Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 7

1. *Erdumrundung im Space Shuttle*

   (a) Der Bahnradius des Space Shuttle-Umlaufbahn beträgt $r = 6370\,\mathrm{km} + 450\,\mathrm{km} = 6820\,\mathrm{km}$. Damit folgt für die Bahngeschwindigkeit (Achtung: $90\,\mathrm{min}$ hat nur 1 signifikante Ziffer):

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6820\,\mathrm{km}}{90\,\mathrm{min}} = \frac{2\pi \cdot 6820\,\mathrm{km}}{90 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 7.94\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}$$

   (b) Der Orbiter (Masse m) wird durch die Gravitation zur Erde (Masse M) auf der Umlaufbahn gehalten. F_G ist die einzig wirkende Kraft und muss somit gleich der Zentripetalkraft sein: $F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G}$. Daraus folgern wir unter Ausnutzung der Formel für die Zentripetalkraft und dem Gravitationsgesetz auf die Geschwindigkeit:

   $$\begin{aligned}
   & & F_\mathrm{Z} &= F_\mathrm{G} && \mid \text{Formeln einsetzen}\\
   &\Rightarrow & \frac{m \cdot v^2}{r} &= G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} && \mid \cdot \frac{r}{m}\\
   &\Leftrightarrow & v^2 &= \frac{G \cdot M}{r} && \mid \sqrt{\cdots}\\
   &\Rightarrow & v &= \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} && \mid \text{Werte einsetzen}\\
   & & &= \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6\,820\,000\,\mathrm{m}}} = 7643\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{7.64\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}
   \end{aligned}$$

   Die Daten aus dem Film sind also durchaus plausibel. Die 90 Minuten sind auch keine besonders genaue Angabe! Tatsächlich sind es eher knapp 94 Minuten.

   Eine weitere Anmerkung seien dieser Rechnung nachgestellt: In der Rechnung kürzt sich die Masse des kreisenden Körpers heraus. Das ist immer so bei einem Körper, der gravitativ um einen viel massigeren Zentralkörper kreist. In der Physik spricht man vom **Zentralkörperproblem** und meint damit die Himmelsgleichung als die der Situation zugrunde liegende Kräftegleichung, die dieses Wegfallen der kreisenden Masse zur Folge hat.

   Das Wegfallen von m ist der Grund für die **Schwerelosigkeit** der Astronauten im Orbiter: Astronauten und Orbiter kreisen auf die genau gleiche Weise (gleiche Höhe, gleiche Geschwindigkeit, gleiche Umlaufszeit) um die Erde – sozusagen: Parallelflug. Relativ zueinander herrschen dabei keine Kräfte, die für diese Kreisbahnen notwendig wären. D.h., die Astronauten werden im Orbiter gegen keine Wände gedrückt. Es treten aufgrund der Kreisbewegung keine Normalkräfte auf und erfahren somit kein Schweregefühl.

   (c) Die Bahngeschwindigkeit ist beträchtlich: $7.6\,\mathrm{km}$ **pro Sekunde**! Um solche Geschwindigkeiten zu erreichen ist eine Menge Energie nötig. Jedes bisschen, dass man sparen kann, ist wertvoll. Nun dreht sich die Erde in Richtung Osten (wenn wir von oben auf den Nordpol blicken im Gegenuhrzeigersinn). Das bedeutet, dass das Space Shuttle oder die Raketen beim Start bereits eine Anfangsgeschwindigkeit in Richtung Osten aufweisen. Es wäre relativ dumm diese Tatsache nicht auszunutzen, wenn man in den Weltraum reisen möchte. Indem man nach Osten startet, nutzt man also einfach diesen Startvorteil aus.

   Damit der Effekt möglichst gross ist, sollte man am Äquator (oder einigermassen nahe davon) starten, denn dort ist die Bahngeschwindigkeit um die Erdachse am grössten, nämlich ca. $0.5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, wie wir in Serie 4 (Aufgabe 2.(a)) bereits berechnet hatten.

2. *Berechnung der Sonnenmasse*

   (a) Erneut sorgt die Gravitation zwischen einem sehr massereichen Zentralkörper (Sonne) und einem wesentlich leichteren Körper (Erde) dafür, dass der leichtere Körper um den Zentralkörper kreist. Wir starten also wieder bei der "Himmelsgleichung":

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{Z} \qquad |\,\text{Formeln einsetzen}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G \cdot M_\mathrm{S} \cdot M_\mathrm{E}}{r^2} = \frac{M_\mathrm{E} \cdot v^2}{r} \qquad |\cdot \frac{r^2}{G \cdot M_\mathrm{E}}$$

$$\Rightarrow \quad M_\mathrm{S} = \frac{r \cdot v^2}{G} \qquad |\,\text{Werte einsetzen}$$

$$= \frac{1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \cdot (29\,806\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}} = 1.991 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \simeq \underline{\underline{1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}}$$

   (b) Das **Massenverhältnis** zwischen Sonne und Erde beträgt:

$$\frac{M_\mathrm{S}}{M_\mathrm{E}} = \frac{1.991 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}} = \frac{1.991 \cdot 10^{6}}{5.97} = 333\,563 \simeq \underline{\underline{334\,000}}$$

   Die Sonnenmasse ist etwa 334 000-mal so gross wie die Erdmasse!

3. *Der Ortsfaktor auf der Oberfläche des Planeten Mars*

$$R_\mathrm{Mars} = 3400\,\mathrm{km} \quad \Rightarrow \quad g_\mathrm{M} = \frac{G \cdot M_\mathrm{Mars}}{R_\mathrm{M}^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 6.4 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}}{(3\,400\,000\,\mathrm{m})^2} = 3.69\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g_\mathrm{E}}{g_\mathrm{M}} = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{3.69\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} \simeq \underline{\underline{2.7}}$$

Der gravitative Ortsfaktor auf dem Mars ist um den Faktor 2.7 kleiner als derjenige auf der Erde.

4. *Der Mond – alles über unseren Trabanten*

   (a) Für das Massenverhältnis ergibt sich

$$\frac{M_\mathrm{Erde}}{M_\mathrm{Mond}} = \frac{5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}} = \frac{5.97 \cdot 10^{2}}{7.35} = \frac{597}{7.35} \simeq \underline{\underline{81.2}}$$

   Die Erdmasse ist gut 81-mal so gross wie die Mondmasse.

   (b) Für die Bahngeschwindigkeit des Mondes ergibt sich:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 380\,000\,\mathrm{km}}{27.3 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 1.012\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{1.0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}$$

   (c) Für die Gravitation zwischen Mond und Erde folgt mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz:

$$F_\mathrm{G} = G \cdot \frac{M_\mathrm{Erde} \cdot M_\mathrm{Mond}}{r^2}$$

$$= 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(380\,000\,000\,\mathrm{m})^2} = 2.03 \cdot 10^{20}\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{2.0 \cdot 10^{20}\,\mathrm{N}}}$$

   (d) Der Ortsfaktor auf der Mondoberfläche beträgt:

$$g_\mathrm{Mond} = \frac{G \cdot M_\mathrm{Mond}}{R_\mathrm{Mond}^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(1\,740\,000\,\mathrm{m})^2} = 1.620\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{1.62\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

5. *Newtons Gedankenexperiment*

   Bereits auf seiner Flugbahn direkt über der Erdoberfläche gilt für den Stein die "Himmelsgleichung" $F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G}$. Im Gegensatz zu Objekten, die "weiter draussen" um die Erde kreisen, kennen wir an der Erdoberfläche den Ortsfaktor g, sodass wir hier die Gewichtskraft direkt via $F_\mathrm{G} = m \cdot g$ ansetzen können und nicht das kompliziertere Gravitationsgesetz benötigen. Das vereinfacht die Angelegenheit:

$$\begin{array}{rrcll}
 & F_\mathrm{Z} & = & F_\mathrm{G} & \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow & \dfrac{m \cdot v^2}{r} & = & m \cdot g & \mid \cdot \dfrac{r}{m} \\
\Leftrightarrow & v^2 & = & g \cdot r & \mid \sqrt{\ldots} \\
\Rightarrow & v & = & \sqrt{g \cdot r} & \mid \text{Werte einsetzen} \\
 & & = & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{9.81\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 6\,370\,000\,\mathrm{m}} = 7\,905.04\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{7.91\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}}
\end{array}$$

   Diese Geschwindigkeit, mit der ein Objekt direkt über der Oberfläche eines Himmelkörpers diesen umkreisen kann, bezeichnet man in der Astronomie als **1. kosmische Geschwindigkeit des Himmelkörpers**. Die 1. kosmische Geschwindigkeit der Erde beträgt also etwa $8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

6. *GPS – Global Positioning System*

   Wir starten mit der "Himmelsgleichung" $F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G}$, denn die GPS-Satelliten (Masse m) kreisen aufgrund der Gravitation um die Erde (Masse M). Für die Umlaufszeit T folgern wir daraus:

$$\begin{array}{rrcll}
 & F_\mathrm{Z} & = & F_\mathrm{G} & \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow & \dfrac{m \cdot v^2}{r} & = & G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2} & \mid \cdot \dfrac{r}{m} \\
\Leftrightarrow & v^2 & = & \dfrac{G \cdot M}{r} & \mid v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T} \\
\Rightarrow & \left(\dfrac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 & = & \dfrac{G \cdot M}{r} & \mid \text{links quadrieren} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} & = & \dfrac{G \cdot M}{r} & \mid \cdot (T^2 \cdot r) \\
\Leftrightarrow & 4\pi^2 \cdot r^3 & = & G \cdot M \cdot T^2 & \mid : (G \cdot M) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} & = & T^2 & \mid \sqrt{\ldots} \\
\Rightarrow & T & = & \sqrt{\dfrac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}} & \mid \text{Werte einsetzen} \\
 & & = & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{\dfrac{4\pi^2 \cdot (26\,600\,000\,\mathrm{m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 43\,184\,\mathrm{s} = 12.00\,\mathrm{h} \simeq \underline{\underline{12.0\,\mathrm{h}}}}
\end{array}$$

   Ein GPS-Satellit umrundet die Erde also ziemlich genau zweimal pro Tag.

   Anmerkung: Rechnerisch haben wir hier nun zum ersten Mal die Gleichung für die Bahngeschwindigkeit bei einer gfK ($v = \frac{2\pi r}{T}$) eingesetzt und damit formal weiter gerechnet. Die Geschwindigkeit als Zwischenresultat zu berechnen, war nämlich gar nicht möglich, weil uns dazu die Umlaufszeit T gefehlt hätte. In den weiteren Aufgaben werden wir noch einige Male so vorgehen.

7. *Die Vorbereitung der Formelsammlung*

Keine bestimmten Lösungen. Ev. empfiehlt sich die Hinzunahme der folgenden Gleichung für den von einer Normalkraft herrührenden Schwereeindruck $g_{\text{gefühlt}}$ in einer bestimmten Situation:

$$F_\text{N} = m \cdot g_{\text{gefühlt}}$$

8. *Erde vs. Jupiter*

(a) Für den gravitativen Ortsfaktor an der (nicht stabilen) Oberfläche von Jupiter findet man:

$$g_\text{J} = \frac{G \cdot M_\text{J}}{R_\text{J}^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1.90 \cdot 10^{27}\,\text{kg}}{(69\,500\,000\,\text{m})^2} = 26.252\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \simeq \underline{\underline{26.3\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}}}$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem Ortsfaktor an der Erdoberfläche:

$$\frac{g_\text{J}}{g_\text{E}} = \frac{26.252\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 2.676 \simeq \underline{\underline{2.68}}$$

Der gravitative Ortsfaktor an der Jupiteroberfläche ist also etwa 2.7-mal so gross wie bei der Erde. Es stellt sich allerdings die Frage, ob man beim Gasplaneten Jupiter überhaupt von einer richtigen Oberfläche sprechen kann...

(b) Typische Anwendung der "Himmelsgleichung" mit dem Jupiter als kreisenden und der Sonne als Zentralkörper (vgl. z.B. Aufgabe 6):

$$\begin{aligned}
& F_\text{Z} = F_\text{G} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow\quad & \frac{M_\text{J} \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M_\text{S} \cdot M_\text{J}}{r^2} && |\cdot \frac{r}{M_\text{J}}\\
\Leftrightarrow\quad & v^2 = \frac{G \cdot M_\text{S}}{r} && |\,v = \frac{2\pi \cdot r}{T}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_\text{S}}{r} && |\cdot (T^2 \cdot r)\\
\Leftrightarrow\quad & 4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M_\text{S} \cdot T^2 && |\,:(G \cdot M_\text{S})\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_\text{S}} = T^2 && |\sqrt{\dots}\\
\Rightarrow\quad & T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_\text{S}}} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
& = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (7.42 \cdot 10^{11}\,\text{m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}}\\
& = 3.4847 \cdot 10^8\,\text{s} = 96\,797\,\text{h} = 4033.2\,\text{d} = 11.049\,\text{a} \simeq \underline{\underline{11.0\,\text{Jahre}}}
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist T ein knappes Jahr grösser, weil die Jupiterbahn nicht so perfekt kreisförmig ist. **Anmerkung:** Wie schon bei Aufgabe 6 sind wir von der "Himmelsgleichung" ausgegangen, haben dann die Formeln für F_Z und F_G eingesetzt, dann hat sich die Masse des kreisenden Körpers weggekürzt und danach haben wir die Gleichung für die Geschwindigkeit bei einer gfK eingesetzt. Jedesmal, wenn wir das so machen – und das kommt noch ein paarmal vor! – landen wir bei:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Eigentlich müssten wir uns diese Gleichung merken, denn das Zentralkörperproblem ("kleine Masse m kreist gravitativ um grössere Masse M") führt immer hierhin...

(c) Und gleich nochmals die "Himmelsgleichung" in Aktion:. Nun kreist Kallisto (Masse m) um den Zentralkörper Jupiter (Masse M). Diesmal lösen wir nach r auf:

$$\begin{aligned}
& & F_\mathrm{Z} &= F_\mathrm{G} & &\mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v^2}{r} &= G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} & &\mid \cdot\frac{r}{m}\\
&\Leftrightarrow & v^2 &= \frac{G\cdot M}{r} & &\mid v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\\
&\Leftrightarrow & \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} &= \frac{G\cdot M}{r} & &\mid \cdot(T^2\cdot r)\\
&\Leftrightarrow & 4\pi^2\cdot r^3 &= G\cdot M\cdot T^2 & &\mid :(4\pi^2)\\
&\Leftrightarrow & r^3 &= \frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2} & &\mid \sqrt[3]{\ldots}\\
&\Rightarrow & r &= \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} & &\mid \text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt[3]{\frac{6.674\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot1.90\cdot10^{27}\,\mathrm{kg}\cdot(16.69\cdot24\cdot3600\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}}\\
& & &= 1.883\cdot10^9\,\mathrm{m} = 1\,883\,000\,\mathrm{km} \simeq \underline{\underline{1\,880\,000\,\mathrm{km}}}
\end{aligned}$$

Unser Mond umkreist die Erde auf einer Bahn mit Radius $r \approx 380\,000\mathrm{km}$. Die Umlaufbahn von Kallisto hat einen etwa fünfmal so grossen Radius und somit ist auch ihr Umfang fünfmal so gross wie bei unserem Mond. Hingegen benötigt Kallisto nur knapp 17 Tage für eine Jupiterumrundung, also gut 10 Tage weniger als der Erdmond um die Erde braucht. Das bedeutet, Kallisto muss viel schneller unterwegs sein! Und das wiederum ist ja auch klar, denn der Jupiter hat aufgrund seiner riesigen Masse auch eine wirklich erheblich grössere gravitative Wirkung auf die Objekte in seiner Nähe als die Erde. Sollen die Jupitermonde nicht in den Planeten stürzen, müssen sie richtig grosse Geschwindigkeiten aufweisen.

Anmerkung: Erneut ergab sich zwischenzeitlich die Gleichung $4\pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$, bevor wir nach der gesuchten Grösse aufgelöst haben.

9. *Meteosat – ein geostationärer Satellit*

(a) Geostationär heisst, Meteosat bewegt sich mit resp. über einem Ort an der Erdoberfläche. Der Mittelpunkt der Satellitenumlaufbahn muss zwangsläufig der Erdmittelpunkt sein, denn die Gravitation zeigt dorthin. ("Bei gleichförmigen Kreisbewegungen ist die resultierende Kraft stets eine ins Zentrum der Bahn zeigende Zentripetalkraft.")

Daraus folgt aber, dass der Ort auf der Erdoberfläche, über dem sich ein geostationärer Satellit befinden kann, **auf dem Äquator** liegen muss, denn dies sind die einzigen Orte auf der Erdoberfläche, deren Kreisbahnen als Zentrum ebenfalls den Erdmittelpunkt haben.

(b) Wieder handelt es sich um ein Zentralkörperproblem. Nun kreist der Satellit um die Erde und wir interessieren uns für den Bahnradius, den wir aus der Umlaufszeit und der Erdmasse berechnen wollen. Die formale Lösung ist genau identisch mit derjenigen in Aufgabe 8.(c). Ich verzichte deshalb darauf und setze einfach die neuen Werte ein (die Umlaufszeit beträgt $T = 24\,\mathrm{h}$):

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_\mathrm{E}\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot5.97\cdot10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot(24\cdot3600\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}}$$
$$= 4.2235\cdot10^7\,\mathrm{m} = 42\,235\,\mathrm{km} \simeq \underline{\underline{42\,200\,\mathrm{km}}}$$

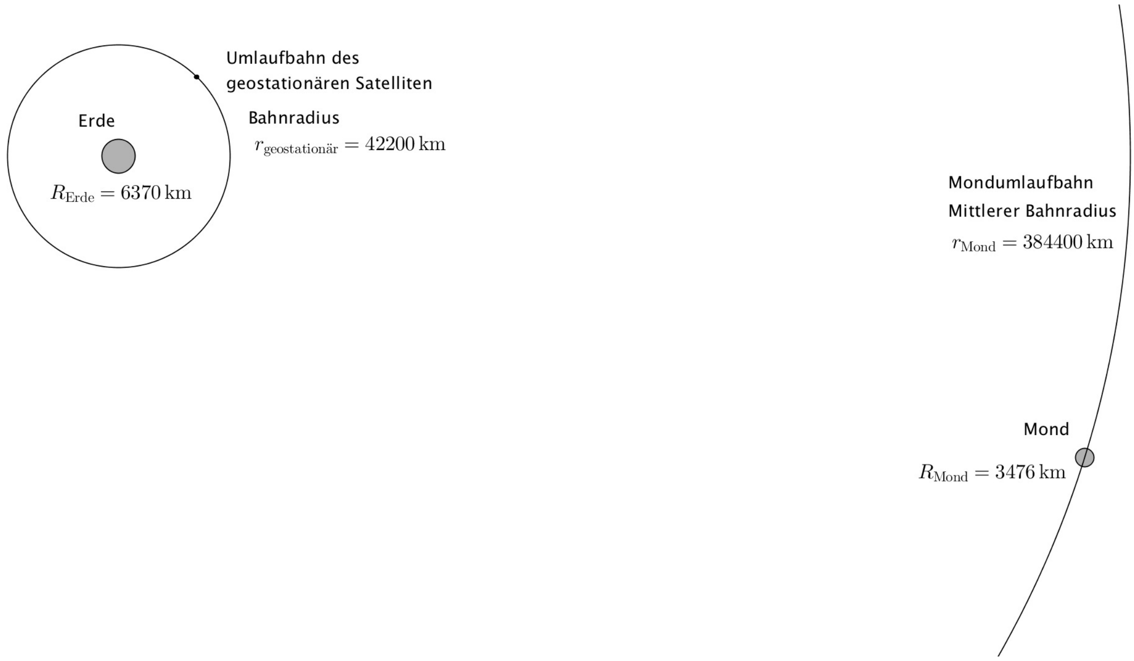
Wir vergleichen das Resultat mit dem Erdradius:

$$\frac{r}{R_\mathrm{E}} = \frac{42\,235\,\mathrm{km}}{6\,370\,\mathrm{km}} \simeq \underline{\underline{6.63}}$$

Damit kreist Meteosat tatsächlich recht weit oben. Sein Bahnradius ist etwas grösser als der Erdumfang!

Mit jedem beliebigen Ball kannst du dir folglich leicht massstäblich veranschaulichen, in welcher Höhe sich geostationäre Satelliten etwa befinden: Rolle den Ball einfach einmal ganz ab, dann hast du die ungefähre Distanz im richtigen Grössenverhältnis zum Ball.

Hier eine massstäbliche Skizze mit Erde, Mond und der Umlaufbahn von Meteosat:



10. *Der Neutronenstern – ein absolut verrücktes Objekt*

(a) Wir für den Ortsfaktor erhalten wir aus der Sternmasse und dem Sternradius:

$$g_{1000} = \frac{G\cdot M}{r^2} = \frac{G\cdot M}{(R+h)^2} = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 3.5\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\left(\frac{29\,000\,\mathrm{m}}{2} + 1000.0\,\mathrm{m}\right)^2} = 9.722\,789\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{9.7\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

Das ist ein unvorstellbar grosser Wert! Die gravitative Anziehung auf dieser Höhe über der Neutronensternoberfläche wäre etwa 10 Milliarden mal grösser als auf der Erdoberfläche!

(b) Natürlich ergibt sich etwa das gleich Resultat wie bei Aufgabe (a). Nach der Rundung auf signifikante Ziffern ist es sogar genau dasselbe:

$$g_{1001} = \frac{G\cdot M}{r^2} = \frac{G\cdot M}{(R+h)^2} = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 3.5\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\left(\frac{29\,000\,\mathrm{m}}{2} + 1001\,\mathrm{m}\right)^2} = 9.721\,534\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{9.7\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

(c) Allerdings muss es ja doch einen Unterschied zwischen den beiden Resultaten aus (a) und (b) geben. Dafür erhalten wir aus den ungerundeten Werten:

$$\Delta g = g_{1000} - g_{1001} = 9.722\,789\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} - 9.721\,534\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1.254\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{130\,000\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

Ein Kilogramm Masse auf 1000 Meter über der Sternoberfläche würde also mit 130 Millionen Newton stärker angezogen als ein Kilogramm Masse auf 1001 Meter. Der arme Mensch würde also einfach auseinandergerissen, weil seine Füsse eine viel stärkere Anziehungskraft erfahren würden als sein Kopf...

(d) Für die Bahngeschwindigkeit auf dem Äquator des Neutronensterns folgt:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = \frac{2\pi \cdot 14.5\,\mathrm{km}}{0.033\,\mathrm{s}} = 2761\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{2800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit der Lichtgeschwindigkeit:

$$\frac{v}{c} = \frac{2\,761\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 0.009\,203 \simeq \underline{\underline{0.009}} \approx 1\,\%$$

Der Äquator des Neutronensterns ist also etwa mit $1\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs!

11. *Wahrheit oder Märchen?*

(a) Das Gefühl der Schwere entsteht aufgrund der **Normalkraft**. Dafür ergibt sich in den beiden Situationen:

A: $F_{\mathrm{N,A}} = F_{\mathrm{G,Erde}} + F_{\mathrm{G,Mond,A}}$ B: $F_{\mathrm{N,B}} = F_{\mathrm{G,Erde}} - F_{\mathrm{G,Mond,B}}$

(b) Am einfachsten bestimmt man zunächst die Mond-Gravitationskräfte: (2.5 Punkte)

$$F_{\mathrm{G,Mond,A}} = G \cdot \frac{m \cdot M_{\mathrm{Mond}}}{(r + R_{\mathrm{Erde}})^2} = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{67\,\mathrm{kg} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(380\,000\,000\,\mathrm{m} + 6\,370\,000\,\mathrm{m})^2} = 0.002\,20\,\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{G,Mond,B}} = G \cdot \frac{m \cdot M_{\mathrm{Mond}}}{(r - R_{\mathrm{Erde}})^2} = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{67\,\mathrm{kg} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(380\,000\,000\,\mathrm{m} - 6\,370\,000\,\mathrm{m})^2} = 0.002\,35\,\mathrm{N}$$

Damit ergibt sich für den "gefühlten" Schwereunterschied: (1.5 Punkte)

$$\begin{aligned}\Delta F_{\mathrm{N}} &= F_{\mathrm{N,A}} - F_{\mathrm{N,B}} = F_{\mathrm{G,Erde}} + F_{\mathrm{G,Mond,A}} - (F_{\mathrm{G,Erde}} - F_{\mathrm{G,Mond,B}}) \\ &= F_{\mathrm{G,Mond,A}} + F_{\mathrm{G,Mond,B}} = 0.002\,20\,\mathrm{N} + 0.002\,35\,\mathrm{N} = 0.004\,55\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{0.0046\,\mathrm{N}}} = \underline{\underline{4.6\,\mathrm{mN}}}\end{aligned}$$

(c) Dieser Kraftunterschied entspricht an der Erdoberfläche einem "gespürten" Massenunterschied von:

$$\Delta m = \frac{\Delta F_{\mathrm{N}}}{g} = \frac{0.004\,55\,\mathrm{N}}{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} \simeq 0.000\,46\,\mathrm{kg} = 0.46\,\mathrm{g} \approx 0.5\,\mathrm{g}$$

Martin müsste also dermassen sensitiv sein, dass er einen Gewichtsunterschied von einem halben Gramm wahrnimmt. Das ist enorm unrealistisch. Kein Mensch wird einen derart geringen Gewichtsunterschied bemerken können. In diesem Sinn hat Nicole recht.

Allerdings ist auch ihre Aussage nicht ganz richtig. Die Gravitation des Mondes hat sehr wohl Auswirkungen an der Erdoberfläche. Die **Gezeiten** (Ebbe und Flut) sind z.B. ein Resultat davon.

12. *Briefpost auf Utopia VII*

(a) Für den Bahnradius der Enterprise-Umlaufbahn erhalten wir:

$$r = R_{\mathrm{U}} + h = 1640\,\mathrm{km} + 715\,\mathrm{km} = 2355\,\mathrm{km} = 2\,355\,000\,\mathrm{m}$$

Die Umlaufzeit beträgt:

$$T = 2\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min} = 145\,\mathrm{min} = 87\underline{0}0\,\mathrm{s}$$

Anmerkung: Das sind drei signifikante Ziffern, denn die kleinste Einheit bei der ursprünglichen Angabe waren Minuten, weshalb man für die Zahl der signifikanten Ziffern die 145 betrachten muss.

Mittels "Himmelsgleichung" können wir aus Bahnradius und Umlaufzeit auf die Masse von Utopia VII schliessen (Enterprise mit Masse m kreist um Zentralkörper Utopia VII mit Masse M):

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{Z} &= F_\mathrm{G} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow \quad \frac{m\cdot v^2}{r} &= G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} && |\cdot\frac{r}{m}\\
\Leftrightarrow \quad v^2 &= \frac{G\cdot M}{r} && |\,v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\\
\Rightarrow \quad \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} &= \frac{G\cdot M}{r} && |\cdot\frac{r}{G}\\
\Leftrightarrow \quad M &= \frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
&= \frac{4\pi^2\cdot(2\,355\,000\,\mathrm{m})^3}{6.674\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot(8700\,\mathrm{s})^2} = 1.021\cdot10^{23}\,\mathrm{kg} \simeq \underline{\underline{1.02\cdot10^{23}\,\mathrm{kg}}}
\end{aligned}$$

Utopia VII ist demzufolge deutlich leichter als die Erde, aber der Planet ist ja auch ziemlich viel kleiner.

(b) Auch für den Stein (Masse m) gilt die "Himmelsgleichung". Wir lösen sie nach Einsetzen von $v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$ nach der Umlaufszeit T auf (vgl. Aufgaben 6 und 8.(c)):

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{Z} &= F_\mathrm{G} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow \quad \frac{m\cdot v^2}{r} &= G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} && |\,\text{etc.}\\
&\text{usw.}\\
\Rightarrow \quad T &= \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot M}} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
&= \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(1\,640\,000\,\mathrm{m})^3}{6.674\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot1.021\cdot10^{23}\,\mathrm{kg}}} = 5055\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Der Stein macht nur eine halbe Umrundung und somit beträgt seine Reisedauer vom Nord- zum Südpol:

$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\cdot5055\,\mathrm{s}=2528\,\mathrm{s}=42.13\,\mathrm{min}\simeq\underline{\underline{42.1\,\mathrm{min}}}$$

(c) Für das Volumen des Planeten gilt:

$$V=\frac{4\pi\cdot R^3}{3}$$

Damit schreibt man für die Planetenmasse M neu:

$$M=\varrho\cdot V=\frac{4\pi\cdot\varrho\cdot R^3}{3}$$

Diesen Ausdruck für M kann man an passender Stelle in die Rechnung unter (b) einsetzen:

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot M}}=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot\frac{4\pi\cdot\varrho\cdot R^3}{3}}}=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G}\cdot\frac{3}{4\pi\cdot\varrho\cdot R^3}}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$$

Immer noch entspricht die Reisezeit des Steins nur einer halben Umlaufszeit, womit folgt:

$$t=\frac{1}{2}T=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}}}$$