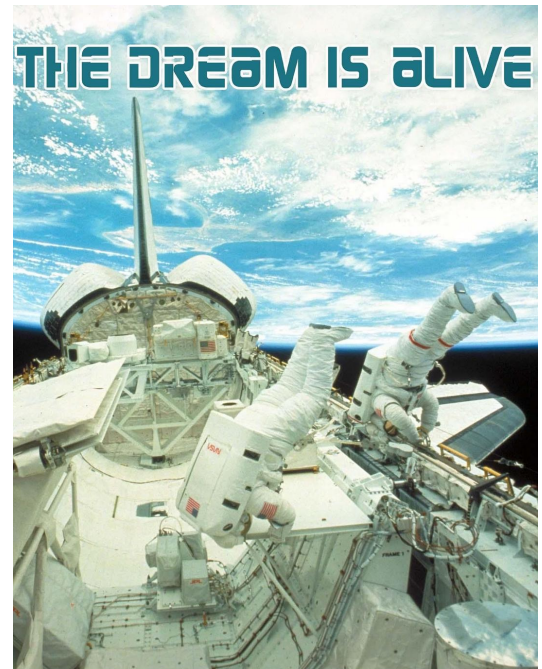


Übungen zur Mechanik

Serie 7: Gravitationsgesetz, Umlaufbahnen und Ortsfaktoren

1. Erdumrundung im Space Shuttle

Im Imax-Film *The Dream is Alive* zum Amerikanischen Space Shuttle Programm wird gesagt: "Die Maschinen stehen jetzt still. Der Orbiter umrundet die Erde auf 450 km Höhe – einmal alle 90 Minuten."



- (a) **Welche Bahngeschwindigkeit hat der Orbiter folglich auf seiner Umlaufbahn?**

Hinweis: Erdradius $R_E = 6370$ km.

- (b) Passt die eben berechnete Geschwindigkeit zur angegebenen Flughöhe? Schliesslich muss dort oben die Gravitation immer noch genügend stark sein, um die notwendige Zentripetalkraft zu erzeugen. . .

Berechne also die Bahngeschwindigkeit ein zweites Mal, diesmal unter Verwendung der Himmelsgleichung $F_Z = F_G$. Vergleiche anschliessend mit dem Resultat aus (a).

Hinweis: Im Weltraum wirkt nur die Gravitation F_G der Erde auf den Orbiter. Sie ist folglich identisch mit der resultierenden Kraft resp. der Zentripetalkraft F_Z , die der Orbiter erfährt. Die Gravitation hält den Orbiter auf seiner Umlaufbahn:

$$F_Z = F_G$$

In diese **Himmelsgleichung**, wie wir sie nennen wollen, setzen wir links jeweils die Formel für die Zentripetalkraft und rechts das Gravitationsgesetz ein:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Dabei bezeichnet M die Masse des viel massigeren **Zentralkörpers**, um den der kleine Körper mit Masse m kreist. Dieses m kürzt sich jeweils direkt aus der Gleichung raus. . .

- (c) Überlege dir ausgehend von der berechneten Geschwindigkeit:

- **Weshalb umkreisen wohl die meisten Satelliten die Erde in Richtung Osten?**
- **Weshalb liegen Raumhäfen – also Abschussrampen für Raketen – in Äquatornähe?**

Tipp: Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper am Äquator aufgrund der Erdrotation die Erdachse umrundet?

2. Berechnung der Sonnenmasse

Die Erde umkreist die Sonne in einem Jahr einmal. Ihre Bahngeschwindigkeit beträgt dabei etwa $29.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ (vgl. Serie 4, Aufg. 2.(b)). Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt $1.496 \cdot 10^{11}$ m.

- (a) **Bestimme aus diesen Angaben die Masse der Sonne.**

Gib deine Antwort in Kilogramm unter Verwendung einer Zehnerpotenz.

- (b) Vergleiche das Resultat aus (a) mit der **Erdmasse** $M_{\text{Erde}} \approx 5.97 \cdot 10^{24}$ kg.

Berechne den Faktor, um den die Sonnenmasse grösser ist als die Erdmasse.

3. Der Ortsfaktor auf der Oberfläche des Planeten Mars

Der Mars ist mit einem Durchmesser von $D_{\text{Mars}} = 6800 \text{ km}$ deutlich kleiner als die Erde. Deshalb ist auch seine Masse geringer. Sie beträgt "lediglich" $M_{\text{Mars}} = 6.4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.

Bestimme den Ortsfaktor auf der Oberfläche des Planeten und vergleiche ihn mit demjenigen an der Erdoberfläche.

4. Der Mond – alles über unseren Trabanten

Mittlerer Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt:	$r = 380\,000 \text{ km}$
Masse des Mondes:	$M_{\text{Mond}} = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Mittlerer Radius des Mondes:	$R_{\text{Mond}} = 1740 \text{ km}$
Umlaufzeit des Mondes um die Erde:	$T = 27.3 \text{ Tage}$

- Um welchen Faktor ist die Erde schwerer als der Mond?** ($M_{\text{Erde}} = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.)
- Welche Bahngeschwindigkeit (in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$) weist der Mond auf seinem Weg um die Erde auf?**
- Wie gross ist die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond?**
Notiere das Resultat in Newton mit einer Zehnerpotenz.
- Welcher Ortsfaktor herrscht auf der Mondoberfläche?**
Vergleiche dein Resultat mit dem Ortsfaktor auf der Erdoberfläche.

5. Newtons Gedankenexperiment

Die Skizze rechts stammt aus Isaac Newtons Hauptwerk **Philosophiae naturalis principia mathematica** – kurz: die **Principia**. (Die ursprüngliche Ausgabe erschien 1687, die Zeichnung ist einer bearbeiteten Fassung von 1728 entnommen).

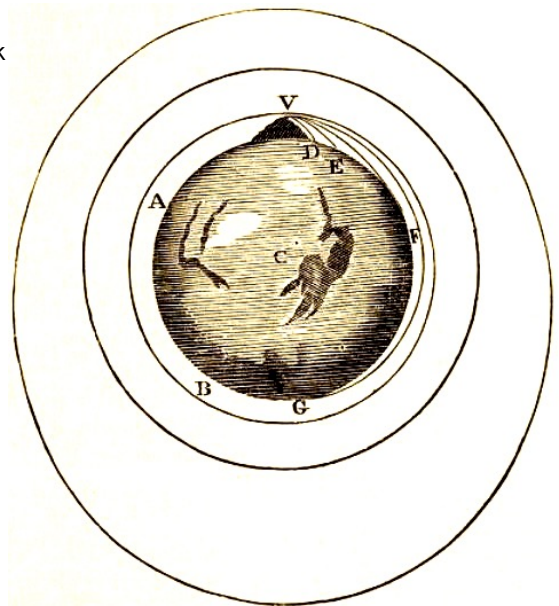
Würde man auf einem hohen Berg stehen und Steine mit immer grösserer Geschwindigkeit horizontal wegwerfen, so würden diese immer weiter fliegen. Theoretisch könnte man einen Stein so schnell werfen, dass er gar nicht mehr auf den Boden fällt, weil die Erdoberfläche sich quasi vorher von der Flugbahn weg krümmt. Dazu dürfte allerdings keine Luft vorhanden sein, denn diese würde den Stein enorm abbremsen.

Diese Überlegung funktioniert tatsächlich, wegen der Luft einfach nicht an der Erdoberfläche. Aber der Mond, jeder um die Erde fliegende Satellit und natürlich auch Raumstationen oder das Space Shuttle umrunden die Erde auf solchen **Umlaufbahnen**. Nur die Gewichtskraft wirkt jeweils auf das Objekt und zwingt es auf die Umlaufbahn! Einmal mit der richtigen Geschwindigkeit auf der zugehörigen Bahn, läuft die Bewegung von alleine ab. Der Körper fällt auf seiner Kreisbahn ständig "am Zentralkörper vorbei".

Nehmen wir einmal an, es gäbe keine Erdatmosphäre, also keine Luft an der Erdoberfläche.

Wie schnell müsste man dann den Stein vom Berggipfel aus werfen, damit er nicht mehr zu Boden fällt, sondern die Erde umkreist? Und wie lange würde ein Umlauf dauern?

Hinweise: Erdradius: $R_{\text{Erde}} = 6370 \text{ km}$, Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.



6. GPS – Global Positioning System

Ich zitiere kurz Wikipedia: *Global Positioning System (GPS), offiziell NAVSTAR GPS, ist ein globales Navigationssatellitensystem zur Positionsbestimmung und Zeitmessung. Es wurde seit den 1970er-Jahren vom US-Verteidigungsministerium entwickelt.*

D.h., die Erde wird von einer Vielzahl GPS-Satelliten umkreist. Die zeitliche Messung des Funkkontaktes zu mehrerer dieser Satelliten erlaubt eine sehr genaue Ortsbestimmung des Sende- und Empfangsgerätes auf der Erdoberfläche. Das ist übrigens Physik auf höchstem Niveau!

Die GPS-Satelliten kreisen auf Umlaufbahnen mit Bahnradien von etwa $r = 26\,600$ km.

Gib die Umlaufzeit eines GPS-Satelliten in einer passenden Zeiteinheit an.

Hinweis: $M_{\text{Erde}} = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg.

7. Die Vorbereitung der Formelsammlung

Aktuell verwenden wir lediglich eine Handvoll Gleichungen:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \quad \text{Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)}$$

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \text{Zentripetalkraft = resultierende Kraft bei einer gfK}$$

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{Newton'sches Gravitationsgesetz}$$

$$F_G = m \cdot g \quad \text{Gewichtskraft bei vorgegebenem Ortsfaktor}$$

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2} \quad \text{Ortsfaktor an der Oberfläche eines Himmelskörpers}$$

Es ist wichtig, dass dir diese Gleichungen etwas sagen. Notiere dir deshalb zu jeder einzelnen, wofür die jeweiligen Grössen stehen und mache dir klar, für welche Situation sie gebraucht wird.

8. Erde vs. Jupiter

Jupiter ist der fünfte Planet im Sonnensystem.

Hier ein paar planetarische Daten:

Mittlerer Abstand Sonne–Jupiter:

$$r = 7.42 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

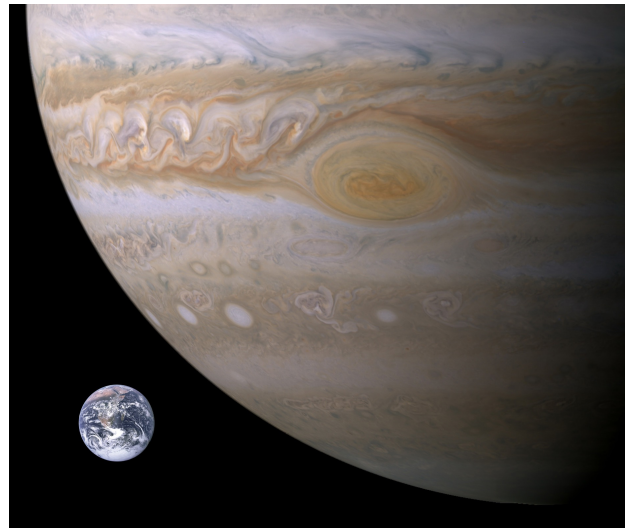
Mittlerer Planetenradius des Jupiter:

$$R_J = 69\,500 \text{ km}$$

Masse des Planeten Jupiter:

$$M_J = 1.90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

- (a) **Bestimme den Ortsfaktor an der Jupiteroberfläche und vergleiche ihn mit demjenigen an der Erdoberfläche.**



- (b) Der Jupiter umrundet die Sonne auf einer einigermassen kreisförmigen Umlaufbahn. **Wie lange dauert ein Jupiterjahr, also ein Umlauf des Jupiters um die Sonne?** Gib das Resultat in Erdenjahren an (Sonnenmasse $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg).
- (c) **Kallisto** ist der zweitgrösste Jupitermond. Er umkreist Jupiter mit einer Umlaufzeit von 16.69 d. **Wie gross sind der Bahnradius und die Bahngeschwindigkeit von Kallisto, wenn wir von einer kreisförmigen Umlaufbahn um Jupiter ausgehen?**

9. Meteosat – ein geostationärer Satellit (Zwischenprüfungsaufgabe)

EUMETSAT (= European Organisation for the Exploitation of Meteorological Satellites) ist die europäische Organisation, welche sich um den Betrieb von Wettersatelliten kümmert und den Wetterdiensten die Daten zur Verfügung stellt. Auf der Website von EUMETSAT findet sich die folgende Beschreibung über das aktuelle Wettersatellitensystem **Meteosat (Second Generation)**:

Meteosat Second Generation (MSG) is a significantly enhanced follow-on system to the previous generation of Meteosat. MSG consists of a series of four geostationary meteorological satellites, along with ground-based infrastructure, that will operate consecutively until 2018. The first MSG satellite to be launched was Meteosat-8, in 2002. The second followed up in December 2005.

Von Meteosat-8 und Meteosat-9 beziehen unsere Wetterdienste die Bilder, die wir täglich in den Medien zu sehen bekommen. Diese Satelliten können ständig Bilder von Europa liefern, weil sie in **geostationären** Umlaufbahnen parkiert sind, also stets über derselben Stelle auf der Erdoberfläche stehen.

- (a) Überlege dir zuerst ganz genau, was **geostationär** bedeutet.

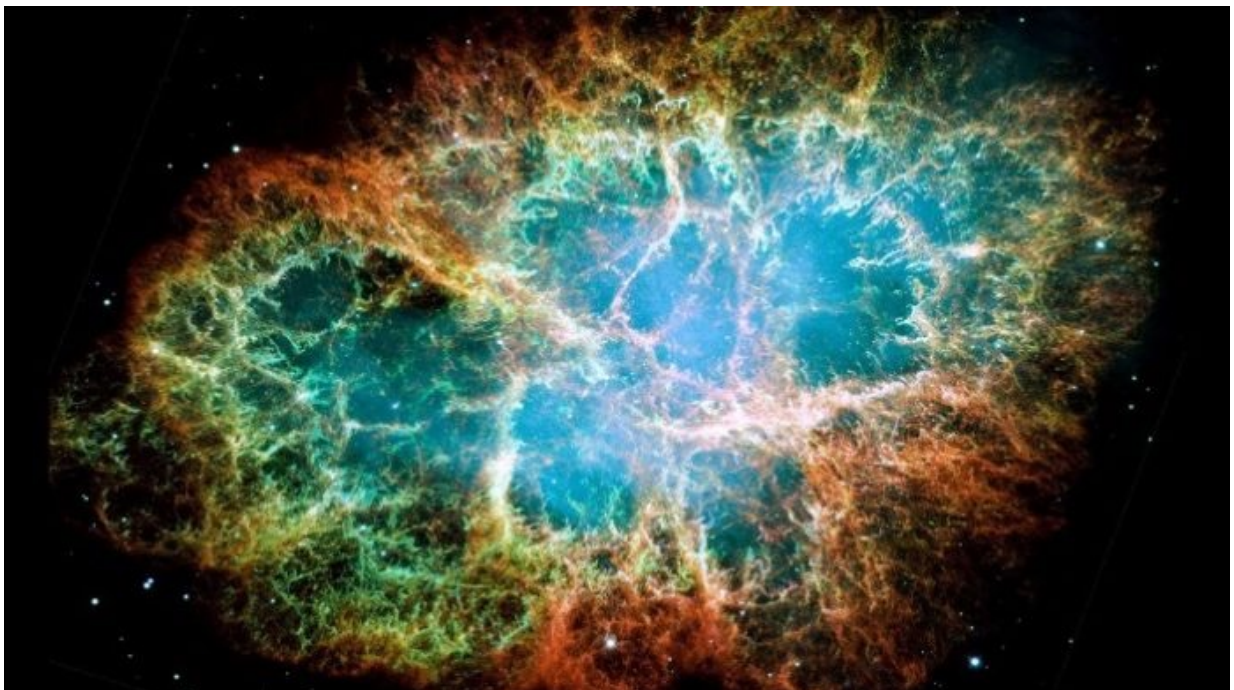
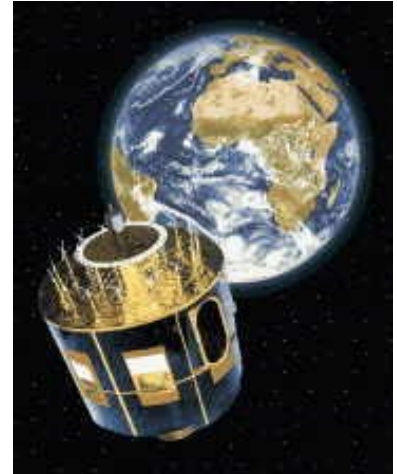
Über welchen Stellen auf der Erdoberfläche können geostationäre Satelliten überhaupt stehen?

- (b) **Bestimme nun den Bahnradius, mit dem ein geostationärer Satellit um die Erde kreist.**

Vergleiche das Resultat mit dem Erdradius.

Ist die Umlaufbahn von Meteosat "weit oben"?

Hinweis: Die Erdmasse kennen wir aus früheren Aufgaben, ebenso den Erdradius. Die Umlaufzeit des Satelliten folgt aus der Bedingung "geostationär".



10. Der Neutronenstern – ein absolut verrücktes Objekt

Im Universum gibt es diverse Arten stellarer Objekte: rote Zwergsterne wie die Sonne, rote Riesen, weisse Zwerge, schwarze Löcher – und eben auch sogenannte **Neutronensterne**. Das sind relativ kleine, kugelförmige Objekte mit einem Radius von lediglich ein paar Kilometern. Gleichzeitig ist aber die Masse eines solchen Neutronensterns und somit auch seine Dichte gigantisch. So besitzt ein Teelöffel voll Neutronensternmaterie ähnlich viel Masse wie das ganze Matterhorn!

Beispiel: Der Neutronenstern im Zentrum des **Krebsnebels** hat einen Durchmesser von etwa 29 km und eine Masse von etwa $3.5 \cdot 10^{30}$ kg. Er ist so klein, dass man ihn im Bild unten auf Seite 4 nicht mehr sieht. Allerdings sendet er die Strahlung aus, die den Nebel derart faszinierend zum leuchten bringt.

- (a) **Welcher Ortsfaktor herrscht 1000.0 m über der Neutronensternoberfläche?**
- (b) **Und wie gross ist der Ortsfaktor auf einer Höhe von 1001.0 m über der Oberfläche?**
- (c) Betrachte die noch ungerundeten Resultate aus (a) und (b).

Wie gross ist der Unterschied dieser Ortsfaktoren und was würde dies wohl für einen Menschen bedeuten, der (zunächst in einem Raumanzug) einen Kilometer über die Oberfläche des Neutronensterns gebeamt würde?

- (d) Das besonders Verrückte am Neutronenstern ist, dass er mit einer irren Geschwindigkeit rotiert. Im Falle des Krebsnebel-Neutronensterns beträgt eine Umdrehung nur gerade 33 ms (Millisekunden!). Dass der Neutronenstern bei dieser Drehgeschwindigkeit nicht auseinanderbricht, verdankt er mitunter eben seiner gewaltigen Gravitation, die ihn zusammenhält.

Wie gross ist denn die Geschwindigkeit der Oberfläche am Äquator des Neutronensterns (verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$) und welche Zentripetalbeschleunigung muss ein Oberflächenstückchen dort demnach erfahren?

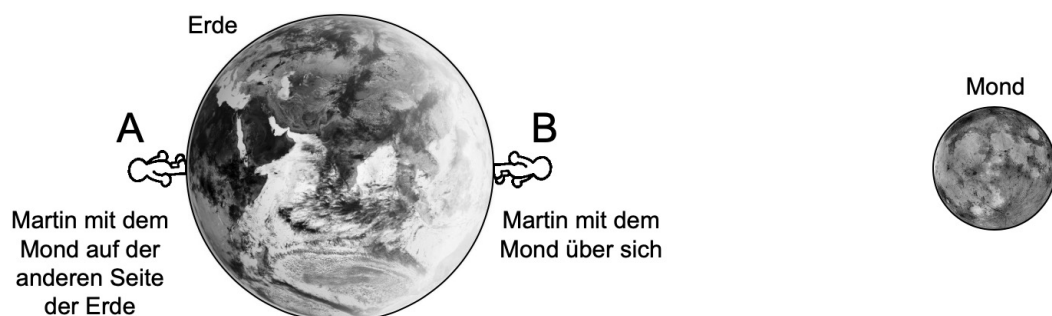
11. Wahrheit oder Märchen?

Gravitation wirkt zwischen allen Körpern, egal wie weit sie voneinander entfernt sind. Laut dem Gravitationsgesetz hat diese Kraft eine unendliche Reichweite. . .

Martin behauptet: "Ich spüre wegen der Gravitation, ob der Mond gerade über mir steht oder auf der anderen Seite der Erde ist. Einmal fühle ich mich leichter, einmal schwerer."

Nicole bestreitet dies: "Das bildest du dir nur ein. Der Mond ist einfach zu weit weg, als dass wir hier auf der Erde irgendwelche gravitativen Auswirkungen seiner Masse bemerken könnten."

Eine klassische Gesprächssituation: Behauptung gegen Behauptung. Hier die nicht massstäblich gezeichnete Situation:



- (a) Auf Martin wirken bei A und bei B je drei Kräfte: die Gravitation mit der Erde, die Gravitation mit dem Mond und die Normalkraft des Bodens.

Welche Kraft steht für Martins "gefühlte Schwere" und wie hängt sie bei A und bei B von den anderen beiden Kräften ab?

Hinweis: Vernachlässige sowohl die Erdrotation, als auch die Bewegung des Mondes um die Erde. D.h., betrachte die Situation als ruhend.

- (b) Martin besitzt eine Masse von 67 kg.

Berechne seinen "gefühlten" Schwereunterschied zwischen den Orten A und B.

Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt:	$r = 380\,000\text{ km}$
Mittlerer Radius der Erde:	$R_{\text{Erde}} = 6370\text{ km}$
Masse des Mondes:	$M_{\text{Mond}} = 7.35 \cdot 10^{22}\text{ kg}$

- (c) **Mit dem Resultat von (b) kannst du fundiert in Martins und Nicoles Diskussion einsteigen. Wer hat recht?**

Verfasse einen abwägenden Kommentar. Gehe sowohl auf Martins Behauptung, wie auch auf Nicoles Entgegnung ein!

12. Herausfordernd: Briefpost auf Utopia VII

In den Tiefen des Weltraums besucht das **Raumschiff Enterprise** den neu entdeckten Planeten **Utopia VII**. Dieser relativ kleine Planet weist einen Radius von $R = 1640\text{ km}$ auf. Seine Oberfläche ist glatt (keine Hügel oder Gebirge) und er besitzt keine Atmosphäre.

- (a) Mit abgeschaltetem Antrieb umkreist die Enterprise Utopia VII auf einer Höhe von 715 km über der Planetenoberfläche. Ein Umlauf dauert 2 h 25 min.

Bestimme aus diesen Angaben die Masse von Utopia VII.

- (b) Zwei Aussenteams landen auf Utopia VII, Team "Kirk" am Nordpol und Team "Spock" am Südpol.

Da die Kommunikation ausgefallen ist, kommt Team "Kirk" auf die Idee eine Mitteilung in Form eines Steins ans Team "Spock" zu senden.

Der Stein würde praktisch unmittelbar über der Planetenoberfläche dahinsausen.

Nach welcher Reisedauer würde der Stein den Südpol erreichen?

Gib die Antwort in einer passenden Zeiteinheit.

- (c) Tatsächlich hängt die unter (b) berechnete Reisedauer t des Steins gar nicht von der Größe des Planeten ab. D.h., die Planetenmasse M und der Planetenradius R sind nur scheinbar relevant. Bei genauerer Analyse stellt sich heraus, dass einzig die **Dichte** ρ des Planeten diese Reisezeit bestimmt (sofern man davon ausgehen darf, dass der Planet überall etwa gleich dicht ist).

Zeige, dass für die Reisedauer t des Steins vom Nord- bis zum Südpol der folgende formale Zusammenhang mit der Planetendichte ρ gilt:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Hinweis 1: Dichte $\rho :=$ Masse m pro Volumen V , also $\rho = \frac{m}{V}$.

Hinweis 2: Das Volumen einer Kugel mit Radius r beträgt: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$

