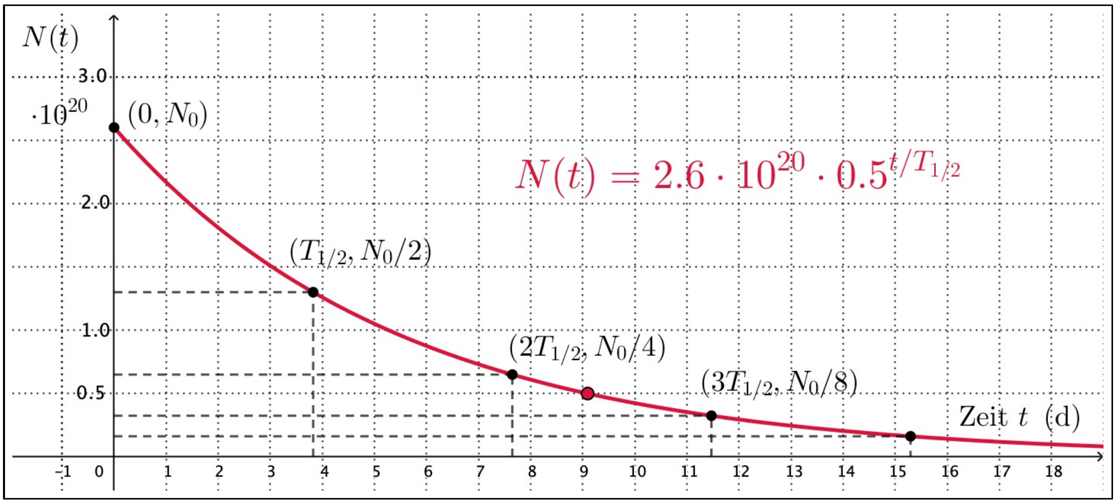
Übungen zur Kernphysik – Lösungen Serie 5

1. *Das Zerfallsgesetz graphisch*

   Die Halbwertzeit von Rn–222 beträgt 3.824 Tage. Die Anzahl der noch vorhandenen Radon-Nuklide halbiert sich also alle 3.824 Tage. Somit ergibt sich folgendes Diagramm:



2. *Einzelne Rechnungen zum Zerfallsgesetz*

   (a) i. Die Halbwertzeit von Po–210 beträgt $T_{1/2} = 138.4\,\mathrm{d}$. Für die Anzahl Kerne in $13.2\,\mathrm{mg}$ ergibt sich aus der Nuklidmasse von $m_\mathrm{A} = 210\,\mathrm{u}$:

   $$N_0 = \frac{m}{m_\mathrm{A}} = \frac{13.2\,\mathrm{mg}}{210\,\mathrm{u}} = \frac{13.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}}{210\,\mathrm{u}} = 3.785 \cdot 10^{19}$$

   Somit erhalten wir für die Aktivität der Polonium-Quelle:

   $$A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{3.785 \cdot 10^{19} \cdot \ln 2}{138.4\,\mathrm{d}} = \frac{3.785 \cdot 10^{19} \cdot \ln 2}{138.4 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{2.19 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Bq}}}$$

   ii. Nach 200 Tagen erhalten wir für die noch vorhandene Polonium–210-Masse resp. für die Aktivität:

   $$m(200\,\mathrm{d}) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200\,\mathrm{d}}{T_{1/2}}} = 13.2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200\,\mathrm{d}}{138.4\,\mathrm{d}}} = \underline{\underline{4.85\,\mathrm{mg}}}$$

   $$A(200\,\mathrm{d}) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200\,\mathrm{d}}{T_{1/2}}} = 2.19 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200\,\mathrm{d}}{138.4\,\mathrm{d}}} = \underline{\underline{8.04 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Bq}}}$$

   (b) Zu P–32 gehört eine Halbwertzeit von $T_{1/2} = 14.28\,\mathrm{d}$. Die Frage kann umformuliert werden: "Nach welcher Zeit sind noch $5\,\%$ der anfänglichen Menge vorhanden?" Mit dieser Fragestellung lässt sich das Zerfallsgesetz direkt anwenden:

   $$\begin{aligned}
   & N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 0.05 \cdot N_0 = 5\,\% \cdot N_0 && \mid\ : N_0 \\
   \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 0.05 && \mid \log_{1/2}(\ldots) \\
   \Leftrightarrow\ & \frac{t}{T_{1/2}} = \log_{1/2} 0.05 && \mid\ \cdot T_{1/2} \\
   \Leftrightarrow\ & t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2} 0.05 && \mid \text{Halbwertzeit einsetzen} \\
   & = 14.28\,\mathrm{d} \cdot \log_{1/2} 0.05 = \underline{\underline{61.7\,\mathrm{d}}}
   \end{aligned}$$

(c) Der noch vorhandene Bruchteil beträgt:

$$p(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5\cdot 10^9\,\mathrm{a}}{4.2\cdot 10^6\,\mathrm{a}}} = \underline{\underline{2.94\cdot 10^{-323}}} \quad !!!$$

Harte Konsequenz: Man findet sicher kein primordiales Technetium mehr, selbst wenn bei der Entstehung der Erde welches vorhanden gewesen sein sollte!

Mathematischer Exkurs: Der TR wird beim Versuch $0.5^{4500/4.2}$ zu berechnen einfach das Resultat 0 ausgeben. Wie kann man trotzdem sagen, wie gross resp. wie klein diese Zahl ist? Exakt gleich Null kann sie ja nicht sein!

Überlegung: Für die 0.1 gilt: $\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1\cdot\log 10 = -1\cdot 1 = -1$. Dabei ist $\log x$ der Logarithmus zur Basis 10 von x (kurz: Zehnerlogarithmus).
Dem entsprechend sind $\log 0.01 = -2$ und $\log 0.001 = -3$. Folglich muss sich der Zehnerlogarithmus von 0.007 zwischen -2 und -3 befinden. D.h., für alle Zahlen x, die ausgeschrieben auf der 3. Nachkommastelle beginnen, gilt: $-3 \leq \log x < -2$.

Allgemein: Jede Zahl, die ausgeschrieben auf der n-ten Nachkommastelle beginnt, hat einen Zehnerlogarithmus, der zwischen $-n$ und $-n+1$ liegt.
Jede solche Zahl lässt sich schreiben in der Form $x = a\cdot 10^{-n}$ mit $1 \leq a < 10$. Daraus folgt für den Zehnerlogarithmus:

$$\log x = \log(a\cdot 10^{-n}) = \log a + \log 10^{-n} = \log a - n$$

Dabei ist $\log a$ eine Zahl zwischen 0 und 1 resp. genauer: $0 \leq \log a < 1$.

Anwendung: Haben wir nun, wie im vorliegenden Fall, eine sehr kleine Zahl, die wir nur als Potenz kennen, also z.B. $x = 0.5^{\frac{4500}{4.2}}$, so können wir den Zehnerlogarithmus darauf anwenden, um die Zehnerpotenz abzuspalten. Dabei hilft das 3. Logartihmengesetz, dank dem sich ein Exponent des Argumentes als Faktor vor den Logarithmus ziehen lässt:

$$\log x = \log 0.5^{\frac{4500}{4.2}} = \frac{4500}{4.2}\cdot\log 0.5 \approx -322.532$$

Somit muss unsere Zahl auf der 323. Nachkommastelle beginnen! Sie lässt sich also schreiben in der Form $x = a\cdot 10^{-323}$. Das können wir ausnutzen, um auch noch den Vorfaktor a zu bestimmen:

$$\log x = \log\left(a\cdot 10^{-323}\right) = \log a + \log 10^{-323} = \log a - 323 \overset{!}{=} -322.532$$
$$\Rightarrow \quad \log a = 0.467 \quad \Rightarrow \quad a = 10^{0.467} \approx 2.94$$

Die vollständige Zahl lautet daher $x = 0.5^{\frac{4500}{4.2}} \approx 2.94\cdot 10^{-323}$.

(d) Laut Aufgabenstellung sind nach $10.0\,\mathrm{min}$ noch $8.8\,\%$ der anfänglichen Menge vorhanden. Daraus folgern wir mit dem Zerfallsgesetz:

$$\begin{aligned}
& N(10\,\mathrm{min}) = N_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,\mathrm{min}}{T_{1/2}}} = 0.088\cdot N_0 && \mid :N_0\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,\mathrm{min}}{T_{1/2}}} = 0.088 && \mid \log_{1/2}(\ldots)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{10\,\mathrm{min}}{T_{1/2}} = \log_{1/2} 0.088 && \mid \cdot\frac{T_{1/2}}{\log_{1/2}(0.088)}\\
\Leftrightarrow\quad & T_{1/2} = \frac{10\,\mathrm{min}}{\log_{1/2} 0.088} = \underline{\underline{2.85\,\mathrm{min}}}
\end{aligned}$$

(e) i. Wir berechnen die Anzahl Cs–137-Nuklide in einem Kilogramm und somit die Anzahl noch nicht stattgefundener Zerfälle:

$$N_0 = \frac{m}{m_\mathrm{A}} = \frac{1\,\mathrm{kg}}{137\,\mathrm{u}} = \underline{\underline{4.396 \cdot 10^{24}}}$$

Wie lange dauert es, bis davon noch 1 Milliarde Radionuklide übrig sind? Mit der Halbwertzeit von Cs–137 von $T_{1/2} = 30.1671\,\mathrm{a}$ ergibt sich unter Anwendung des Zerfallsgesetzes:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \Rightarrow \quad t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

$$= 30.1671\,\mathrm{a} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{1\,000\,000\,000}{4.396 \cdot 10^{24}}\right) = \underline{\underline{1568\,\mathrm{a}}}$$

ii. Für die dann noch vorhandene Aktivität ergibt sich:

$$A(1560\,\mathrm{a}) = \underbrace{\frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}}}_{=A_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1560\,\mathrm{a}}{T_{1/2}}}$$

$$= \frac{4.396 \cdot 10^{24} \cdot \ln 2}{30.1671\,\mathrm{a}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1568\mathrm{a}}{30.1671\,\mathrm{a}}}$$

$$= \frac{4.396 \cdot 10^{24} \cdot \ln 2}{30.1671 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1568\mathrm{a}}{30.1671\,\mathrm{a}}} = \underline{\underline{0.723\,\mathrm{Bq}}}$$

Nach 1560 Jahren findet pro Sekunde noch etwas weniger als ein Zerfall statt.

3. *Marie Curie und das Radium*

(a) Als Zerfallsreaktion ergibt sich aus der Nuklidtabelle:

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \quad \xrightarrow{\alpha} \quad ^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

(b) Die Halbwertszeit von Ra–226 beträgt $1600\,\mathrm{a}$. Damit erhalten wir:

$$N(t) = 90\,\% \cdot N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \Rightarrow \quad 0.9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600\,\mathrm{a}}} \quad \Rightarrow \quad t = 243\,\mathrm{a}$$

Von 1911 aus gerechnet wird also im Jahre <u>2154</u> nur noch $90\,\%$ der ursprünglichen Radiummenge vorhanden sein.

(c) Für den Prozentsatz nach bis heute 110 Jahren ergibt sich:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{110\,\mathrm{a}}{1600\,\mathrm{a}}} = 0.953 = 95.3\,\% \quad \Rightarrow \quad 100\,\% - 95.3\,\% = \underline{\underline{4.7\,\%}}$$

(d) Das Radium–226-Nuklid besitzt, wie der Name schon andeutet, eine Atommasse von ziemlich genau $226\,\mathrm{u}$. Damit lässt sich das Gramm in eine Anzahl Atome umrechnen:

$$N = \frac{m}{m_\mathrm{A}} = \frac{0.001\,\mathrm{kg}}{226\,\mathrm{u}} = 2.665 \cdot 10^{21}$$

Mit dieser in $1\,\mathrm{g}$ Ra–226 enthaltenen Anzahl Radionuklide ergibt sich für die Aktivität:

$$1\,\mathrm{Ci} = A(1\,\mathrm{g}\,^{226}\mathrm{Ra}) = \frac{N \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{2.665 \cdot 10^{21} \cdot \ln 2}{1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{3.66 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}}}$$

4. *Die Radiokarbon-Methode*

Der Hinweis besagt, dass die Aktivität $A(t)$ zum Zeitpunkt t jeweils proportional ist zur noch vorhandenen Menge Radionuklide, also:

$$A(t) = \text{konst.} \cdot N(t) = \text{konst.} \cdot N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \qquad \text{Startzeitpunkt:} \quad A(0) = \text{konst.} \cdot N_0$$

Durch Verhältnisbildung der Aktivitäten zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt $t = 0$ fällt die Proportionalitätskonstante konst. heraus:

$$\frac{A(t)}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Und somit können wir aufgrund des Aktivitätenverhältnisses auf die verstrichene Zeit t schliessen und das Präparat zurückdatieren. Dabei verwenden wir die C–14-Halbwertzeit von $T_{1/2} = 5730\,\mathrm{a}$:

$$\text{Alter} = t = T_{1/2} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = 5730\,\mathrm{a} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{41.2}{124}\right) = \underline{\underline{9100\,\mathrm{a}}}$$

5. *Alternative Schreibweise für das Zerfallsgesetz*

   (a) Die Zahl noch vorhandener Nuklide nach der Zeit t, also $N(t)$, muss in beiden Schreibweisen des Zerfallsgesetzes gleich gross herauskommen. Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned}
N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} &\overset{!}{=} N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid : N_0 \\
\Leftrightarrow \qquad e^{-\lambda \cdot t} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid \ln(\ldots) \\
\Leftrightarrow \qquad -\lambda \cdot t &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid \text{3. Log-Gesetz} \\
\Leftrightarrow \qquad -\lambda \cdot t &= \frac{t}{T_{1/2}} \cdot \ln\frac{1}{2} && \mid : t \\
\Rightarrow \qquad -\lambda &= \frac{1}{T_{1/2}} \cdot \ln\frac{1}{2} && \mid \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \\
\Leftrightarrow \qquad -\lambda &= -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} && \mid \cdot(-1) \\
\Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}}
\end{aligned}$$

   (b) Natürlich gilt nun auch $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Damit schreiben wir für die Anfangsaktivität sofort:

$$A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{\frac{\ln 2}{\lambda}} = \underline{\underline{N_0 \cdot \lambda}}$$

   Aufgrund der uns nunmehr zur Verfügung stehenden Differentialrechnung ist es aber angebracht dieses Resultat auch noch aus der Ableitung von $N(t)$ zu erhalten und so eben ein Beispiel dafür zu haben, weshalb man in der Physik Exponentialfunktionen aus Gründen der Einfachheit sehr gerne mit der Basis e notiert:

$$A(t) := -N'(t) = \left[-N_0 \cdot e^{-\lambda t}\right]' = -N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = N_0\lambda \cdot e^{-\lambda t} \overset{!}{=} A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_0 = N_0\lambda}}$$

   Ableitungen von Exponentialfunktionen mit Basis e sind wirklich sehr einfach und rasch erledigt!

6. *Die Aktivität einer künstlichen Quelle*

(a) Zwei Monate sind $\frac{1}{6}\,\mathrm{a}$. Setzen wir diese Zeit ins Zerfallsgesetz für die Aktivität ein, so ergibt sich:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 327\,\mathrm{kBq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\frac{1}{6}\,\mathrm{a}}{5.2713\,\mathrm{a}}} = 319.9\,\mathrm{kBq}$$

Damit folgt für den Aktivitätsverlust:

$$\Delta A = A(t) - A_0 = 319.9\,\mathrm{kBq} - 327\,\mathrm{kBq} = \underline{\underline{-7.1\,\mathrm{kBq}}}$$

(Die Lösung ist auch ohne Minuszeichen in Ordnung.)

(b) Ich möchte aus der Aktivität die in der Quelle enthaltene Anzahl Co–60-Atome bestimmen. Dazu löse ich den Zusammenhang $A_0 = \frac{N_0 \cdot \ln 2}{T_{1/2}}$ nach N_0 auf und setze dann die Aktivität $(327\,\mathrm{kBq})$. Diesmal muss ich die Halbwertzeit allerdings in Sekunden umrechnen, damit das Produkt $\mathrm{Bq} \cdot \mathrm{s}$ eben 1 ergibt:

$$N_0 = \frac{A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{327\,\mathrm{kBq} \cdot 5.2713\,\mathrm{a}}{\ln 2} = \frac{327\,000\,\mathrm{Bq} \cdot 5.2713 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}}{\ln 2} = 7.842 \cdot 10^{13}$$

Nun haben wir die Anzahl Atome. Daraus eine Masse zu machen, fällt nicht weiter schwer, denn wir wissen ja, welche Masse das einzelne Atom besitzt, nämlich $m_A = 60.0\,\mathrm{u}$:

$$m = N_0 \cdot m_A = 7.842 \cdot 10^{13} \cdot 60.0\,\mathrm{u} = 7.81 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{7.81\,\mathrm{ng}}}$$

Dabei habe ich verwendet, dass $1\,\mathrm{kg} = 10^3\,\mathrm{g} = 10^3 \cdot 10^9\,\mathrm{g} = 10^{12}\,\mathrm{ng}$.

7. *Das Alter eines Steins*

(a) Soll $1\,\%$ der gerade vorhandenen U–238-Kerne zerfallen, so bleiben $99\,\% = 0.99$ bestehen. Daraus folgern wir mit dem Zerfallsgesetz für die Zeit:

$$\begin{aligned}
& & N(t) &= 0.99 \cdot N_0 && \mid \text{Zerfallsgesetz einsetzen}\\
&\Rightarrow & N_0 \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.99 \cdot N_0 && \mid : N_0\\
&\Leftrightarrow & 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} &= 0.99 && \mid \log_{0.5}(\ldots)\\
&\Leftrightarrow & \frac{t}{T_{1/2}} &= \log_{0.5} 0.99 && \mid \cdot T_{1/2}\\
&\Leftrightarrow & t &= T_{1/2} \cdot \log_{0.5} 0.99 && \mid \text{Halbwertzeit einsetzen}\\
& & &= 4.46\,\mathrm{Mia\,a} \cdot \log_{0.5} 0.99 &&\\
& & &= 0.0647\,\mathrm{Mia\,a} &&\\
& & &= \underline{\underline{65\,\mathrm{Mio\,a}}} &&
\end{aligned}$$

(b) Im Stein sind momentan folgende Atomzahlen vorhanden:

$$N_{\mathrm{U}} = \frac{m}{m_{\mathrm{A}}} = \frac{321\,\mathrm{mg}}{238\,\mathrm{u}} = \frac{321 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}}{238\,\mathrm{u}} = 8.122 \cdot 10^{20}$$
$$N_{\mathrm{Pb}} = \frac{m}{m_{\mathrm{A}}} = \frac{182\,\mathrm{mg}}{206\,\mathrm{u}} = \frac{182 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}}{206\,\mathrm{u}} = 5.321 \cdot 10^{20}$$

Gehen wir davon aus, dass alle Pb–206-Kern früher einmal U–238-Kerne waren, so folgt für diese ursprüngliche Anzahl:

$$N_{\mathrm{U},0} = N_{\mathrm{U}} + N_{\mathrm{Pb}} = 8.122 \cdot 10^{20} + 5.321 \cdot 10^{20} = 13.443 \cdot 10^{20}$$

Mit dem Zerfallsgesetz lässt sich nun auf das Alter des Steins schliessen:

$$\begin{aligned}
& N_{\mathrm{U}} = N_{\mathrm{U},0} \cdot 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid : N_0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0.5^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U},0}} && \mid \log_{0.5}(\ldots) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{t}{T_{1/2}} = \log_{0.5}\left(\frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U},0}}\right) && \mid \cdot T_{1/2} \\
\Leftrightarrow\quad & t = T_{1/2} \cdot \log_{0.5}\left(\frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U},0}}\right) && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& = 4.46\,\mathrm{Mia\,a} \cdot \log_{0.5}\left(\frac{8.122 \cdot 10^{20}}{13.443 \cdot 10^{20}}\right) \\
& = \underline{\underline{3.24\,\mathrm{Mia\,a}}}
\end{aligned}$$

(c) Die entscheidende Annahme ist, dass alle heute vorhandenen Pb-206-Kerne früher einmal U–238-Kerne waren. Es könnte aber durchaus sein, dass ein gewisser Anteil der Pb–206-Kerne bereits bei der Bildung des Steins vorhanden gewesen sind. Dann hätten seit der Existenz des Steins weniger Zerfälle stattgefunden. Der Stein müsste somit jünger sein. Die $3.24\,\mathrm{Mia\,a}$ sind also eine **obere Altersgrenze** für den Stein.

Rechnerisch: Mit einem Anteil ursprünglich bereits vorhandener Pb–206-Kerne wäre die Anzahl damaliger U–238-Kerne, also $N_{\mathrm{U},0}$ geringer und der Bruch $\frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U},0}}$ würde näher bei 1 liegen. Dies wiederum würde bewirken, dass der Wert des Logarithmus $\log_{0.5}\left(\frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{U},0}}\right)$ näher bei 0 liegt. Es ergäbe sich eine kleinere Zeitspanne.