

Lösungen zur Kernphysik – Serie 3

1. Ein Vergleich zweier Kernbindungsenergien

- (a) Wir berechnen die beiden mittleren Bindungsenergien pro Nukleon. Zunächst erhalten wir für die Massendefekte:

$$\begin{aligned}\Delta M({}^4_2\text{He}) &= 2 m_p + 2 m_n - m_{\text{Kern}}({}^4_2\text{He}) \\ &= 2 m_p + 2 m_n - [m_A({}^4_2\text{He}) - 2 m_e] \\ &= 2 m_p + 2 m_n - m_A({}^4_2\text{He}) + 2 m_e \\ &= 2 m_p + 2 m_n - 4.002\,6033 \text{ u} + 2 m_e = 5.044 \cdot 10^{-29} \text{ kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta M({}^8_4\text{Be}) &= 4 m_p + 4 m_n - m_{\text{Kern}}({}^8_4\text{Be}) = \dots \\ &= 4 m_p + 4 m_n - 8.005\,3051 \text{ u} + 4 m_e = 1.007 \cdot 10^{-28} \text{ kg}\end{aligned}$$

Für die Bindungsenergien folgt daraus:

$$E_B({}^4_2\text{He}) = \Delta M({}^4_2\text{He}) \cdot c^2 = 4.533 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 28.30 \text{ MeV}$$

$$E_B({}^8_4\text{Be}) = \Delta M({}^8_4\text{Be}) \cdot c^2 = 9.052 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 56.50 \text{ MeV}$$

Und schliesslich für die mittleren Bindungsenergien pro Nukleon:

$$\frac{E_B({}^4_2\text{He})}{4} = \frac{28.30 \text{ MeV}}{4} = \underline{\underline{7.074 \text{ MeV}}}$$

$$\frac{E_B({}^8_4\text{Be})}{8} = \frac{56.50 \text{ MeV}}{8} = \underline{\underline{7.062 \text{ MeV}}}$$

Damit sind die Nukleonen im He-4-Kern minimal besser gebunden. **Der Helium-4-Peak ist ein ganz klein wenig höher als der Beryllium-8-Peak.**

Anmerkung: Obwohl Be-8 in unserer Betrachtung nun der "Verlierer" ist, handelt es sich dabei doch um einen Peak im Diagramm. Alle seine unmittelbaren Nachbarn besitzen geringere $\frac{E_B}{A}$ -Werte. Umso erstaunlicher ist es, dass Be-8 nicht stabil ist. Den Grund dafür verstehen wir nun aber gut. Der Beryllium-8-Kern kann sich direkt in zwei Helium-4-Kerne aufteilen, wobei offensichtlich ein ganz klein wenig Bindungsenergie frei wird.

- (b) Im Diagramm wird gesagt, die Kurve nimmt ihr "Maximum bei Ni-62" an. Dies muss folglich der Kern sein, in dem Nukleonen am besten gebunden sind. Wir berechnen seine mittlere Bindungsenergie pro Nukleon:

$$\begin{aligned}\Delta M({}^{62}_{28}\text{Ni}) &= 28 m_p + 34 m_n - m_{\text{Kern}}({}^{62}_{28}\text{Ni}) \\ &= 28 m_p + 34 m_n - [m_A({}^{62}_{28}\text{Ni}) - 28 m_e] \\ &= 28 m_p + 34 m_n - m_A({}^{62}_{28}\text{Ni}) + 28 m_e \\ &= 28 m_p + 34 m_n - 61.928\,349 \text{ u} + 28 m_e = 9.720 \cdot 10^{-28} \text{ kg}\end{aligned}$$

$$E_B({}^{62}_{28}\text{Ni}) = \Delta M({}^{62}_{28}\text{Ni}) \cdot c^2 = 8.736 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 545.3 \text{ MeV}$$

$$\frac{E_B({}^{62}_{28}\text{Ni})}{62} = \frac{545.3 \text{ MeV}}{62} = \underline{\underline{8.79 \text{ MeV}}}$$

(c) Erneut gilt es eine Berechnung der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon zu erledigen:

$$\begin{aligned}
 \Delta M(^{208}_{82}\text{Pb}) &= 82 m_p + 126 m_n - m_{\text{Kern}}(^{208}_{82}\text{Pb}) \\
 &= 82 m_p + 126 m_n - [m_A(^{208}_{82}\text{Pb}) - 82 m_e] \\
 &= 82 m_p + 126 m_n - m_A(^{208}_{82}\text{Pb}) + 82 m_e \\
 &= 82 m_p + 126 m_n - 207.976\,636 \text{ u} + 82 m_e = 2.917 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
 E_B(^{208}_{82}\text{Pb}) &= \Delta M(^{208}_{82}\text{Pb}) \cdot c^2 = 2.622 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1636.4 \text{ MeV} \\
 \frac{E_B(^{208}_{82}\text{Pb})}{208} &= \frac{1636.4 \text{ MeV}}{208} = \underline{\underline{7.87 \text{ MeV}}}
 \end{aligned}$$

(d) Das Proton ist der kleinstmögliche Atomkern, nämlich derjenige des normalen H-Atoms. Da ein einzelnes Proton aber gar keine Verbindung mehrerer Nukleonen ist, hat es auch gar keine Bindungsenergie abgegeben um zum Kern eines H-Atoms zu werden. Die Antwort lautet also: $E_B = 0$.

2. Drei mittlere Kernbindungsenergien

(a) Ich zeige die Berechnungen für $^{20}_8\text{O}$ vor und liste anschliessend alle Resultate tabellarisch auf. Für $^{20}_8\text{O}$ lautet die virtuelle Bildungsreaktion in einem einzigen Schritt:



Die bei dieser Reaktion freigesetzte Energie entspricht der Bindungsenergie E_B des $^{20}_8\text{O}$ -Kerns. Für den Massendefekt ΔM , für E_B und für die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon $\frac{E_B}{A}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= 8 m_p + 12 m_n - m_{\text{Kern}}(^{20}_8\text{O}) \\
 &= 8 m_p + 12 m_n - [m_A(^{20}_8\text{O}) - 8 m_e] \\
 &= 8 m_p + 12 m_n - m_A(^{20}_8\text{O}) + 8 m_e \\
 &= 8 m_p + 12 m_n - 20.004\,075 \text{ u} + 8 m_e \\
 &= \underline{\underline{2.698 \cdot 10^{-28} \text{ kg}}} \\
 \Rightarrow E_B &= \Delta M \cdot c^2 = 2.698 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot c^2 = 2.425 \cdot 10^{-11} \text{ J} = \underline{\underline{151.4 \text{ MeV}}} \\
 \Rightarrow \frac{E_B}{A} &= \frac{151.4 \text{ MeV}}{20} = \underline{\underline{7.57 \text{ MeV}}}
 \end{aligned}$$

Bei diesen Rechnungen habe ich die im TI-30X Pro Multiview abgespeicherten Konstanten verwendet und jeweils gleich mit dem Zwischenresultat im Display weitergerechnet. Bei der Umrechnung in MeV habe ich den Wert $1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ benutzt.

Für die drei Kerne ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 \text{O-20} : \Delta M &= 2.698 \cdot 10^{-28} \text{ kg} E_B = 151.4 \text{ MeV} \frac{E_B}{A} = \underline{\underline{7.57 \text{ MeV}}} \\
 \text{Ne-20} : \Delta M &= 2.864 \cdot 10^{-28} \text{ kg} E_B = 160.6 \text{ MeV} \frac{E_B}{A} = \underline{\underline{8.03 \text{ MeV}}} \\
 \text{Mg-20} : \Delta M &= 2.399 \cdot 10^{-28} \text{ kg} E_B = 134.6 \text{ MeV} \frac{E_B}{A} = \underline{\underline{6.73 \text{ MeV}}}
 \end{aligned}$$

- (b) Der stabile Kern muss Ne-20 sein, denn in diesem Kern haben die Nukleonen im Mittel am meisten Bindungsenergie abgegeben: Die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon $\frac{E_B}{A}$ ist bei Ne-20 am grössten. In beiden anderen Kernen hätten die Nukleonen noch das Potential Masse resp. Bindungsenergie abzugeben, wenn sich z.B. ein Neutron in ein Proton umwandelt (β^- -Zerfall des O-20-Kerns) oder umgekehrt ein Proton zu einem Neutron wird (β^+ -Zerfall des Mg-20-Kerns).
- (c) Die Grafik zeigt die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon $\frac{E_B}{A}$ in Abhängigkeit der Kerngrösse resp. der Nukleonenzahl A . Das Ne-20-Nuklid muss aufgrund des berechneten Wertes ($\frac{E_B}{A} = 8.03 \text{ MeV}$) einerseits, aber auch aufgrund seiner Stabilität andererseits der Spitze über der Stelle $A = 20$ entsprechen. Die beiden anderen Kerne entsprechen demnach zwei Punkten deutlich unterhalb dieser kleinen Spitze. Tatsächlich finden wir zwei passende Punkte, der eine etwa bei $\frac{E_B}{A} = 7.6 \text{ MeV}$ und der andere nochmals weiter unten bei etwa $\frac{E_B}{A} = 6.7 \text{ MeV}$. Das entspricht sehr gut den beiden berechneten Werten.
- Mit dieser Grafik wird die Aussage in der Antwort zu (b) nochmals veranschaulicht: O-20 und Mg-20 könnten durch einen radioaktiven Zerfall nochmals Bindungsenergie abgeben, was den Nukleonen, aus denen sie bestehen, im Mittel zu einer höheren Bindungsenergie verhelfen würde.

3. Energetisches zu β^- -Zerfällen

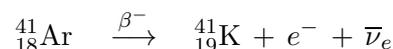
- (a) Das Elektron-Antineutrino besitzt eine so geringe Masse, dass wir sie bei der Berechnung des Massenverlustes stets vernachlässigen. Wir erhalten demnach für den Massenverlust:

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_{\text{Kern}}(^{90}_{38}\text{Sr}) - m_{\text{Kern}}(^{90}_{39}\text{Y}) - m_e \\ &= [m_A(^{90}_{38}\text{Sr}) - 38 m_e] - [m_A(^{90}_{39}\text{Y}) - 39 m_e] - m_e \\ &= m_A(^{90}_{38}\text{Sr}) - m_A(^{90}_{39}\text{Y}) \\ &= (89.907\,738 - 89.907\,152) \text{ u} \\ &= 9.731 \cdot 10^{-31} \text{ kg}\end{aligned}$$

Wie schon beim α -Zerfall stellen wir fest, dass sich die Elektronenmassen komplett aus der Rechnung wegstreichen lassen. Es folgt für die freigesetzte Energie:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 9.731 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot c^2 = 8.746 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \underline{\underline{0.546 \text{ MeV}}}$$

- (b) Analog zum Zerfall von Sr-90 ergibt sich für den Zerfall von Ar-41:



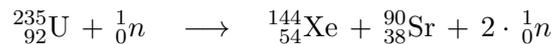
Daraus folgt für die Zerfallsenergie:

$$\begin{aligned}\Delta M &= m_A(^{41}_{18}\text{Ar}) - m_A(^{41}_{19}\text{K}) \\ &= (40.964\,501 - 40.961\,826) \text{ u} \\ &= 4.442 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\ \Rightarrow \Delta E &= \Delta M \cdot c^2 = 4.442 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 = 3.992 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \underline{\underline{2.49 \text{ MeV}}}\end{aligned}$$

- (c) Bei den angegebenen Energien für die β -Teilchen kann es sich nur um Maximalwerte handeln, weil eben auch das Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_e$ einen Teil der freigesetzten Energie als kinetische Energie abbekommt. Die Aufteilung der Energie zwischen Elektron und Elektron-Antineutrino kann von Zerfall zu Zerfall variieren. Daher ist keine genauere Angaben als eine theoretische Obergrenze für die kinetische Energie des Elektrons möglich.

4. Zuwachs der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon bei der Kernspaltung

(a) Die vollständige Spaltungsreaktion lautet:



(b) Da es sich um eine typische Kernspaltungsreaktion handelt, streichen sich die Elektronenmassen aus der Rechnung heraus. Für die frei gesetzte Energiemenge ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Delta M &= m_{\text{Kern}}({}_{92}^{235}\text{U}) + m_n - m_{\text{Kern}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) - m_{\text{Kern}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) - 2 m_n \\ &= m_{\text{A}}({}_{92}^{235}\text{U}) - m_{\text{A}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) - m_{\text{A}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) - m_n \\ &= (235.043\,923 - 143.938\,945 - 89.907\,738) \text{u} - m_n \\ &= 3.131 \cdot 10^{-28} \text{kg} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 3.131 \cdot 10^{-28} \text{kg} \cdot c^2 = 2.814 \cdot 10^{-11} \text{J} = \underline{\underline{175.7 \text{MeV}}}$$

(c) Alle drei Kerne sind grösser als die stabilsten Kerne mit $A \approx 60$. Am nächsten bei diesen stabilsten Kernen liegt ${}_{90}\text{Sr}$. Vermutlich sind die Nukleonen in diesem Kern am besten gebunden.

(d) Die Bindungsenergie eines einzelnen Neutrons beträgt 0, denn es handelt sich um ein einzelnes Nukleon, das eben nicht Teil einer Kernbindung ist.

Zunächst erhalten wir für die Massendefekte der weiteren Kerne:

$$\begin{aligned} \Delta M({}_{92}^{235}\text{U}) &= 92 m_p + 143 m_n - m_{\text{Kern}}({}_{92}^{235}\text{U}) = 92 m_p + 143 m_n - [m_{\text{A}}({}_{92}^{235}\text{U}) - 92 m_e] \\ &= 92 m_p + 143 m_n - m_{\text{A}}({}_{92}^{235}\text{U}) + 92 m_e \\ &= 92 m_p + 143 m_n - 235.043\,923 \text{u} + 92 m_e = 3.180 \cdot 10^{-27} \text{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M({}_{54}^{144}\text{Xe}) &= 54 m_p + 90 m_n - m_{\text{Kern}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) = 54 m_p + 90 m_n - [m_{\text{A}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) - 54 m_e] \\ &= 54 m_p + 90 m_n - m_{\text{A}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) + 54 m_e \\ &= 54 m_p + 90 m_n - 143.938\,945 \text{u} + 54 m_e = 2.098 \cdot 10^{-27} \text{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M({}_{38}^{90}\text{Sr}) &= 38 m_p + 52 m_n - m_{\text{Kern}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) = 38 m_p + 52 m_n - [m_{\text{A}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) - 38 m_e] \\ &= 38 m_p + 52 m_n - m_{\text{A}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) + 38 m_e \\ &= 38 m_p + 52 m_n - 89.907\,738 \text{u} + 38 m_e = 1.395 \cdot 10^{-27} \text{kg} \end{aligned}$$

Aus diesen Massendefekten ergeben sich die Bindungsenergien der drei Kerne:

$$E_{\text{B}}({}_{92}^{235}\text{U}) = \Delta M({}_{92}^{235}\text{U}) \cdot c^2 = 3.180 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot c^2 = 2.858 \cdot 10^{-10} \text{J} = \underline{\underline{1784 \text{MeV}}}$$

$$E_{\text{B}}({}_{54}^{144}\text{Xe}) = \Delta M({}_{54}^{144}\text{Xe}) \cdot c^2 = 2.098 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot c^2 = 1.886 \cdot 10^{-10} \text{J} = \underline{\underline{1177 \text{MeV}}}$$

$$E_{\text{B}}({}_{38}^{90}\text{Sr}) = \Delta M({}_{38}^{90}\text{Sr}) \cdot c^2 = 1.395 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot c^2 = 1.254 \cdot 10^{-10} \text{J} = \underline{\underline{782.7 \text{MeV}}}$$

(e) Für die mittleren Bindungsenergien pro Nukleon erhalten wir:

$$\frac{E_{\text{B}}({}_{92}^{235}\text{U})}{235} = \frac{1784 \text{MeV}}{235} = \underline{\underline{7.59 \text{MeV}}}$$

$$\frac{E_{\text{B}}({}_{54}^{144}\text{Xe})}{144} = \frac{1177 \text{MeV}}{144} = \underline{\underline{8.17 \text{MeV}}}$$

$$\frac{E_{\text{B}}({}_{38}^{90}\text{Sr})}{90} = \frac{782.7 \text{MeV}}{90} = \underline{\underline{8.70 \text{MeV}}}$$

Tatsächlich sind die Nukleonen im Sr-90-Kern am besten gebunden; die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon ist bei diesem Kern am grössten.

(f) Für die Edukte beträgt die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon insgesamt:

$$\frac{E_B}{A} = \frac{E_B(^{235}\text{U}) + E_B(n)}{235 + 1} = \frac{1784 \text{ MeV} + 0}{236} = \underline{\underline{7.559 \text{ MeV}}}$$

Auf dieselbe Art und Weise ergibt sich auf der Seite der Produkte:

$$\frac{E_B}{A} = \frac{E_B(^{144}\text{Xe}) + E_B(^{90}\text{Sr}) + 2E_B(n)}{144 + 90 + 2 \cdot 1} = \frac{1177 \text{ MeV} + 782.7 \text{ MeV} + 2 \cdot 0}{236} = \underline{\underline{8.304 \text{ MeV}}}$$

(g) Die Punkte für die Neutronen befinden sich im Schnittpunkt der Achsen ($A = 1$, $\frac{E_B}{A} = 0$).

Der Uran-235-Kern ist ganz rechts im äussersten "Zipfel" der Grafik in einer Höhe von etwa 7.6 MeV zu finden. Die beiden anderen Nuklide sind oberhalb der jeweiligen Massenzahl nur knapp unterhalb der Obergrenze lokalisiert.

(h) In Aufgabe (f) haben wir erfahren, dass jedes einzelne an der Reaktion beteiligte Nuklid im Schnitt eine Bindungsenergie von

$$8.304 \text{ MeV} - 7.559 \text{ MeV} = 0.745 \text{ MeV}$$

abgibt. Da es sich insgesamt um 236 an der Reaktion teilnehmende Nuklide handelt, ergibt sich ein totaler Energieumsatz von:

$$\Delta E = 236 \cdot 0.745 \text{ MeV} = 175.8 \text{ MeV}$$

Das entspricht bis auf Rundungsungenauigkeiten dem unter (b) berechneten Wert für die freigesetzte Energiemenge.

5. $E = mc^2$ im KKW

Wir berechnen zuerst die gesamte pro Jahr im Reaktor freigesetzte Energiemenge:

$$\begin{aligned} \Delta E &= P_{\text{thermisch}} \cdot \Delta t \\ &= 3000 \text{ MW} \cdot \underbrace{11 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}_{= 11 \text{ Monate}} \\ &= 8.55 \cdot 10^{10} \text{ MJ} \\ &= 8.55 \cdot 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

Diese Energiemenge wird durch den Massenverlust im Reaktor freigesetzt. Dafür erhalten nun ganz direkt aus der Einstein'schen Masse-Energie-Äquivalenz:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{8.55 \cdot 10^{16} \text{ J}}{c^2} = \underline{\underline{0.952 \text{ kg}}} \approx 1 \text{ kg}$$

Man kann also sagen, dass im Reaktor von Gösgen pro Jahr gerade etwa 1 kg Masse in thermische Energie umgewandelt wird – und damit wird etwa $\frac{1}{6}$ des Schweizerischen Strombedarfs gedeckt! Da versteht man schon, weshalb die Kernenergie eine sehr verlockende Energiequelle darstellt... wäre da doch nur nicht das Problem der radioaktiven Abfälle!