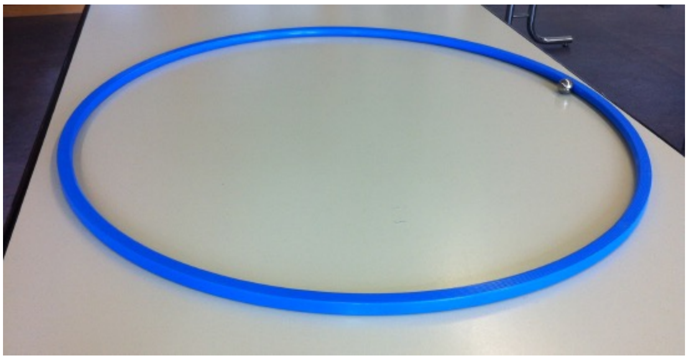
Übungen zur Mechanik

Serie 6: Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen

1. *Die Kugel im Hula-Hoop-Reif*

   Du kennst den Hula-Hoop-Reif aus der Gymnastik. Legen wir diesen Reif horizontal auf einen Tisch, so können wir eine Stahlkugel darin kreisen lassen:

   Aufgrund der geringen Rollreibung bleibt die Kugel dabei lange Zeit etwa gleich schnell, weshalb wir näherungsweise von einer gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) ausgehen dürfen.

   (a) Wir messen Radius und Umlaufszeit der Kugel im Hula-Hoop-Reif:

   $r =$ $\qquad\qquad$ $T =$

   Wie gross ist demnach die Bahngeschwindigkeit der Kugel im Reif?

   (b) Welche Zentripetalbeschleunigung erfährt die Kugel aufgrund der unter (a) erhobenen Messdaten?

   (c) Welche Kraft (Art?) hält die Kugel ganz konkret auf ihrer Kreisbahn? Anders gefragt: Wie setzt sich hier die Zentripetalkraft (= Name von F_{res} im Falle einer gfK) zusammen?
   Zeichne eine Kräfteskizze und lies daraus die Kraftgleichungen ab!

   (d) Wie stark wird der Innenrand des Reifs am aktuellen Ort der Kugel belastet?
   Vorüberlegung: Welche Grösse müssen wir zusätzlich zu den unter (a) ermittelten Messwerten zur Beantwortung dieser Frage noch kennen?

   (e) Zum Kraftbetrag $1\,\text{N}$ sollten Sie eine konkrete Vorstellung haben ("$1\,\text{N}$ entspricht in etwa...").
   Kommentiere die Antwort zu (d), indem du sie mit dieser Vorstellung vergleichst.

2. *Alltägliche Bahngeschwindigkeiten im Sonnensystem*

   (a) Die Erde dreht sich bekanntlich einmal pro Tag um ihre Rotationsachse. Wie gross ist demzufolge die Bahngeschwindigkeit eines Menschen am Äquator aufgrund der Erdrotation?
   Gib diese Geschwindigkeit einmal in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ und einmal in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

   (b) Den mittleren Abstand zwischen Sonnenmittelpunkt und Erdmittelpunkt bezeichnet man als **Astronomische Einheit** AE. Es gilt:

   $$1\,\text{AE} = 149\,600\,000\,\text{km}$$

   Wie gross ist somit die mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne?

   (c) Ein typischer Kommunikationssatellit umrundet die Erde mit einer Bahngeschwindigkeit von z.B. $7.65\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dafür braucht er $93.2\,\text{min}$.
   Wie viele Kilometer über der Erdoberfläche ist der Satellit unterwegs?
   Hinweis: Mittlerer Erdradius $R_{\text{E}} = 6370\,\text{km}$.

3. *Hammerwerfen*

   Beim Abwurf erreicht ein Leichtathletik-Hammer bei Spitzenwerfern eine Geschwindigkeit von $105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Die Hammerkugel besitzt eine Masse von $7.0\,\mathrm{kg}$. Berechne, mit welcher Kraft der Werfer den Hammer kurz vor dem Abwurf halten muss, wenn dieser sich in diesem Moment auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $1.7\,\mathrm{m}$ befindet.

4. *Die Karussellfahrt*

   Ein Kind mit einer Masse von $27\,\mathrm{kg}$ fährt ein paar Runden auf dem Rücken eines "Karussellrösslis". Der Durchmesser seiner Kreisbahn beträgt dabei $10.5\,\mathrm{m}$. Bei maximaler Fahrt ist das Kind mit einer Geschwindigkeit von $4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unterwegs.

   (a) Wie lange dauert **eine Umdrehung** des Karussells?

   (b) Wie gross ist die **Zentripetalkraft**, die das Kind erfährt?

   (c) Welche **Kräfte** sind dafür verantwortlich, dass das Kind auf der Kreisbahn bleibt? Wie kommt also die auf das Kind wirkende Zentripetalkraft zustande?

   Nenne die Namen der entsprechenden Kräfte und schildere kurz, was du damit meinst (ev. Skizze zeichnen).

5. *Die Formel für die Zentripetalkraft*

   Beschreibt ein Körper der Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung mit Geschwindigkeitsbetrag v und Bahnradius r, so muss auf ihn eine resultierende Kraft wirken, welche ins Zentrum der Kreisbahn zeigt. Wir bezeichnen F_{res} in diesem Fall als **Zentripetalkraft** F_{Z}. Es gilt:

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

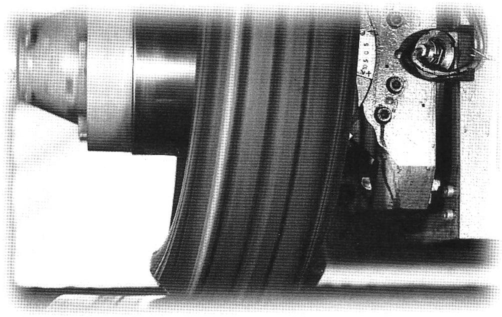
   Erläutere den physikalischen Inhalt dieser Gleichung. Warum treten die drei Grössen m, v und r darin gerade so auf? Welche qualitativen Aussagen stecken dahinter?

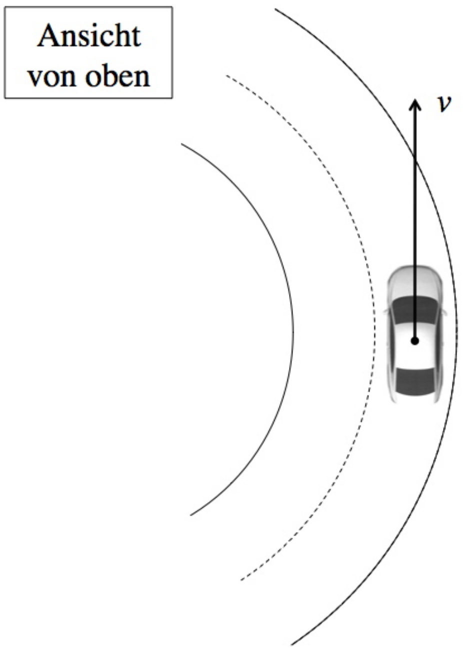
   Ein Beispiel: "Die Masse steht für die Trägheit des Körpers, also sein Bestreben, seinen aktuellen Bewegungszustand (Geschwindigkeitsbetrag und Bewegungsrichtung) aufrechtzuerhalten. Daraus folgt: Will ich den Körper von seiner Trägheitsbahn ablenken, so brauche ich dafür umso mehr Kraft, je grösser seine Masse ist. Darum muss die Zentripetalkraft umso grösser sein, je grösser die Masse des Körpers ist, und die Masse m taucht im Zähler der Formel für die Zentripetalkraft auf!"

   Mache nun analoge Aussagen für den Bahnradius r und die Bahngeschwindigkeit v.

6. *Kurvenfahrt im Auto* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

   Das nebenstehende Bild zeigt einen Autopneu während einer Kurvenfahrt.
   Erläutere die Kräftesituation des Autos in der Kurve anhand der folgenden Skizzen. Überlege dir genau, welche Kräfte in welche Richtungen auf das Auto wirken müssen, damit es eine gfK ausführt. Damit erklärst du anschliessend, weshalb der Pneu auf dem Bild rechts auf diese Weise verformt wird und aus welcher Perspektive man ihn demzufolge sieht.





7. *Achtung nasse Strasse!* **($\approx$ Zwischenprüfungsaufgabe)**

   Dies ist die Fortsetzung von Aufgabe 6! Sie sollten die dortige Kräftesituation vor Augen haben.

   Ein Auto ($m = 1300\,\mathrm{kg}$) fährt bei strömendem Regen auf einer Überlandstrasse (Tempolimit 80 km/h). Das zahlreiche Wasser auf der Strasse verringert die seitliche Haftreibungszahl μ_H zwischen Strasse und Pneus auf einen Wert von lediglich 0.31 (vgl. ca. 0.7 bei trockener Strasse). Das Auto nähert sich einer Kurve, deren engster Radius gerade $99\,\mathrm{m}$ beträgt.

   Mit wie vielen $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ darf das Auto maximal durch die Kurve fahren, ohne ins Schleudern zu kommen?

   Hinweis: Die maximale Haftreibungskraft ist gegeben durch $F_{\mathrm{R,max}} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N}$.

8. *Der Gummiball an der Schnur*

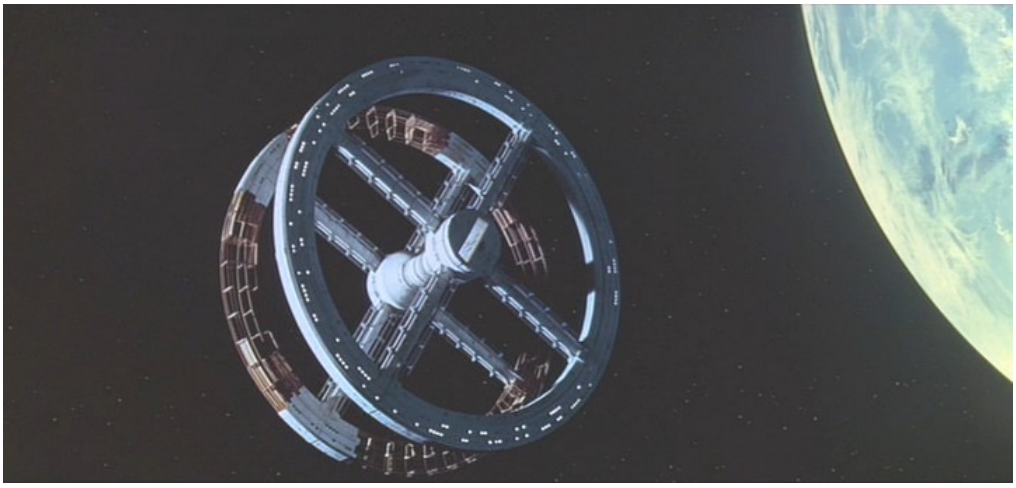
   (a) Du schwingst einen Gummiball von $82\,\mathrm{g}$ Masse an einem Faden von $55\,\mathrm{cm}$ Länge fast horizontal um Ihre Hand. Eine Runde soll $1.0\,\mathrm{s}$ dauern. In dieser Situation muss die von deiner Hand erzeugte Zugkraft im Faden gerade ungefähr gleich der Zentripetalkraft sein.

   (Dies stimmt nur ungefähr, weil der Gummiball gleichzeitig schwer ist und eine Gewichtskraft nach unten erfährt. Streng genommen muss deine Zugkraft also etwas grösser sein, weil du damit noch einen Teil der Gewichtskraft kompensieren musst.)

   Berechne, mit welcher Kraft du in der geschilderten Situation an der Schnur ziehst.

   (b) Wie gross wird die Zugkraft, wenn du den Ball doppelt oder dreimal so schnell kreisen lässt?

9. *Die Raumstation V in Stanley Kubricks "2001: A Space Odyssey"* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

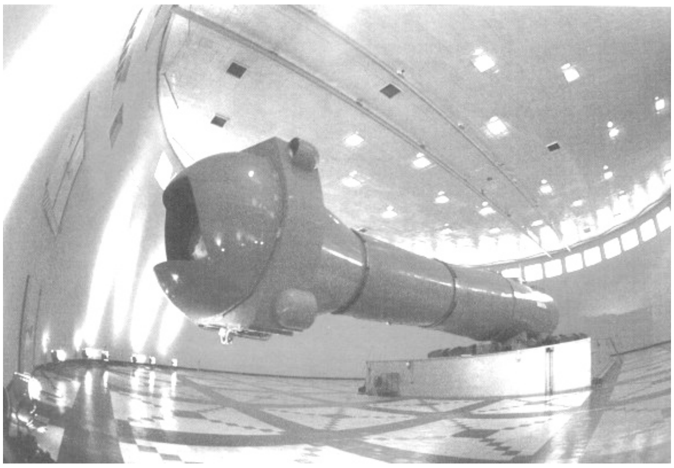


Im Film weist die Raumstation in einer Einstellung eine Umlaufszeit von gerade etwa $28\,\mathrm{s}$ auf. Die Menschen in ihrem Innern sollen am äusseren Rand der Station eine künstliche Gravitation erfahren, die gerade ihrer Gewichtskraft auf der Erdoberfläche entspricht ($1\,g$).

Wie gross muss demzufolge der Durchmesser von Raumstation V sein?

10. *Zentrifugentests für Kampfpiloten*

In grossen Zentrifugenanlagen wird getestet, welche Kräfte resp. Beschleunigungen ein Kampfjetpilot noch aushält. Ab gewissen Beschleunigungen wird man nämlich ohnmächtig. Der Pilot sitzt dabei in einer Kapsel, welche an einem langen Dreharm befestigt ist. Durch die Drehung der Zentrifuge wird er gegen die Aussenwand der Kapsel gedrückt. So können starke Beschleunigungen simuliert werden.
Der Pilot in der Kapsel sei $8.5\,\mathrm{m}$ von der Drehachse entfernt. Seine Masse betrage $75\,\mathrm{kg}$. In $2.2\,\mathrm{s}$ drehe die Kapsel eine Runde.



(a) Es ist die Normalkraft der Aussenwand, welche den Piloten auf seiner Kreisbahn hält. Diese Kraft spürt er. Durch sie wird er belastet. Wie gross ist diese Kraft?

(b) Ist die unter (a) berechnete Normalkraft z.B. 4-mal so gross wie die normale Gewichtskraft des Piloten an der Erdoberfläche, so sagt man: "Der Pilot erfährt eine Belastung von $4\,g$." Die Zentripetalbeschleunigung a_Z ist 4-mal so gross wie der normale Ortsfaktor g.

Wie steht es in der gegebenen Situation mit dem Piloten in der Zentrifuge? Wie vielen g's wird er gerade ausgesetzt?

Zum Vergleich: Ab $8\,g$ ist für Menschen üblicherweise Schluss, d.h., man wird ohnmächtig und sollte einer solchen Beschleunigung auch nicht länger ausgesetzt sein.

11. *Gefühlte Schwerkraft auf der Achterbahn* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

(a) Auf einer Achterbahn fahren die Wagen mit $126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ durch eine Senke, deren Krümmungsradius am tiefsten Punkt $45\,\mathrm{m}$ beträgt. Mit wie vielen g's werden die Fahrgäste dann in die Sitze gedrückt?

(b) Umgekehrt wird eine Kuppe mit einem Krümmungsradius von $17\,\mathrm{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $49\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ passiert. Sind die Fahrgäste an dieser Stelle auf Gurte angewiesen, die dafür sorgen, dass sie im Wagen bleiben?

(c) Wie schnell muss die Achterbahn mindestens durch den obersten Punkt eines Loopings mit Krümmungsradius $12\,\mathrm{m}$ fahren, damit die Fahrgäste nicht aus dem Wagen fallen resp. nicht auf die Gurte angewiesen sind?

Tipp: Überlege dir ganz genau, wie die Kräftesituation aussehen muss, wenn genau keine Gurte gebraucht werden und die Fahrgäste auch nicht gegen die Sitzpolster gedrückt werden.

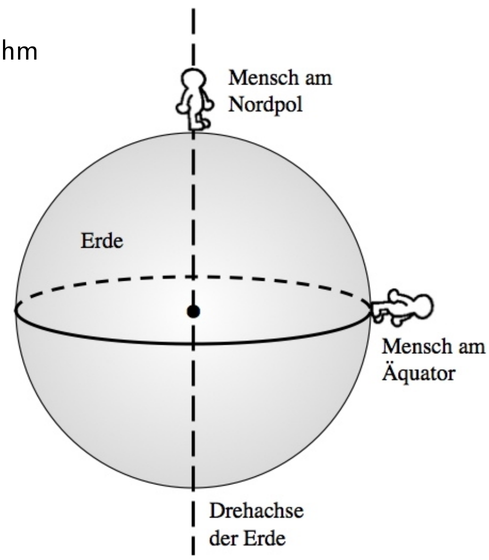
12. *Lebt es sich am Äquator "leichter"?* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

Die Erde dreht sich einmal pro Tag um ihre Achse. Unsere Kraftwahrnehmung lässt uns diese Erdrotation allerdings nicht spüren, weil der Effekt einfach zu klein ist. Davon überzeugst du dich in dieser Aufgabe.

(a) Ein Mensch stehe am Nordpol, sein identischer Zwilling am Äquator. Weshalb könnte sich der Zwilling am Äquator allenfalls leichter fühlen?

Der Mensch am Pol dreht sich an Ort und Stelle. Bei ihm sind Gewichtskraft und Normalkraft im Gleichgewicht. Dies ist beim Menschen am Äquator anders, denn dort muss sich als resultierende Kraft eine Zentripetalkraft ergeben, damit der Mensch eine gfK um die Erdachse beschreibt.

Rep.: Schwereeindruck: $F_\mathrm{N} = m \cdot g_\mathrm{gefühlt}$.



(b) Am Pol herrscht ein "rotationsfreier" Ortsfaktor von $g_\mathrm{Pol} = 9.832\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Am Äquator ist der gefühlte Ortsfaktor aufgrund der Erdrotation etwas geringer. Wie aus der Kraftsituation folgt, entspricht der Unterschied genau der Zentripetalbeschleunigung a_Z, welche Objekte am Äquator erfahren:

$$g_\text{Äquator} = g_\mathrm{Pol} - a_\mathrm{Z}$$

Wie gross ist demzufolge der "rotationsberichtigte" und somit tatsächlich am Äquator gefühlte Ortsfaktor $g_\text{Äquator}$? (Erdradius: $R = 6370\,\mathrm{km}$)

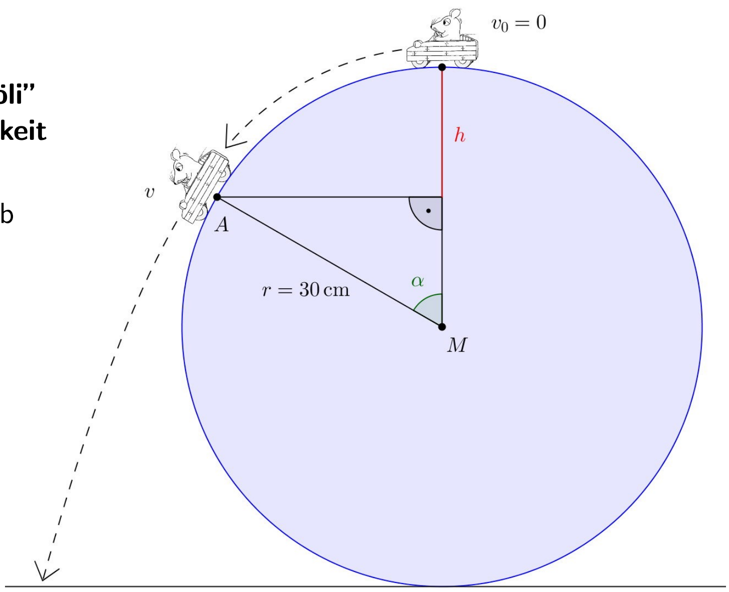
(c) Beide Zwillinge sollen eine identische Masse von $6\underline{0}\,\mathrm{kg}$ besitzen. Um wie viele Gramm fühlt sich der Zwilling am Äquator leichter als sein Bruder am Pol?

13. **Zusatzaufgabe:** *Abheben – das Ende des Schweregefühls*

Eine kleine Vorwarnung: Dies ist eine richtig tolle, aber auch ganz schön anspruchsvolle Aufgabe, die ich im Sommer 2016 an der mündlichen Physikmatur der 145. Promotion gestellt habe. Zur Lösung musst du deinen Grips also schon ziemlich zusammennehmen! ☺

Ich lasse ein Spielzeugauto von der Spitze eines Balls (Durchmesser $62\,\mathrm{cm}$) losrollen.

Bei welchem Winkel α hebt das "Autöli" aufgrund seiner zu hohen Geschwindigkeit vom Ball ab?



Tipp 1: Wie schwer fühlt sich die Maus ab dem Moment des Abhebens und wie sieht demzufolge die Kräftesituation beim Abhebepunkt A aus (vgl. Skizze unten)?

Tipp 2: Die Aufgabe verlangt nach einer Zerlegung der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene.

Hinweis: Wie wir unter dem Stichwort "Energieerhaltung" im zweiten Quartal dieses Semesters noch herausfinden werden, gilt bei vernachlässigbar kleiner Rollreibung – und davon wollen wir ausgehen – der folgende Zusammenhang zwischen erreichter Geschwindigkeit v und zurückgelegter Höhendifferenz h:

$$v = \sqrt{2gh}$$