Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 3

1. *Willkommen auf der Autobahn*

   (a) i. Bewegungstyp: gmbBmA.
   ii. Gegeben: Anf.geschw. $v_0 = 82\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 22.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Endgeschw. $v = 121\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 33.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Zeit $t = 28\,\mathrm{s}$.
   Gesucht: Strecke s.
   iii. Berechnung: $s = \frac{v_0+v}{2} \cdot t = \frac{22.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 33.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} \cdot 28\,\mathrm{s} = 789.5\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{790\,\mathrm{m}}}$.

   (b) i. Bewegungstyp: gmbBmA.
   ii. Gegeben: Anf.geschw. $v_0 = 82\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 22.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Endgeschw. $v = 124\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 33.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Zeit $t = 28\,\mathrm{s}$.
   Gesucht: Beschleunigung a.
   iii. Wir formen die zweite Gleichung für die gmbBmA um:

   $$v = v_0 + a \cdot t \quad \overset{-v_0}{\Longleftrightarrow} \quad v - v_0 = a \cdot t \quad \overset{:t}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{v - v_0}{t} = a$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $a = \frac{v-v_0}{t} = \frac{33.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 22.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{28\,\mathrm{s}} = 0.3868\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{0.39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$.

2. *Kinematik des freien Falls*

   (a) So wie der Fall der Kugel beschrieben wird müssen wir von den $1.75\,\mathrm{m}$ Höhe als Ausgangsmoment für die Rechnung ausgehen. In diesem Sinne gibt es eine Anfangsgeschwindigkeit.
   Da es sich um ein Fallvorgang handelt, ist auch die Beschleunigung bekannt.
   i. Bewegungstyp: gmbBmA.
   ii. Gegeben: Strecke $s = 1.75\,\mathrm{m}$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
   Gesucht: Endgeschwindigkeit v.
   iii. Wir benutzen die zeitunabhängige Gleichung für die gmbBmA:

   $$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \quad \overset{\cdot 2a}{\Longleftrightarrow} \quad 2 \cdot a \cdot s = v^2 - v_0^2 \quad \overset{+v_0^2}{\Longleftrightarrow} \quad v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s = v^2 \quad \overset{\sqrt{\cdots}}{\Longrightarrow} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s}$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} = \sqrt{\left(3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.75\,\mathrm{m}} = 6.856\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{6.86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

   (b) i. Bewegungstyp: gmbBmA.
   ii. Gegeben: Strecke $s = 1.75\,\mathrm{m}$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
   Gesucht: Zeit t.
   iii. Zur Auflösung scheint sich die erste Gleichung für die gmbBmA anzubieten:

   $$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

   Nun gibt es allerdings ein Problem: Die Unbekannte t tritt in dieser Gleichung quadratisch auf, weshalb man von einer **quadratischen Gleichung** spricht. Vermutlich kannst du eine solche Gleichung derzeit noch nicht direkt nach t auflösen. Wie man das macht, wirst du in der Mathematik bald ganz genau erfahren. Im Moment scheinen wir hier jedoch in einer Sackgasse gelandet zu sein...

   Glücklicherweise gibt es aber einen funktionierenden Umweg, mit dem wir in Teilaufgabe (a) bereits begonnen haben. Anstatt die gesuchte Zeit t direkt aus der ersten Gleichung für die gmbBmA zu bestimmen, verfügen wir mit der Endgeschwindigkeit v über eine zusätzlich bekannte Grösse und können beispielsweise mit $v = v_0 + a \cdot t$, nun eben eine nicht-quadratische Gleichung, auf die gesuchte Zeit t schliessen. Wir beginnen also nochmals:
   i. Bewegungstyp: gmbBmA.
   ii. Gegeben: Strecke $s = 1.75\,\mathrm{m}$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Endgeschwindigkeit $v = 6.856\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
   Gesucht: Zeit t.
   iii. Wir formen passend um:

   $$v = v_0 + a \cdot t \quad \overset{-v_0}{\Longleftrightarrow} \quad v - v_0 = a \cdot t \quad \overset{:a}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{v - v_0}{a} = t$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $t = \frac{v-v_0}{a} = \frac{6.856\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.3360\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{0.336\,\mathrm{s}}}$.

(c) Hier kann man nun die Gleichungen für die gmbBoA verwenden, denn die Kugel startet ihren Fallvorgang aus der Ruhe.

   i. Bewegungstyp: gmbBoA.

   ii. Gegeben: Endgeschwindigkeit $v = 3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
   Gesucht: Strecke s und Zeit t.

   iii. Für die Strecke finden wir direkt mit der zeitunabhängigen Gleichung:
   Berechnung: $s = \frac{v^2}{2\cdot a} = \frac{\left(3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.6460\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{0.646\,\mathrm{m}}}$.
   Für die Zeit müssen wir zuerst eine Gleichung passend umformen, z.B.:

$$v = a \cdot t \qquad \overset{:a}{\Longleftrightarrow} \qquad t = \frac{v}{a}$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $t = \frac{v}{a} = \frac{3.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.3629\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{0.363\,\mathrm{s}}}$.

(d) Eine Geschwindigkeit kann nicht direkt gemessen werden. Vielmehr muss ermittelt werden, zu welchem Zeitpunkt t_1 die Kugel an einem ersten Ort s_1 ankommt und wann (t_2) ein zweiter Ort s_2 erreicht wird. Aus diesen Daten, die eben mit Lichtschranken erhoben werden, kann dann die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Natürlich berechnet man auf diese Weise eigentlich die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel zwischen den beiden Lichtschranken. Soll dies in guter Näherung einer Momentangeschwindigkeit entsprechen, so müssen die beiden Lichtschranken sehr nahe beieinander platziert werden. Vorraussetzung ist aber auch, dass die Zeitmessung sehr präzise ist! Der Zeitunterschied Δ zwischen den beiden Lichtschrankenunterbrüchen muss sehr genau erfasst werden können, sonst ist die Messung wertlos.

3. *Kinematik eines Intercitys*

(a) **Erster Teil der Bewegung** (= erste $9.5\,\mathrm{s}$):

   i. Bewegungstyp: gmbBoA.

   ii. Geg.: Zeit $t = 9.5\,\mathrm{s}$, Endgeschwindigkeit $v = 4\underline{0}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 11.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
   Ges.: Strecke s.

   iii. Berechnung: $s_1 = \frac{v\cdot t}{2} = \frac{11.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 9.5\,\mathrm{s}}{2} = 52.8\,\mathrm{m}$

Zweiter Teil der Bewegung (Dauer $5.5\,\mathrm{s}$):

   i. Bewegungstyp: gfB.

   ii. Geg.: Zeit $t_2 = 5.5\,\mathrm{s}$, Geschwindigkeit $v = 4\underline{0}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 11.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
   Ges.: Strecke s.

   iii. Berechnung: $s_2 = v \cdot t_2 = 11.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 7.5\,\mathrm{s} = 61.1\,\mathrm{m}$

$\Rightarrow$ **Gesamtstrecke:** $s = s_1 + s_2 = 52.8\,\mathrm{m} + 61.1\,\mathrm{m} = 113.9\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{110\,\mathrm{m}}}$

(b) i. Bewegungstyp: gfB.

   ii. Geg.: Zeit $t = 7\,\mathrm{min}\,44\,\mathrm{s} = 464\,\mathrm{s}$, Strecke $s = 14.3\,\mathrm{km} = 14\,300\,\mathrm{m}$.
   Ges.: Geschwindigkeit v.

   iii. Umformung: $s = v \cdot t \quad \overset{:t}{\Longrightarrow} \quad v = \frac{s}{t}$
   $\Rightarrow$ Berechnung: $v = \frac{s}{t} = \frac{14\,300\,\mathrm{m}}{464\,\mathrm{s}} = 30.819\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 110.95\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \simeq \underline{\underline{111\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}}$

(c) i. Bewegungstyp: gmbBmA.

   ii. Geg.: Anf.geschw. $v_0 = 85\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 23.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Endgeschw. $v = 130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Strecke $s = 850\,\mathrm{m}$.
   Ges.: Beschleunigung a, Zeit t.

   iii. Wir formen die dritte Gleichung für die gmbBmA um:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\cdot a} \qquad \overset{\cdot a}{\Longrightarrow} \qquad s \cdot a = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \qquad \overset{:s}{\Longrightarrow} \qquad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\cdot s}$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\cdot s} = \frac{\left(36.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(23.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 850\,\mathrm{m}} = 0.4391\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{0.44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$
   Für die Zeitberechnung formen wir die zweite Bewegungsgleichung der gmbBmA um:

$$v = v_0 + a \cdot t \qquad \overset{-v_0}{\Longrightarrow} \qquad v - v_0 = a \cdot t \qquad \overset{:a}{\Longrightarrow} \qquad t = \frac{v - v_0}{a}$$

   $\Rightarrow$ Berechnung: $t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{36.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 23.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.4391\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 28.47\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{28\,\mathrm{s}}}$.

(d) i. Bewegungstyp: gmbBmA.

ii. Geg.: Endgeschwindigkeit $v = 35\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 9.722\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Zeit $t = 55\,\text{s}$, Strecke $s = 1.085\,\text{km} = 1085\,\text{m}$.
Ges.: Anfangsgeschwindigkeit v_0.

iii. Wir lösen die vierte Bewegungsgleichung der gmbBmA nach v_0 um:

$$s = \frac{(v_0 + v) \cdot t}{2} \quad \xrightarrow{\cdot 2} \quad 2s = (v_0 + v) \cdot t \quad \xrightarrow{:t} \quad \frac{2s}{t} = v_0 + v \quad \xrightarrow{-v} \quad \frac{2s}{t} - v = v_0$$

$\Rightarrow$ Berechnung: $v_0 = \frac{2s}{t} - v = \frac{2 \cdot 1085\,\text{m}}{55\,\text{s}} - 9.722\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.73\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 107.04\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \simeq \underline{\underline{110\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$.

(e) i. Bewegungstyp: gfB (ist immer so, wenn es um Durchschnittsgeschwindigkeiten geht).

ii. Geg.: Strecke $s = 115\,\text{km}$, Zeit $t = 56\,\text{min} = 0.9333\,\text{h}$.
Ges.: (mittlere) Geschwindigkeit $\overline{v}$.

iii. $\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{115\,\text{km}}{0.9333\,\text{h}} = 123.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$

Für die Passage von Olten ($62\,\text{km}$ von Zürich entfernt) folgt: $t = \frac{s}{\overline{v}} = \frac{62\,\text{km}}{123.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0.5032\,\text{h} \approx 3\underline{0}\,\text{min}$

$\Rightarrow$ Uhrzeit $\approx \underline{\underline{10:02\,\text{Uhr}}}$.

4. *Misslungene Schlüsselübergabe*

(a) Der senkrechte Wurf ist in der Zeit symmetrisch bezüglich dem höchsten Punkt. Gehen wir von einem vernachlässigbaren Luftwiderstand aus, so dauert der Aufstieg des Schlüssels von Sandras Hand bis zum toten Punkt gleich lange wie der Fall des Schlüssels vom toten Punkt in Sandras Hände. Demzufolge beträgt die Fallzeit $t = \frac{2.9\,\text{s}}{2} = 1.45\,\text{s}$ und wir können bei der Frage (a) von einer gmbBoA ausgehen.

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Geg.: Zeit $t = 1.45\,\text{s}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Ges.: Strecke s.

iii. $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (1.45\,\text{s})^2 = 10.31\,\text{m} \simeq \underline{\underline{10\,\text{m}}}$.

(b) Sandras Abwurfgeschwindigkeit ist vom Betrag her ebenfalls dieselbe, mit welcher der Schlüssel nach dem Flug auch wieder in ihren Händen landet. Somit können wir uns das Rechnen auch hier leicht machen:

i. Bewegungstyp: gmbBoA.

ii. Geg.: Zeit $t = 1.45\,\text{s}$, Beschleunigung $a = g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Ges.: Geschwindigkeit v.

iii. $v = a \cdot t = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1.45\,\text{s} = 14.22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq \underline{\underline{14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

(c) Im Prinzip liesse sich auch diese dritte Aufgabe lösen, indem wir weiterhin vom toten Punkt aus rechnen. Ich möchte hier aber vorzeigen, wie die Lösung mit der gmbBmA funktioniert. Der Startzeitpunkt $t = 0$ soll also der Abwurfzeitpunkt des Steins aus Sandras Hand sein und die positive Richtung sei die Aufwärtsrichtung:

i. Bewegungstyp: gmbBmA.

ii. Geg.: Anf.geschw. $v_0 = 14.22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus (b), Beschleunigung $a = -g = -9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Strecke $s = 3.7\,\text{m}$.
Ges.: Zeit t.

iii. $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ verknüpft alle Grössen miteinander. In $\frac{a}{2} \cdot t^2$ taucht die Unbekannte t allerdings quadratisch auf. Eine solche **quadratische Gleichung** kannst du mit deinem jetzigen mathematischen Wissensstand vermutlich noch nicht direkt lösen (vgl. Aufgabe 2.(b))! Wir gehen deshalb den Umweg über die Geschwindigkeit, mit welcher der Schlüssel auf der Höhe $3.7\,\text{m}$ vorbeikommt:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \quad \xrightarrow{\cdot 2 \cdot a} \quad 2 \cdot a \cdot s = v^2 - v_0^2 \quad \xrightarrow{+v_0^2} \quad v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s = v^2 \quad \xrightarrow{\sqrt{\cdots}} \quad \pm\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} = v$$

$\Rightarrow$ Berechnung: $v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} = \pm\sqrt{\left(14.22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot \left(-9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 3.7\,\text{m}} = \pm 11.38\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Achtung! Beim Wurzelziehen entstehen zwei Lösungen! Der Schlüssel fliegt zweimal an Frau Meiers Fenster vorbei. Dabei ist er jeweils gleich schnell, bewegt sich aber einmal auf- und einmal abwärts. Nun können wir diese beiden Geschwindigkeitswerte zur Berechnung der beiden Zeitpunkte verwenden:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \xrightarrow{-v_0} \quad v - v_0 = a \cdot t \quad \xrightarrow{:a} \quad \frac{v - v_0}{a} = t$$

$\Rightarrow$ Berechnung erster Zeitpunkt: $t_1 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{11.38\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 14.22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.2895\,\text{s} \simeq \underline{\underline{0.29\,\text{s}}}$.

$\Rightarrow$ Berechnung zweiter Zeitpunkt: $t_2 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-11.38\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 14.22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.610\,\text{s} \simeq \underline{\underline{2.6\,\text{s}}}$.

5. **Schwieriger:** *Nochmals zum* $100\,\mathrm{m}$*-Sprint (vgl. Serie 1, Aufgabe 3)*

Die Bewegung ist in zwei Abschnitte zu unterteilen. Da wir zu keinem der beiden Abschnitte von Beginn an genügend Informationen haben um "den Rest" dazu zu berechnen, ist es angebracht formal zu rechnen und zu schauen, wie sich die Fragen aus der Kombination beider Abschnitte beantworten lassen. Machen wir uns zunächst einzelne Notizen zu den beiden Abschnitten:

Abschnitt 1 (gmbBoA): Es gelten die vier Bewegungsgleichungen $s_1 = \frac{a}{2}\,t_1^2$, $v = a\,t_1$, $s_1 = \frac{v^2}{2a}$ und $s_1 = \frac{v\,t_1}{2}$.
Dabei ist s_1 die im Abschnitt 1 zurückgelegte Strecke und t_1 die dafür benötigte Zeit. v ist die Endgeschwindigkeit nach der Zeit t_1. Dies ist die gesuchte Spitzengeschwindigkeit, mit der Elaine Thompson-Herah auch den gesamten Abschnitt 2 unterwegs gewesen sein soll. Die Beschleunigung a im ersten Abschnitt braucht keine Nummerierung, denn in Abschnitt 2 wird ja nicht beschleunigt.
Zudem wissen wir (neue Angabe), dass $t_1 = \frac{t}{4}$, wobei t die Gesamtzeit des Vorganges bezeichnet.

Abschnitt 2 (gfB): Es gilt $s_2 = v\,t_2$. Nun sind s_2 und t_2 die im Abschnitt 2 zurückgelegte Strecke resp. die dafür benötigte Zeit.

Die Angaben in der Aufgabenstellung beziehen sich auf die Gesamtstrecke s resp. auf die Gesamtzeit t. Es gilt:

$$s = s_1 + s_2 = 1\underline{0}\,\underline{0}\,\mathrm{m} \qquad \text{und} \qquad t = t_1 + t_2 = 10.54\,\mathrm{s}$$

Um damit etwas anzufangen, müssen wir die oben gefundenen Gleichungen in eine dieser beiden Gleichungen einsetzen. Dabei soll v vorkommen, a hingegen nicht, denn wir können keine weitere Unbekannte brauchen. Ich nehme beispielsweise die erste Gleichung und ersetze darin s_1 und s_2 wie folgt:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v\,t_1}{2} + v\,t_2 = v \cdot \left(\frac{t_1}{2} + t_2\right)$$

Mit Hilfe der Zeitgleichung kann ich t_2 durch t_1 ersetzen ($t_2 = t - t_1$) und erhalte:

$$s = v \cdot \left(\frac{t_1}{2} + t - t_1\right) = v \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

Nun kommt die letzte Angabe ins Spiel: $t_1 = \frac{t}{4}$. Das setzen wir ein:

$$s = v \cdot \left(t - \frac{\frac{t}{4}}{2}\right) = v \cdot \left(t - \frac{t}{8}\right) = v \cdot \frac{7t}{8}$$

Jetzt gibt es in der Gleichung nur noch die Unbekannte v und wir können nach ihr auflösen:

$$v = \frac{8s}{7t} = \frac{8 \cdot 100\,\mathrm{m}}{7 \cdot 10.54\,\mathrm{s}} = 10.843\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{10.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Die Beschleunigungszeit zu bestimmen ist wesentlich einfacher, denn aus der zusätzlichen Angabe folgt direkt:

$$t_1 = \frac{t}{4} = \frac{10.54\,\mathrm{s}}{4} = 2.635\,\mathrm{s}$$

Damit kann leicht auf die Beschleunigung im ersten Abschnitt geschlossen werden:

$$a = \frac{v}{t_1} = \frac{10.843\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2.635\,\mathrm{s}} = 4.11499\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{4.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

6. **Schwieriger:** *Rollbrettfahren*

Beschleunigen und Ausrollen lassen sind beides Bewegungen, die wir als gmbBoA auffassen können – im zweiten Fall mit Zeitumkehr. Zu beiden Bewegungsabschnitten kennen wir die "End"-Geschwindigkeit $v = 4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Notieren wir zunächst die Bewegungsgleichungen für die beiden Bewegungsabschnitte:

$$s_1 = \frac{a_1}{2}\,t_1^2 \qquad v = a_1\,t_1 \qquad s_1 = \frac{v^2}{2a_1} \qquad s_1 = \frac{v\,t_1}{2}$$

Und ebenso:

$$s_2 = \frac{a_2}{2}\,t_2^2 \qquad v = a_2\,t_2 \qquad s_2 = \frac{v^2}{2a_2} \qquad s_2 = \frac{v\,t_2}{2}$$

Bemerke, dass für die Geschwindigkeit jeweils kein Index gesetzt wurde, denn es ist ja eben $v = v_1 = v_2$.

Weiter ist das Verhältnis der beiden Beschleunigungswerte angegebenen, nämlich:

$$a_1 = 3.5 \cdot a_2$$

Und schliesslich kennen wir die Gesamtzeit:

$$t = t_1 + t_2 = 8.6\,\mathrm{s}$$

(a) Aus dem Verhältnis der Beschleunigungen können wir sofort auf das umgekehrte Verhältnis der beiden Zeiten schliessen:

$$v = a_1\,t_1 = a_2\,t_2 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{a_1\,t_1}{a_2} = \frac{3.5 \cdot a_2\,t_1}{a_2} = 3.5 \cdot t_1$$

Damit können wir aus der Gesamtzeit nun leicht auf t_1 schliessen:

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + 3.5 \cdot t_1 = 4.5 \cdot t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{t}{4.5} = \frac{8.6\,\mathrm{s}}{4.5} = 1.911\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{1.9\,\mathrm{s}}}$$

Und für t_2 folgt:

$$t_2 = 3.5 \cdot t_1 = 3.5 \cdot 1.911\,\mathrm{s} = 6.689\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{6.7\,\mathrm{s}}}$$

(b) Im Prinzip können wir nun die Resultate für die beiden Zeiten direkt für die Berechnung der beiden Beschleunigungswerte benutzen:

$$a_1 = \frac{v}{t_1} = \frac{4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.911\,\mathrm{s}} = 2.198\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{2.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \qquad \text{und} \qquad a_1 = \frac{v}{t_1} = \frac{4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6.689\,\mathrm{s}} = 0.6279\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{0.63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Ich möchte aber noch einen anderen algebraischen Weg zeigen, wie man ohne die Zeitwerte als Zwischenresultate auf die Beschleunigungen kommen kann: Wir starten mit der Zeitgleichung $t = t_1 + t_2$. Da wir über die Strecken noch gar nichts wissen, sollten wir für beide Abschnitte die Gleichung benutzen, in der die Strecke nicht vorkommt. Damit folgt:

$$t = \frac{v}{a_1} + \frac{v}{a_2} = \frac{v}{3.5a_2} + \frac{v}{a_2} = \frac{v}{a_2} \cdot \left(\frac{1}{3.5} + 1\right) = \frac{v}{a_2} \cdot \frac{4.5}{3.5} = \frac{v}{a_2} \cdot \frac{9}{7}$$

Damit lässt sich die Beschleunigung a_2 bestimmen:

$$a_2 = \frac{9}{7} \cdot \frac{v}{t} = \frac{9}{7} \cdot \frac{4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{8.6\,\mathrm{s}} = 0.6279\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{0.63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Daraus erhalten wir sofort für die Beschleunigung im ersten Bewegungsabschnitt:

$$a_1 = 3.5 \cdot a_2 = 3.5 \cdot 0.6279\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2.198\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq \underline{\underline{2.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

(c) Schliesslich lassen sich auch die Teilstrecken und die Gesamtstrecke berechnen:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v\,t_1}{2} + \frac{v\,t_2}{2} = \frac{4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1.911\,\mathrm{s}}{2} + \frac{4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6.689\,\mathrm{s}}{2} = \underbrace{4.01\,\mathrm{m}}_{=s_1} + \underbrace{28.09\,\mathrm{m}}_{=s_2} = 32.1\,\mathrm{m} \simeq \underline{\underline{32\,\mathrm{m}}}$$

7. **Schwieriger:** *Zurück zu Franz und seinem Brunnen (vgl. Serie 2, Aufgabe 4)*

Die $2.70\,\mathrm{s}$ sind die Gesamtzeit für die Fallbewegung des Steins und die gleichförmige Bewegung des Schalls, der vom Grund des Brunnens nach oben aufsteigen muss, damit Franz das Plumpsen hört. Diese Gesamtzeit können wir aus zwei Teilen zusammensetzen, wobei das Fallen des Steins einer gmbBoA mit Beschleunigung $a = g$ und das Aufsteigen des Schalls einer gfB mit Geschwindigkeit $v = v_{\text{Schall}}$ entspricht:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{v}$$

Diese Gleichung gilt es nach der gesuchten Strecke s aufzulösen. Das fällt nicht ganz leicht, weil s sowohl unter, wie auch ausserhalb der Wurzel auftritt. Mathematisch musst du diese Gleichung derzeit noch nicht selbständig lösen können. Ich zeige hier aber einfach mal vor, wie sich das machen liesse...

$$\begin{aligned}
& & t &= \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{v} && \Big|\, -\frac{s}{v} \\
&\Leftrightarrow & t - \frac{s}{v} &= \sqrt{\frac{2s}{g}} && \big|\, (\ldots)^2 \\
&\Rightarrow & \left(t - \frac{s}{v}\right)^2 &= \frac{2s}{g} && |\, \text{ausmultiplizieren} \\
&\Leftrightarrow & t^2 - \frac{2s\,t}{v} + \frac{s^2}{v^2} &= \frac{2s}{g} && \Big|\, -\frac{2s}{g} \\
&\Leftrightarrow & t^2 - \frac{2s\,t}{v} + \frac{s^2}{v^2} - \frac{2s}{g} &= 0 && |\, \text{umgruppieren und } s \text{ ausklammern} \\
&\Leftrightarrow & \frac{s^2}{v^2} - \left(\frac{2t}{v} + \frac{2}{g}\right) \cdot s + t^2 &= 0 && |\, \cdot (v^2\, g) \\
&\Leftrightarrow & g \cdot s^2 - 2v\,(g\,t + v) \cdot s + t^2\, v^2\, g &= 0
\end{aligned}$$

Die Unbekannte in dieser Gleichung ist s. Wir sehen, dass das s in dieser Gleichung im ersten Term $a \cdot s^2$ quadratisch vorkommt. Man spricht deshalb von einer **quadratischen Gleichung**. Unsere Umformungen haben diese Gleichung auf die Form $a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$ gebracht (mit $a = g$, $b = -2v\,(g\,t + v)$ und $c = t^2\, v^2\, g$). Dies ist die sogenannte **Normalform der quadratischen Gleichung**. Wie du in der Mathematik gezeigt bekommen wirst, werden die beiden möglichen Lösungen dieser Gleichung durch die da und dort als **Mitternachtsformel** bezeichnete Gleichung beschrieben:

$$s_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{Mitternachtsformel}$$

Das $\pm$ erzeugt zwei Lösungen, einem mit $+\sqrt{\ldots}$ und einmal mit $-\sqrt{\ldots}$ im Zähler.

Setzen wir hier unsere Ausdrücke für a, b und c ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
s_{1/2} &= \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{\big(-2v(gt+v)\big)^2 - 4g \cdot t^2 v^2 g}}{2g} = \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(g^2t^2 + 2gtv + v^2) - 4g^2t^2v^2}}{2g} \\
&= \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(g^2t^2 + 2gtv + v^2 - g^2t^2)}}{2g} = \frac{2gtv + 2v^2 \pm \sqrt{4v^2(2gtv + v^2)}}{2g} \\
&= \frac{2gtv + 2v^2 \pm 2v\sqrt{2gtv + v^2}}{2g} = \frac{gtv + v^2 \pm v\sqrt{2gtv + v^2}}{g} = \frac{v}{g} \cdot \left(gt + v \pm \sqrt{v(2gt + v)}\right)
\end{aligned}$$

Endlich können wir Zahlenwerte einsetzen:

$$\begin{aligned}
s_{1/2} &= \frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.70\,\mathrm{s} + 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.70\,\mathrm{s} + 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}\right) \\
&= 34.66\,\mathrm{s} \cdot \left(366.49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 365.53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 33.32\,\mathrm{m} \quad \text{oder} \quad 25\,372\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Offensichtlich kommt nur die erste Lösung in Frage und somit lautet das richtige Resultat $s \simeq \underline{\underline{33.3\,\mathrm{m}}}$.

Die zweite Lösung gibt es eigentlich gar nicht! Sie ist künstlich erzeugt worden, und zwar genau in dem Moment, wo in den Umformungen weiter oben von der zweiten zur dritten Zeile quadriert wurde. Dadurch wurde nämlich zusätzlich die Möglichkeit eingebaut, dass nun $t - \frac{s}{v}$ auch gleich $-\sqrt{\frac{2s}{g}}$ sein kann. Genau so ist die falsche Lösung ins Spiel gekommen.