Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 6

1. *Die Kugel im Hula-Hoop-Reif*

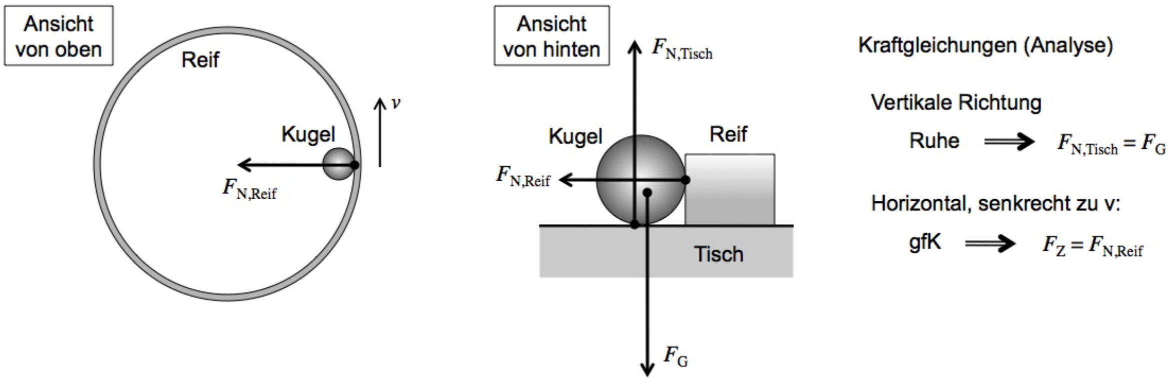
   (a) Für Radius und Umlaufszeit misst man z.B.: $r = 34\,\mathrm{cm}$ und $T = 2.5\,\mathrm{s}$.
   Daraus ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.34\,\mathrm{m}}{2.5\,\mathrm{s}} = 0.8545\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(Zwischenresultat)}$$

   (b) Somit ergibt sich für die Zentripetalbeschleunigung:

   $$a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(0.8545\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.34\,\mathrm{m}} = 2.148\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(Zwischenresultat)}$$

   (c) Die Kugel wird durch die **Normalkraft der Reifeninnenwand** $F_\mathrm{N,Reif}$ auf der Kreisbahn gehalten, wie aus der Kräfteskizze klar wird:

   (In der Ansicht von hinten schaut man der rollenden Kugel nach. Sie rollt also "ins Blatt hinein".)

   (d) Da die Normalkraft $F_\mathrm{N,Reif}$ gerade die Zentripetalkraft ausmachen muss, folgt für ihren Betrag:

   $$F_\mathrm{N,Reif} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot a_\mathrm{Z} = 0.0548\,\mathrm{kg} \cdot 2.148\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.118\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{120\,\mathrm{mN}}}$$

   Vorher mussten wir noch die Kugelmasse bestimmen: $m = 54.8\,\mathrm{g} = 0.0548\,\mathrm{kg}$.
   Die zwei Berechnungsschritte lassen sich formal auch zu einem einzigen zusammenfassen:

   $$F_\mathrm{N,Reif} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{m \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

   Damit wird klar, dass der Bahnradius nur als einfacher Faktor in die Berechnung mit einfliesst.

   (e) $1\,\mathrm{N}$ entspricht etwa der Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse an der Erdoberfläche und ist somit eine nicht besonders grosse, aber doch anschauliche Einheit. 120 Millinewton ist demzufolge ein sehr kleiner Kraftbetrag. Er entspricht in etwa der Gewichtskraft von $12\,\mathrm{g}$ Masse.
   Der Reif ist durch die rollende Kugel also nur sehr wenig belastet!

2. *Alltägliche Bahngeschwindigkeiten im Sonnensystem*

   (a) Für die Bahngeschwindigkeit am Äquator ergibt sich:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6370\,\mathrm{km}}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{0.463\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(am besten merken!)}$$

(b) Für die Bahngeschwindigkeit der Erde erhalten wir:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 149\,600\,000\,\mathrm{km}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{29.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}} \approx 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(ebenfalls merken!)}$$

(c) Mittels einer kleinen Umstellung erhalten wir für den Bahnradius:

$$r = \frac{v \cdot T}{2\pi} = \frac{7.65\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 93.2 \cdot 60\,\mathrm{s}}{2\pi} = 6808\,\mathrm{km}$$

Davon ist der Erdradius zu subtrahieren, um die Flughöhe zu erhalten:

$$h = r - R_{\mathrm{E}} = 6808\,\mathrm{km} - 6370\,\mathrm{km} \simeq \underline{\underline{438\,\mathrm{km}}}$$

3. *Hammerwerfen*

Der Werfer hält den Hammer mit der Zugkraft im Stahlseil auf seiner Kreisbahn. Diese Zugkraft ist gleich der Zentripetalkraft, die der Hammer für seine Kreisbewegung erfahren muss ($v = 105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 29.17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$F_{\mathrm{Zug}} = F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{7.0\,\mathrm{kg} \cdot \left(29.17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1.7\,\mathrm{m}} \simeq \underline{\underline{3500\,\mathrm{N}}}$$

4. *Die Karussellfahrt*

(a) Für die Umlaufszeit ergibt sich:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 5.25\,\mathrm{m}}{4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 8.046\,\mathrm{s} \simeq \underline{\underline{8.0\,\mathrm{s}}}$$

(b) Für die Zentripetalkraft erhalten wir:

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{27\,\mathrm{kg} \cdot \left(4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5.25\,\mathrm{m}} = 86.45\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{86\,\mathrm{N}}}$$

(c) Das Kind erfährt vor allem Kräfte in vertikaler (v) und in radialer (r) Richtung:

Vertikal: Das Kind sitzt auf dem "Rössli". D.h., seine Gewichtskraft F_{G} wird durch die Normalkraft $F_{\mathrm{N,v}}$ des Sattels ausgeglichen: $F_{\mathrm{N,v}} = F_{\mathrm{G}}$.

Radial: Damit das Kind auf der Kreisbahn bleibt, muss es durch eine Kraft in Richtung Zentrum des Karussell gedrückt werden. Dies ist wiederum eine Normalkraft $F_{\mathrm{N,r}}$, die von der Stabilität des "Rösslis" herrührt. Es gilt: $F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{N,r}}$. Diese Normalkraft spürt das Kind vor allem an seinem inneren Oberschenkel. Dadurch, dass es sich ein wenig gegen das Karussell-Zentrum neigt, kann es den Druck dieser Normalkraft etwas mehr auf seinen "Hintern" verlagern.

5. *Die Formel für die Zentripetalkraft*

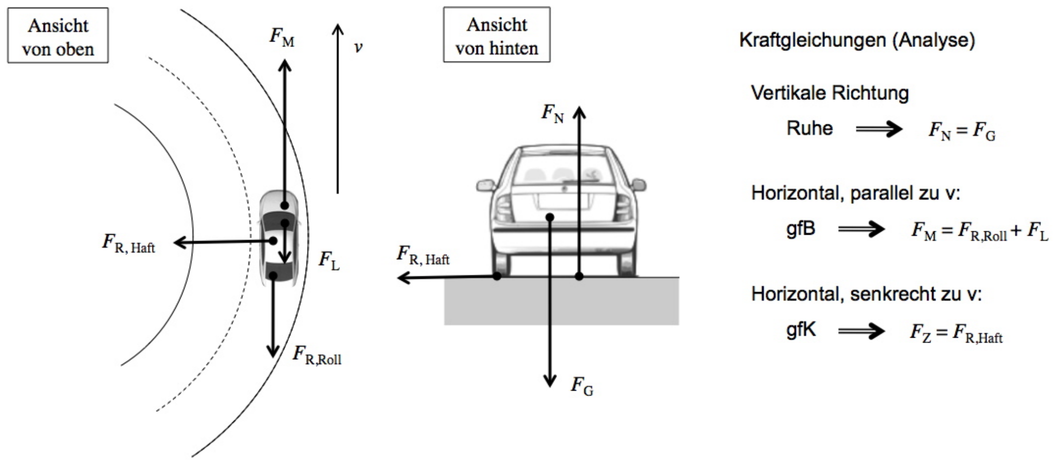
Die Geschwindigkeit v beschreibt, wie schnell die Masse in eine bestimmte Richtung unterwegs ist. Eine grosse Geschwindigkeit bedeutet auf einer Kreisbahn allerdings auch, dass sich die Bewegungsrichtung rasch verändert. Und dafür braucht es eben eine deutlich grössere Zentripetalkraft, weshalb v im Zähler von $F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ und dort sogar quadratisch auftritt.

Der tiefere Grund hierfür liegt in der Trägheit der Masse, welche den Bewegungszustand und somit eben auch die Bewegungsrichtung ohne Kraftwirkung einfach aufrecht erhalten würde.

Der Bahnradius r gibt an, ob es sich um eine weite oder eine enge Kurve handelt. Bei kleinem Bahnradiusändert sich die Bewegungsrichtung viel rascher, als wenn sich die Masse bei gleicher Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit grossen Radius bewegt. Dementsprechend muss die Zentripetalkraft bei kleinerem Radius grösser sein und wir treffen r im Nenner von $F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ an. Erneut ist dies eine Auswirkung der Massenträgheit (vgl. oben).

6. *Kurvenfahrt im Auto* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

   Die Kraftanalyse ergibt drei Kraftgleichungen – für jede Raumdimension eine:

   Die Strasse zieht das Auto durch die seitliche Haftreibung $F_{\mathrm{R,Haft}}$ mit den Pneus nach links. Dies sieht man im Bild, welches ein Rad von hinten zeigt.

7. *Achtung nasse Strasse!*

   Für die maximale Haftreibungskraft $F_{\mathrm{R,Haft,max}}$ erhalten wir bei diesen Witterungsbedingungen:

   $$F_{\mathrm{R,Haft,max}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{G}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g = 0.31 \cdot 1300\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 3950\,\mathrm{N}$$

   Die für die Kurvenfahrt benötigte Zentripetalkraft darf diesen Grenzbetrag nicht überschreiten, was eine Obergrenze für die Geschwindigkeit festlegt:

   $$F_{\mathrm{Z,max}} = \frac{m \cdot v_{\mathrm{max}}^2}{r} = F_{\mathrm{R,Haft,max}}$$

   $$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{R,Haft,max}} \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{3950\,\mathrm{N} \cdot 99\,\mathrm{m}}{1300\,\mathrm{kg}}} = 17.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{62\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} < 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

   Bei nassen Strassenverhältnissen muss man diese Kurve also deutlich langsamer als mit dem angegebenen Tempolimit fahren!

   Die Masse ist übrigens für v_{max} irrelevant, was aus einer rein formalen Rechnung folgt:

   $$F_{\mathrm{Z,max}} = \frac{m \cdot v_{\mathrm{max}}^2}{r} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g = F_{\mathrm{R,Haft,max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{max}}^2}{r} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot g \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\mu_{\mathrm{H}} \cdot g \cdot r}$$

   Mit grösserer Automasse ist zwar die Trägheit des Autos grösser, aber durch das grössere Gewicht wird auch die Reibungskraft entsprechend vergrössert.

8. *Der Gummiball an der Schnur*

   (a) Für die Bahngeschwindigkeit des Gummiballs ergibt sich:

   $$v = \frac{2\pi\, r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.55\,\mathrm{m}}{1.0\,\mathrm{s}} = 3.46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Damit folgt für die Zentripetal- resp. Zugkraft:

   $$F_{\mathrm{Zug}} \approx F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{0.082\,\mathrm{kg} \cdot \left(3.46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.55\,\mathrm{m}} = 1.78\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{1.8\,\mathrm{N}}}$$

   (b) Da die Geschwindigkeit in der Zentripetalkraftsformel im Quadrat vorkommt, ergibt sich bei ihrer Verdoppelung die vierfache und bei ihrer Verdreifachung die neunfache Zugkraft, d.h.:

   $$F_{\mathrm{Z,2v}} = 4 \cdot F_{\mathrm{Z,1v}} \simeq \underline{\underline{7.1\,\mathrm{N}}} \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{Z,3v}} = 9 \cdot F_{\mathrm{Z,1v}} \simeq \underline{\underline{16\,\mathrm{N}}}$$

9. *Die Raumstation V in Stanley Kubricks "2001: A Space Odyssey"*

   Die Menschen stehen auf der Innenseite des äusseren Randes der Raumstation und werden alleine durch die Normalkraft dieses Randes auf der Kreisbahn gehalten. D.h., es gilt:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot a_\mathrm{Z} \qquad \Rightarrow \qquad g_\text{gefühlt} = a_\mathrm{Z}$$

   Nun soll der gefühlte Ortsfaktor gerade dem Ortsfaktor $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ an der Erdoberfläche entsprechen. Daraus erhalten wir:

$$a_\mathrm{Z} = g_\text{gefühlt} \stackrel{!}{=} 1\,g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v^2}{r} = g$$

   Daraus folgt mit $v = \frac{2\pi r}{T}$ für den Durchmesser der Raumstation:

$$\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = g \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot (28\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 195\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad d = 2r = \underline{\underline{390\,\mathrm{m}}}$$

10. *Zentrifugentests für Kampfpiloten*

   (a) Der Astronaut wird von der Normalkraft F_N der äusseren Innenwand der Kapsel auf der Kreisbahn gehalten. D.h., diese Normalkraft macht gerade die Zentripetalkraft aus: $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z}$. Dafür berechnet man:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 8.5\,\mathrm{m}}{2.2\,\mathrm{s}} = 24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{75\,\mathrm{kg} \cdot (24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{8.5\,\mathrm{m}} = 5210\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{5200\,\mathrm{N}}}$$

   (b) Wir spüren unsere eigene Schwerkraft F_G nicht direkt. Unser Schwereeindruck entsteht erst durch die Normalkraft F_N des Bodens, gegen den wir wegen der Schwerkraft gedrückt werden. Wir können daher stets schreiben: $F_\mathrm{N} = m \cdot g_\text{gefühlt}$. (Nur wenn $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$ ist, gilt auch: $g_\text{gefühlt} = g$!) Als Folge davon lässt sich (gefühlte) Gravitation künstlich erzeugen, indem wir durch Kreisbewegungen grössere Normalkräfte hervorrufen. Genau das passiert in der Zentrifuge. Der vom Astronauten registrierte Ortsfaktor $g_\text{gefühlt}$ entspricht in der Kräftesituation $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z}$ gerade der Zentripetalbeschleunigung a_Z:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot a_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad g_\text{gefühlt} = a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{(24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{8.5\,\mathrm{m}} = 69.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   Vergleich mit dem normalen Ortsfaktor: $\frac{g_\text{gefühlt}}{g} = \frac{69.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{7.1}} \Rightarrow$ Der Astronaut verspürt 7.1 g.

11. *Gefühlte Schwerkraft auf der Achterbahn*

   (a) Im untersten Punkt des Achterbahntals gilt:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{N} - F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} + F_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot g + m \cdot a_\mathrm{Z}$$

$$g_\text{gefühlt} = g + a_\mathrm{Z} = g + \frac{v^2}{r} = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} + \frac{\left(\frac{126}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{45\,\mathrm{m}} = 37.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_\text{gefühlt}}{g} = \frac{37.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 3.8$$

   Man verspürt in diesem Achterbahntal also $\underline{\underline{3.8\,g}}$.

   (b) Analog findet man auf der Kuppe:

$$g_\text{gefühlt} = g - a_\mathrm{Z} = g - \frac{v^2}{r} = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} - \frac{\left(\frac{49}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{17\,\mathrm{m}} = -1.09\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   $\Rightarrow$ **Ja, es braucht Gurte**, weil die Zentripetalkraft F_Z offenbar grösser als F_G sein muss!

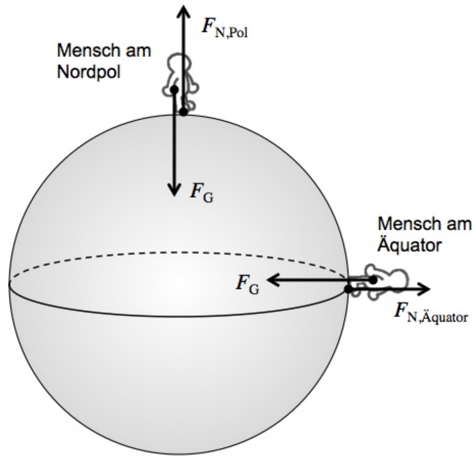
(c) Werden die Fahrgäste im obersten Punkt weder in die Gurte (nach unten) noch in die Sitzflächen (nach oben gedrückt, so fühlen Sie sich schwerelos und es muss gelten:

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{G}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 12\,\mathrm{m}} = 10.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Ab $\underline{\underline{39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}}$ werden die Fahrgäste also nicht mehr in die Gurten gedrückt!

12. *Lebt es sich am Äquator "leichter"?* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

(a) Die Gewichtskräfte F_{G}, die der Mensch am Pol und sein identischer Zwilling am Äquator erfahren, sind bei genau gleich gross, wenn man annimmt, dass die Erde eine perfekte Kugel ist.



Am Pol dreht sich der Mensch wegen der Erdrotation lediglich an Ort und Stelle. Er befindet sich dort also tatsächlich in einer Ruhesituation und es muss ein Kräftegleichgewicht zwischen der Normalkraft $F_{\mathrm{N,Pol}}$ und der Gewichtskraft F_{G} herrschen. Das gefühlte Gewicht, also seine Normalkraft $F_{\mathrm{N,Pol}} = m \cdot g_{\mathrm{Pol}}$, entspricht dort seiner tatsächlichen Gewichtskraft:

$$F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{N,Pol}} = m \cdot g_{\mathrm{Pol}}$$

Anders sieht es am Äquator aus. Dort bewegt sich der Zwilling auf einer Kreisbahn gleichförmig um die Erdachse. Damit dies der Fall sein kann, muss er ständig eine Zentripetalkraft F_{Z} erfahren. D.h., am Äquator muss die Normalkraft $F_{\mathrm{N,Äquator}}$ kleiner sein als die Gewichtskraft F_{G}. Der Boden muss den Zwilling nicht ganz so stark stützen, wie am Äquator, da wegen der Kreisbewegung gar nicht die gesamte Gewichtskraft kompensiert werden muss:

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{N,Äquator}} \quad \Rightarrow \quad m \cdot a_{\mathrm{Z}} = m \cdot g_{\mathrm{Pol}} - m \cdot g_{\mathrm{Äquator}} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{Z}} = g_{\mathrm{Pol}} - g_{\mathrm{Äquator}}$$

Somit spürt der Mensch am Äquator eine kleinere Normalkraft $F_{\mathrm{N,Äquator}}$ resp. einen kleineren Ortsfaktor $g_{\mathrm{Äquator}}$ als am Pol.

(b) Die Bahngeschwindigkeit eines Menschen am Äquator beträgt:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6\,370\,000\,\mathrm{m}}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 463.24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Mit den Erkenntnissen aus (a) folgt:

$$g_{\mathrm{Äquator}} = g_{\mathrm{Pol}} - a_{\mathrm{Z}} = g_{\mathrm{Pol}} - \frac{v^2}{r} = 9.832\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} - 0.03379\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.798\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \underline{\underline{9.80\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

Der tatsächliche Wert des gefühlten Ortsfaktors am Äquator beträgt sogar nur $9.780\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Grund dafür ist, dass neben Gravitation und Rotation noch weitere Faktoren für den Wert des Ortsfaktors relevant sind, z.B., dass die Erde keine perfekte Kugel, sondern ganz leicht abgeplattet ist.

(c) Die Abnahme des gefühlten Gewichtes beträgt etwa $\frac{0.03379}{9.832} = 0.00344 = 0.344\,\%$. Daraus ergibt sich für die Abnahme der gefühlten Masse: $0.00344 \cdot 60\,\mathrm{kg} = 0.206\,\mathrm{kg} \approx \underline{\underline{200\,\mathrm{g}}}$.

Eine solche "Gewichtsabnahme" lässt sich kaum spüren. Sie entspricht der Massenzunahme beim Trinken eines Glases Wasser, bei dem sich allerdings die zusätzliche Masse völlig gleichmässig auf den gesamten Körper verteilt. Das wird man nicht bemerken.

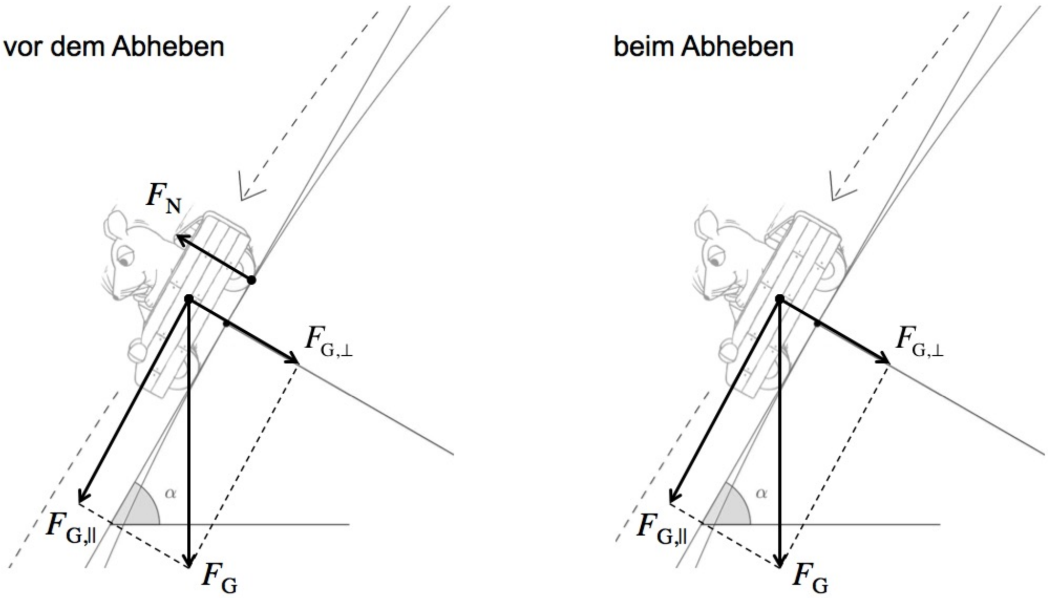
13. *Abheben – das Ende des Schweregefühls*

Zunächst sollte überlegt werden, wann denn genau der Zeitpunkt des Abhebens erreicht ist. Dazu drei Denkschritte, die zu den beiden Kräfteskizzen unterhalb gehören:

i. Vor dem Abheben wird der Wagen von der Normalkraft F_N getragen. Dieses F_N ist eine Reaktion der stabilen Kugeloberfläche auf die Senkrecht-Komponente $F_{\mathrm{G},\perp}$ der Gewichtskraft F_G.

ii. Allerdings gilt hier nicht $F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp}$, denn der Wagen fährt ja eine Kreisbahn ab und muss somit in jedem Moment eine Zentripetalkraft F_Z erfahren. D.h., die Normalkraft F_N braucht $F_{\mathrm{G},\perp}$ nicht komplett zu kompensieren. Vielmehr gilt: $F_\mathrm{Z} = F_{\mathrm{G},\perp} - F_\mathrm{N}$.

iii. Im Moment des Abhebens verschwindet die Normalkraft: $F_\mathrm{N} = 0$. Oder anders ausgedrückt: es braucht keine Normalkraft mehr, weil der Wagen gar nicht mehr gegen die Oberfläche drückt. Unser Kriterium für das Abheben lautet somit: $F_\mathrm{Z} = F_{\mathrm{G},\perp}$.



Nun wollen wir schauen, wie sich aus $F_\mathrm{Z} = F_{\mathrm{G},\perp}$ der Abhebe-Winkel α bestimmen lässt:

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{Z} = F_{\mathrm{G},\perp} \quad &\Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = mg\,\cos\alpha \qquad |\, v = \sqrt{2gh} \\
&\Rightarrow \quad \frac{2mgh}{r} = mg\,\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{2h}{r} = \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Das sieht schon vielversprechend aus. Allerdings steckt auch in der Höhendifferenz h eine Abhängigkeit vom Winkel α drin. h und α sind geometrisch miteinander verknüpft. Betrachtet man in der oberen Skizze der Aufgabenstellung die senkrechte Verbindung zwischen dem Kugelmittelpunkt M und dem Startpunkt des Wagens oben auf der Kugel, so entspricht die Länge dieser Strecke natürlich wieder genau einem Radius r und h ist ein Teil davon. Der andere Teil dieser Strecke kann im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck mit $r\cos\alpha$ identifiziert werden, sodass wir für h schreiben können:

$$h = r - r\cos\alpha = r\,(1 - \cos\alpha)$$

Mit diesem Ausdruck können wir unsere formale Rechnung von oben fortsetzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{2h}{r} = \cos\alpha \quad &\Rightarrow \quad \frac{2r(1-\cos\alpha)}{r} = \cos\alpha \qquad |\, r \text{ kürzen} \\
&\Leftrightarrow \quad 2(1-\cos\alpha) = \cos\alpha \qquad |\, \text{nach } \cos\alpha \text{ auflösen} \\
&\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \underline{\underline{48.2^\circ}}
\end{aligned}
$$

Es ist bemerkenswert, dass dieses Resultat weder von m, noch von r, noch von g abhängt!