chemische Bindungen werden von Atomen eingegangen, weil dadurch nochmals potentielle elektrische Energie abgegeben werden kann. Beim Eingehen der Bindung wird Energie frei → **exotherme Reaktion**. Umgekehrt muss zum Aufbrechen einer chemischen Bindung Energie zugeführt werden → **endotherme Reaktion**.

**Potentielle gravitative Energie:** Massen besitzen im gebundenen Zustand weniger potentielle gravitative Energie. Wir sind also an die Erde gebunden, weil wir in diesem Zustand weniger potentielle gravitative Energie besitzen, als wenn wir irgendwo durch das Weltall driften würden. Wollten Sie sich von der Erde lösen, so müsste Ihnen hierfür eine beachtliche Menge Energie zugeführt werden. Genau dies vollbringt eine Rakete, die Astronauten ins Weltall befördert!<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Tatsächlich müsste für jedes Kilogramm Masse, das man ausgehend von der Erdoberfläche vollständig von der Erde loslösen wollte, eine Energie von gerade etwa 60 Millionen Joule aufgebracht werden. Die Bindungsenergie pro Masse beträgt an der Erdoberfläche also etwa  $60 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$ .

## Anhang C

# Das Tröpfchenmodell der Kernphysik

Da Atomkerne Vielteilchensysteme sind, lassen sich zu ihnen kaum analytische Berechnungen anstellen. Man ist auf empirische Modelle angewiesen. Hier die gebräuchlichsten darunter:

**Tröpfchenmodell:** Der Atomkern wird als geladenes Flüssigkeitströpfchen mit Oberflächenspannung betrachtet. Dieses Modell erklärt die Bindungsenergien und Stabilitätsbedingungen von Kernen.

**Fermigas-Modell:** Dieses Modell beschreibt den Kern als Gas von nicht wechselwirkenden Nukleonen (Fermionen) in einem Kastenpotential. Es erklärt qualitativ diskrete Energieniveaus und liefert den Zusammenhang zwischen Kerngrösse und Potentialtiefe.

**Schalenmodell:** Hierin wird die Wellenfunktion eines Nukleons im mittleren effektiven zentralen Kernpotential berechnet. Dieses Modell erlaubt die näherungsweise Berechnung der Energieniveaus.

Im folgenden soll nur das Tröpfchenmodell kurz umrissen werden.

### Vorbemerkungen

Für Kernteilchen ( $p$  und  $n$ ) verwenden wir den Oberbegriff **Nukleonen**. Warum eigentlich? Weshalb soll man für nur zwei verschiedene Teilchen einen Oberbegriff einführen. Der Grund dafür ist die **Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte**. Man weiss, dass die Massen von  $p$  und  $n$  sich nur wenig unterscheiden ( $\lesssim 1\%$ ) und dass die Kernkraft zwischen den Partnern jeweils annähernd die gleiche ist:

$$F_{\text{Kern}}(p, p) = F_{\text{Kern}}(n, n) \approx F_{\text{Kern}}(p, n)$$

Dies rechtfertigt es, Proton und Neutron als ein Teilchen – eben *das* Nukleon – anzusehen, das in zwei verschiedenen Zuständen ( $p$  und  $n$ ) in Erscheinung tritt. Die Coulombabstossung, die nur für Protonen eine Rolle spielt, muss natürlich separat berücksichtigt werden.

In einem Kern nimmt jedes Nukleon etwa gleich viel Raum ein. Das Kernvolumen  $V$  ist somit in etwa proportional zur Nukleonenzahl  $A$ . Und somit sind die Radien  $R$  der Kerne annähernd proportional zur 3. Wurzel aus der Nukleonenzahl:

$$R \approx R_0 \cdot \sqrt[3]{A} \quad \text{mit} \quad 1.1 \text{ fm} < R_0 < 1.4 \text{ fm} \quad (1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m})$$

Daraus folgt weiter, dass die Nukleon- und damit auch die Massendichte innerhalb eines Kerns annähernd konstant sind:

$$\text{Nukleonendichte: } \eta \approx 0.17 \frac{\text{Nukleonen}}{\text{fm}^3} \qquad \text{Massendichte: } \rho \approx 2.8 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Kernmaterie ist somit extrem dichte Materie.<sup>1</sup>

### Das Tröpfchenmodell im Überblick

Da die meisten Kerne von mehr oder weniger kugelförmiger Gestalt sind, kann man versuchen, die Massen oder Bindungsenergien aus einem Modell abzuleiten, das den Kern als sphärisches Flüssigkeitströpfchen beschreibt. Dieses Tröpfchenmodell wurde 1935 von **Carl-Friedrich von Weizsäcker** und anderen entwickelt. Von der Quantenmechanik wird das Pauli-Prinzip verwendet, Schaleneffekte werden jedoch nicht mitberücksichtigt. Die Bindungsenergie  $E_B$  eines Kernes mit  $Z$  Protonen und Massenzahl  $A = Z + N$  setzt sich darin folgendermassen zusammen:

$$E_B(A, Z) = \underbrace{a_V A}_{\text{Volumenenergie } E_V} - \underbrace{a_F A^{\frac{2}{3}}}_{\text{Oberflächenenergie } E_F} - \underbrace{a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}}_{\text{Coulombenergie } E_C} - \underbrace{a_A \frac{(2Z-A)^2}{A}}_{\text{Asymmetrienergie } E_A} + \underbrace{\begin{Bmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}}_{\text{Paarungsenergie } E_P} a_P \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$$

Die genauen Werte der Parameter  $a_V$ ,  $a_F$ ,  $a_C$ ,  $a_A$  und  $a_P$  müssen empirisch, d.h. im Abgleich mit den experimentell erhaltenen Kerndaten, bestimmt werden. Mit folgenden Werte werden die effektiven Daten insgesamt am besten abgedeckt. Es können im Einzelfall aber immer noch Abweichungen in der Grössenordnung einiger MeV auftreten:

$$a_V = 15.56 \text{ MeV}$$

$$a_F = 17.23 \text{ MeV}$$

$$a_C = 0.705 \text{ MeV}$$

$$a_A = 23.28 \text{ MeV}$$

$$a_P = 12 \text{ MeV}$$

Dabei wird das Vorzeichen des Paarungsenergie-Terms  $E_P$  dadurch bestimmt, ob der Kern eine gerade (g) oder ungerade (u) Protonenzahl  $P$  und ebenso eine gerade oder ungerade Neutronenzahl  $N$  aufweist. Dabei gilt:<sup>2</sup>

$$\text{sign}(E_P) = \begin{cases} +1 & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug-Kerne} \\ -1 & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Zum Vergleich: Die grösste Dichte einer aus Atomen aufgebauten, makroskopischen Struktur beträgt etwa  $22\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2.2 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

<sup>2</sup>Der mathematische Ausdruck  $\text{sign}$  steht für lat. *signum*, was übersetzt *Vorzeichen* bedeutet.  $\text{sign}(x)$  ruft also das Vorzeichen der Zahl  $x$  ab. So ist  $\text{sign}(-7) = -1$ ,  $\text{sign}(3) = +1$  und  $\text{sign}(0) = 0$ .

### Volumenenergie $E_V$

Die Volumenenergie ist der dominierende Term in der Bindungsenergie. Hierin kommt direkt die starke Kernkraft zwischen den Nukleonen zum Ausdruck. Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte steht jedes Nukleon nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn in direkter Wechselwirkung. Die Anzahl dieser Nachbarn ist aber in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte ebenfalls konstant. Deshalb trägt jedes Nukleon etwa gleich viel zur Bindungsenergie des Kerns bei, nämlich knapp 16 MeV. Die Volumenenergie ist also proportional zur Massenzahl  $A$ :

$$E_V = a_V \cdot A \quad \text{mit} \quad a_V = 15.56 \text{ MeV}$$

### Oberflächenenergie $E_F$

Diejenigen Nukleonen, die sich an der Kernoberfläche befinden, sind weniger stark gebunden als die im Innern des Kernvolumens, weil sie weniger unmittelbare Nachbarn haben. Die Zahl der Nukleonen an der Oberfläche ist proportional zu  $R^2$ . Der Kernradius  $R$  wiederum ist proportional zur dritten Wurzel der Nukleonenzahl, also zu  $A^{\frac{1}{3}}$ . Somit ergibt sich ein negativer Korrekturterm für die Kernbindungsenergie, der proportional zu  $A^{\frac{2}{3}}$  ist:

$$E_F = -a_F \cdot A^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad a_F = 17.23 \text{ MeV}$$

Dieser Term entspricht der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit.<sup>3</sup> Es ist damit auch verständlich, weshalb stabile Kerne häufig Kugelgestalt annehmen.

### Coulombenergie $E_C$

Die Protonen im Kern stoßen sich wegen ihrer gleichen Ladungen ab, was dem Zusammenhalt des Kerns entgegenwirkt. Jedes der  $Z$  Protonen wechselwirkt mit den  $Z - 1$  anderen Protonen. In der Elektrostatik zeigt man, dass die elektrische Energie einer homogen geladenen Kugel proportional zu  $\frac{1}{R}$  ist. Somit ergibt sich hier ein negativer Term folgender Gestalt:

$$E_C = -a_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} \quad \text{mit} \quad a_C = 0.705 \text{ MeV}$$

Vor allem bei leichten Kernen sind weitere Korrekturen nötig (Korrelationen der  $p$ 's, Oberflächeneffekte), weil diese deutlich von der Vorstellung homogen geladener Kugeln abweichen.

### Asymmetrieenergie $E_A$

Nukleonen sind Fermionen.<sup>4</sup> Für solche Fermionen gilt stets das sogenannte Pauli-Prinzip für identische Teilchen: Jeder Zustand kann maximal von 2 Fermionen mit entgegengesetztem Spin belegt werden. In Atomkernen bedeutet dies: Die diskreten Energieniveaus eines Kerns können je mit 2 Protonen und 2 Neutronen besetzt werden. In der Folge besetzen die Nukleonen in Kernen gleicher Massenzahl  $A$  genau dann den Zustand niedrigster Energie, wenn es gleich viele Neutronen wie Protonen gibt. Dies wird in Abb. C.1 veranschaulicht.

---

<sup>3</sup>Zwischen den Molekülen in einem Flüssigkeitstropfen wirken zwischenmolekulare Kräfte, die für den Zusammenhalt des Tropfens sorgen. In der Regel sind dies van-der-Waals-Kräfte oder bei Wasser eben Wasserstoffbrücken-Bindungen.

<sup>4</sup>Fermion = Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ .

Es ist daher plausibel, dass ein negativer Term entsteht, in dem die Differenz zwischen Protonen- und Neutronenzahl auftritt ( $Z - N = Z - (A - Z) = 2Z - A$ ):

$$E_A = -a_A \cdot \frac{(2Z - A)^2}{A} \quad \text{mit} \quad a_A = 23.28 \text{ MeV}$$

Auf eine genauere Herleitung dieses Asymmetrieterms wird an dieser Stelle verzichtet.

### Paarungsenergie $E_P$

Kerne mit geradem  $Z$  und geradem  $N$  sind stabiler als Kerne, bei welchen  $Z$  und  $N$  ungerade sind. Wir verwenden folgenden Ansatz für die Paarungsenergie:

$$E_P = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \cdot a_P \cdot \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \quad \text{mit} \quad a_P = 12 \text{ MeV}$$

Dies ist eine rein empirische Beziehung, die den allgemeinen Verlauf der Messresultate gut wiedergibt. Besonders bei den "magischen Zahlen" (8, 20, 28, 50, 82, 126) treten allerdings grössere Abweichungen auf. Diese haben mit der Schalenstruktur des Kerns zu tun und können mit dem Tröpfchenmodell nicht erklärt werden.

Dass die Paarungsenergie von grosser Bedeutung ist, ersieht man beispielsweise aus der Tatsache, dass im natürlichen Isotopengemisch der stabilen Kerne 165 gg-Kerne, 105 ug-Kerne und nur 4 uu-Kerne auftreten! Letztere sind  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$  und  ${}^{14}_7\text{N}$ .

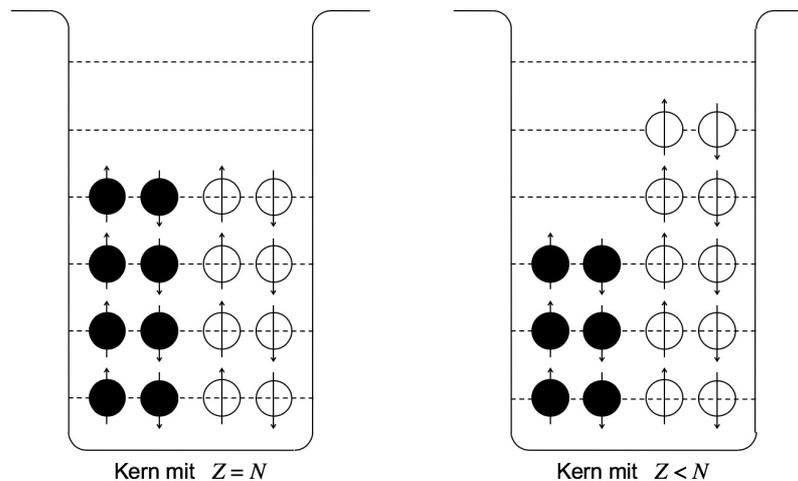


Abbildung C.1: Symmetrische/asymmetrische Besetzung der Energieniveaus im Kernpotential.

## Anhang D

# Die mathematische Herleitung der Aktivität $A(t)$

**Aktivität = Zerfallsrate = Ableitung des Zerfallsfunktion  $N(t)$**

Die **Aktivität** einer radioaktiven Quelle beschreibt, wie viele Radionuklide in dieser Quelle pro Zeiteinheit zerfallen. D.h., die Aktivität ist gleich der aktuellen **Veränderungsrate** der Anzahl  $N(t)$  noch vorhandener Radionuklide. Damit entspricht die Aktivität aber gerade der **Ableitung von  $N(t)$  nach der Zeit  $t$** , denn die Veränderungsrate einer Grösse ist stets durch deren Ableitung gegeben!

Die Ableitung von  $N(t)$  ist allerdings stets negativ, denn der Graph von  $N(t)$  in Abb. 5.2 ist streng monoton fallend  $\Rightarrow N'(t) < 0$ .<sup>1</sup> Wir wollen die Aktivität einer Quelle aber mit einem positiven Wert beschreiben. Deshalb definieren wir sie als das Negative der abgeleiteten Zerfallsfunktion:

$$\text{Aktivität zum Zeitpunkt } t: \quad A(t) := -N'(t) > 0 \quad \text{da } N'(t) < 0$$

### Die Ableitung des Zerfallsgesetzes

Um das Zerfallsgesetz abzuleiten benötigen wir Input aus der Differentialrechnung:

$$\text{Ableitung einer Exponentialfunktion:} \quad [a^t]' = a^t \cdot \ln a$$

$$\text{Kettenregel für verschachtelte Funktionen:} \quad [u(v(t))]' = u'(v) \cdot v'(t)$$

---

<sup>1</sup>Die Steigung des Graphen in Abb. 5.2 ist ja genau die Ableitung  $N'(t)$ .

Die Zerfallsfunktion  $N(t)$  ist punkto Zeitvariable  $t$  verschachtelt aufgebaut. Wir definieren die Teilfunktionen  $u(v)$  und  $v(t)$  und leiten diese einzeln ab:

$$\text{Gesamtfunktion: } N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = u(v(t))$$

$$\text{Innere Funktion: } v(t) := \frac{t}{T_{1/2}} \Rightarrow v'(t) = \frac{1}{T_{1/2}}$$

$$\text{Äussere Funktion: } u(v) := N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^v \Rightarrow u'(v) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^v \cdot \ln \frac{1}{2}$$

Setzen wir die Ableitung nach der Kettenregel zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} N'(t) &= u'(v) \cdot v'(t) && | u'(v) \text{ und } v'(t) \text{ einsetzen} \\ &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^v \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_{1/2}} && | v = \frac{t}{T_{1/2}} \text{ einsetzen} \\ &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T_{1/2}} && | N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = N(t) \text{ und } \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \\ &= -N(t) \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{aligned}$$

Zuletzt haben wir ein anderes Logarithmengesetz verwendet:

$$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b \quad \text{Konkret im Beispiel: } \ln \frac{1}{2} = \ln (2^{-1}) = -\ln 2$$

Nach dieser Ableitung lässt sich nun für die Aktivität schreiben:

$$A(t) = -N'(t) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N(t) = \frac{\ln 2 \cdot N_0}{T_{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Die Aktivität  $A(t)$  einer Quelle ist also proportional zur Anzahl noch vorhandener Kerne  $N(t)$  – was nicht sonderlich erstaunen dürfte: Je mehr Kerne in der Quelle noch vorhanden sind und zerfallen können, umso mehr Kerne werden dies z.B. pro Sekunde auch tun.

Schlussendlich notieren wir den Ausdruck für die Aktivität noch so, wie wir ihn ab jetzt brauchen werden und wie er in Gleichung (5.2) auf Seite 35 festgehalten wird:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \text{mit } A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}}$$

Dabei ist  $A_0$  die Aktivität zum Startzeitpunkt  $t = 0$ .