Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 9

1. *Der Fall des Gummiballs*

   (a) Für die potentielle Energie zu Beginn (Zustand 1) erhält man:

   $$E_{\text{total},1} = E_{\text{pot},1} = m \cdot g \cdot h_1 = 0.430\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 2.50\,\text{m} = 10.546\,\text{J} = \underline{\underline{10.5\,\text{J}}}$$

   (b) Für die totale mechanische Energie ergibt sich auf $1.70\,\text{m}$ Höhe (Zustand 2):

   $$\begin{aligned} E_{\text{total},2} &= E_{\text{pot},2} + E_{\text{kin},2} = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{m \cdot v_2^2}{2} \\ &= 0.430\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1.70\,\text{m} + \frac{0.430\,\text{kg} \cdot \left(3.96\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 10.543\,\text{J} = \underline{\underline{10.5\,\text{J}}} \end{aligned}$$

   (c) In diesem 3. Zustand erhalten wir schliesslich für die Gesamtenergie:

   $$E_{\text{total},3} = E_{\text{kin},3} = \frac{m \cdot v_2^3}{2} = \frac{0.430\,\text{kg} \cdot \left(7.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 10.535\,\text{J} = \underline{\underline{10.5\,\text{J}}}$$

   (d) Wir haben in den drei Zuständen jeweils dieselbe mechanische Gesamtenergie E_{total} erhalten. Mit anderen Worten: die Energie bleibt insgesamt erhalten. Während dem Fallen wandelt sie sich einfach von potentielle in kinetische Energie um.

2. *Der Medizinball im Unterricht*

   (a) Beim Abwurf wird der Ball durch die Hand beschleunigt, d.h., sie verrichtet Beschleunigungsarbeit an ihm, führt ihm also kinetische Energie zu. Diese kinetische Energie wird beim Aufstieg nach und nach in potentielle Energie umgewandelt. Der Ball wird langsamer, gewinnt dafür aber an Höhe. Der Ball "verwendet" seine kinetische Energie dazu, Hubarbeit an sich selbst zu verrichten.

   Fällt der Ball wieder, so findet die Umwandlung in die umgekehrte Richtung statt. Die potentielle Energie geht wieder in kinetische Energie über.

   Da der Ball bei diesen eher kleinen Geschwindigkeiten nur einen geringen Luftwiderstand erfährt, sind seine Energieverluste klein. Vernachlässigbar wenig kinetische Energie wird in innere Energie übergeführt. Und somit dürfen wir bei den folgenden Berechnungen von der Erhaltung der Energie ausgehen.

   (b) Wir setzen die Gesamtenergien unmittelbar nach dem Abwurf (Zustand 1) und am höchsten Punkt (Zustand 2) gleich. Mit dem Nullniveau auf der Höhe des Bodens folgt:

   $$\begin{aligned} & & E_{\text{total},1} &= E_{\text{total},2} && \big|\ \text{Energien erkennen} \\ &\Rightarrow & E_{\text{pot},1} + E_{\text{kin},1} &= E_{\text{pot},2} && \big|\ \text{Formeln einsetzen} \\ &\Rightarrow & m \cdot g \cdot h_1 + \frac{m \cdot v_1^2}{2} &= m \cdot g \cdot h_2 && \big|\ \cdot \frac{2}{m} \\ &\Leftrightarrow & 2 \cdot g \cdot h_1 + v_1^2 &= 2 \cdot g \cdot h_2 && \big|\ -2 \cdot g \cdot h_1 \\ &\Leftrightarrow & v_1^2 &= 2 \cdot g \cdot (h_2 - h_1) && \big|\ \sqrt{\cdots} \\ &\Rightarrow & v_1 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)} && \big|\ \text{Werte einsetzen} \\ & & &= \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (2.38\,\text{m} - 1.45\,\text{m})} = 4.272\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{4.27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}} && \end{aligned}$$

Man kann bei dieser Rechnung übrigens ein wenig geschickter vorgehen, indem man das Nullniveau auf Abwurfhöhe setzt. Dadurch entfällt der Term für die potentielle Energie in Zustand 1 ($h_1 = 0$). Die Höhe des toten Punktes muss dann aber von Anfang an auf $h_2 = 2.38\,\mathrm{m} - 1.45\,\mathrm{m} = 0.93\,\mathrm{m}$ gesetzt werden. Für die Energieerhaltungsrechnung folgt so:

$$
\begin{aligned}
& & E_{\text{total},1} &= E_{\text{total},2} & &|\,\text{Energien erkennen}\\
&\Rightarrow & E_{\text{kin},1} &= E_{\text{pot},2} & &|\,\text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v_1^2}{2} &= m\cdot g\cdot h_2 & &|\cdot\frac{2}{m}\\
&\Leftrightarrow & v_1^2 &= 2\cdot g\cdot h_2 & &|\sqrt{\ldots}\\
&\Rightarrow & v_1 &= \sqrt{2\cdot g\cdot h_2} & &|\,\text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 0.93\,\mathrm{m}} = 4.272\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{4.27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
\end{aligned}
$$

Halten wir fest: Die Abschussgeschwindigkeit, die in Zustand 1 vorhanden sein muss um den toten Punkt (Zustand 2) zu erreichen, hängt nur vom Höhenunterschied $\Delta h = h_2 - h_1$ zwischen Abschusshöhe und totem Punkt ab. Die absoluten Höhenwerte h_1 und h_2 sind irrelevant. Darin widerspiegelt sich unsere Wahlfreiheit für das Nullniveau von E_{pot}!

(c) Zustand 3 ist der Moment, in welchem der Ball eine Höhe von $2.00\,\mathrm{m}$ über dem Boden durchquert. Wie wir unter (a) bemerken konnten, ist es für das Rechnen geschickt die tiefste in einem Problem vorkommende Höhenlage als Nullniveau der potentiellen festzulegen. Hier legen wir also das Nullniveau auf $2.00\,\mathrm{m}$ über Boden und setzen diesen Zustand 3 mit dem toten Punkt (Zustand 2) in Beziehung. Dessen Höhe beträgt neu $h_2 = 0.38\,\mathrm{m}$ und es folgt:

$$
\begin{aligned}
& & E_{\text{total},3} &= E_{\text{total},2} & &|\,\text{Energien erkennen}\\
&\Rightarrow & E_{\text{kin},3} &= E_{\text{pot},2} & &|\,\text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v_3^2}{2} &= m\cdot g\cdot h_2 & &|\cdot\frac{2}{m}\\
&\Leftrightarrow & v_3^2 &= 2\cdot g\cdot h_2 & &|\sqrt{\ldots}\\
&\Rightarrow & v_3 &= \sqrt{2\cdot g\cdot h_2} & &|\,\text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 0.38\,\mathrm{m}} = 2.730\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{2.73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
\end{aligned}
$$

(d) Rekapitulation (siehe auch unter (a)): Wäre der Luftwiderstand nicht vernachlässigbar klein, so wäre die Energie des Balls nicht erhalten. Zwischen Ball und Luft würde Reibung stattfinden. Der Ball würde einen Teil seiner kinetischen Energie an die Luft abgeben. Wir sagen:Der Ball könnte nicht mehr als **abgeschlossenes System** betrachtet werden.

3. *Ein Fadenpendel*

   (a) Wenn wir mit dem Energieformalismus rechnen, sollte das Nullniveau sinnvollerweise auf der tiefsten vorkommenden Lage der Kugel, also im untersten Punkt der Pendelschwingung gewählt werden. Die Startsituation sei Zustand 1, der Moment des Durchgangs durch den untersten Punkt Zustand 2. Wir setzen die Energien der beiden Zustände gleich:

$$\begin{aligned}
& & E_{\text{total},2} &= E_{\text{total},1} && \mid \text{Energien erkennen}\\
&\Rightarrow & E_{\text{kin},2} &= E_{\text{pot},1} + E_{\text{kin},1} && \mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v_2^2}{2} &= m\cdot g\cdot h_1 + \frac{m\cdot v_1^2}{2} && \mid \cdot\frac{2}{m}\\
&\Leftrightarrow & v_2^2 &= 2\cdot g\cdot h_1 + v_1^2 && \mid \sqrt{\cdots}\\
&\Rightarrow & v_2 &= \sqrt{2\cdot g\cdot h_1 + v_1^2} && \mid \text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}\cdot 0.400\,\text{m} + \left(1.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 2.9745\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2.97\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}
\end{aligned}$$

   (b) Den Moment grösster Höhe bezeichnen wir als Zustand 3. Setzen wir via Energiehaltung die Zustände 2 (h minimal, v maximal) und 3 (h maximal, $v = 0$) miteinander in Beziehung:

$$\begin{aligned}
& & E_{\text{total},3} &= E_{\text{total},2} && \mid \text{Energien erkennen}\\
&\Rightarrow & E_{\text{pot},3} &= E_{\text{kin},2} && \mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & m\cdot g\cdot h_3 &= \frac{m\cdot v_2^2}{2} && \mid\ :(m\cdot g)\\
&\Leftrightarrow & h_3 &= \frac{v_2^2}{2\cdot g} && \mid \text{Werte einsetzen}\\
& & &= \frac{\left(2.9745\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0.45095\,\text{m} = \underline{\underline{45.1\,\text{cm}}}
\end{aligned}$$

4. *Abschuss auf einem Turm*

   (a) Der Höhenunterschied zwischen dem Abwurf von der Plattform (Zustand 1) und dem toten Punkt (Zustand 2) beträgt $17\,\text{m}$. Mit dem Nullniveau auf Abwurfhöhe folgt daraus:

$$\begin{aligned}
& & E_{\text{total},1} &= E_{\text{total},2} && \mid \text{Energien erkennen}\\
&\Rightarrow & E_{\text{kin},1} &= E_{\text{pot},2} && \mid \text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & \frac{m\cdot v_1^2}{2} &= m\cdot g\cdot h_2 && \mid \cdot\frac{2}{m}\\
&\Leftrightarrow & v_1^2 &= 2\cdot g\cdot h_2 && \mid \sqrt{\cdots}\\
&\Rightarrow & v_1 &= \sqrt{2\cdot g\cdot h_2} && \mid \text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}\cdot 17\,\text{m}} = 18.26\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}
\end{aligned}$$

   (b) Nach dem Resultat von (a) ist klar, dass die gesuchte Höhenlage (Zustand 3 mit Geschwindigkeit $v_3 = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$) oberhalb der Aussichtsplattform liegt. Für das formale Rechnen ist es hier günstig, diese gesuchte Höhenlage als neues Nullniveau anzusetzen. Dann liegt der tote Punkt auf der Höhe h_2 und es folgt:

$$\begin{aligned}
E_{\text{total},2} &= E_{\text{total},3} && |\,\text{Energien erkennen}\\
\Rightarrow \quad E_{\text{pot},2} &= E_{\text{kin},3} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow \quad m\cdot g\cdot h_2 &= \frac{m\cdot v_3^2}{2} && |\,:(m\cdot g)\\
\Leftrightarrow \quad h_2 &= \frac{v_3^2}{2\cdot g} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
&= \frac{\left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 7.34\,\text{m}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Höhe liegt somit $7.34\,\text{m}$ unterhalb des toten Punktes und damit $51\,\text{m}-7.34\,\text{m} = \underline{\underline{44\,\text{m}}}$ über Boden.

Natürlich können wir stattdessen auch mit dem bisherigen Nullniveau auf Höhe der Aussichtsplattform rechnen können:

$$\begin{aligned}
E_{\text{total},3} &= E_{\text{total},1} && |\,\text{Energien erkennen}\\
\Rightarrow \quad E_{\text{pot},3}+E_{\text{kin},3} &= E_{\text{kin},1} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow \quad m\cdot g\cdot h_3 + \frac{m\cdot v_3^2}{2} &= \frac{m\cdot v_1^2}{2} && |\,:(m\cdot g)\\
\Leftrightarrow \quad h_3 + \frac{v_3^2}{2\cdot g} &= \frac{v_1^2}{2} && |\,-\frac{v_3^2}{2\cdot g}\\
\Leftrightarrow \quad h_3 &= \frac{v_1^2}{2\cdot g}-\frac{v_3^2}{2\cdot g} = \frac{v_1^2-v_3^2}{2\cdot g} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
&= \frac{\left(18.26\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2-\left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 9.65\,\text{m}
\end{aligned}$$

Auch damit kommen wir auf eine Höhe von $34\,\text{m}+9.65\,\text{m} = \underline{\underline{44\,\text{m}}}$ über Boden.

(c) Nun legen wir das Nullniveau auf den Boden. Am einfachsten setzen wir den Zustand des Steins unmittelbar vor dem Aufprall (Zustand 4) mit dem toten Punkt (Zustand 2) in Beziehung. Wie der Aufgabentext besagt, gehen nun $15\,\text{J}$ Energie verloren. Das müssen wir folgendermassen berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
E_{\text{total},4} &= E_{\text{total},2}-15\,\text{J} && |\,\text{Energien erkennen}\\
\Rightarrow \quad E_{\text{kin},4} &= E_{\text{pot},2}-15\,\text{J} && |\,\text{Formeln einsetzen}\\
\Rightarrow \quad \frac{m\cdot v_4^2}{2} &= m\cdot g\cdot h_2 - 15\,\text{J} && |\,\cdot\frac{2}{m}\\
\Leftrightarrow \quad v_4^2 &= 2\cdot g\cdot h_2 - \frac{2\cdot 15\,\text{J}}{m} && |\,\sqrt{\ldots}\\
\Rightarrow \quad v_4 &= \sqrt{2\cdot g\cdot h_2 - \frac{2\cdot 15\,\text{J}}{m}} && |\,\text{Werte einsetzen}\\
&= \sqrt{2\cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}\cdot 51\,\text{m} - \frac{2\cdot 15\,\text{J}}{0.273\,\text{kg}}} = 29.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}
\end{aligned}$$

Energieverluste lassen sich also ohne grosse Probleme in eine Rechnung einbauen, solange sie sich denn beziffern lassen.

5. *Die Leistung des Jet d'Eau in Genf*

   (a) Betrachten wir eine kleine Portion Wasser mit Masse m in zwei Momenten: Erstens beim Verlassen der Düse (Zustand 1: noch keine Höhe, dafür Geschwindigkeit v_1) und zweitens am obersten Punkt (Zustand 2: keine Geschwindigkeit, dafür Höhe h_2). Es folgt:

$$
\begin{aligned}
& E_{\text{kin},1} = E_{\text{pot},2} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{m \cdot v_1^2}{2} = m \cdot g \cdot h_2 && \mid \cdot \frac{2}{m} \\
\Leftrightarrow\quad & v_1^2 = 2 \cdot g \cdot h_2 && \mid \sqrt{\ldots} \\
\Rightarrow\quad & v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 125\,\mathrm{m}} = 49.52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{178\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}}
\end{aligned}
$$

   Wie man beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile sieht, fällt die Masse raus. Es kommt also nicht darauf an, wie gross die Portion Wasser gewählt wird.

   (b) Der Vorgang ist nicht reibungsfrei. Das Wasser ist erstens recht schnell unterwegs und verteilt sich zweitens recht stark (der Strahl bricht auf dem Weg nach oben auf). Es entsteht ein nicht zu vernachlässigender Luftwiderstand, der erfordert, dass dem Wasser zusätzliche kinetische Energie mitgegeben werden muss, damit es trotzdem $125\,\mathrm{m}$ Höhe erreichen kann.

   (c) Die Düse verrichtet ständig Beschleunigungsarbeit. Pro Sekunde werden $500\,\mathrm{Liter}$ Wasser, das sind gerade $500\,\mathrm{kg}$ von 0 auf $216\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ $(= 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$ beschleunigt:

$$
E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{5\underline{0}0\,\mathrm{kg} \cdot \left(60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 900\,000\,\mathrm{J} = 9\underline{0}0\,\mathrm{kJ}
$$

   Die sekündlich zugeführte kinetische Energie beträgt somit $900\,\mathrm{kJ}$, d.h.:

$$
P = \frac{E_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{9\underline{0}0\,\mathrm{kJ}}{1\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{9\underline{0}0\,\mathrm{kW}}}
$$

6. *Reibungsarbeit eines "Brummis"*

   Wie schon bei Aufgabe 4.(c) fügen wir den Energieverlust in die Energieerhaltungsgleichung ein. Die kinetische Energie des Lastwagens ist im Zustand 1 vor der Verlangsamung durch die Rollreibung grösser als im Zustand 2 danach. Um wie viel? Natürlich genau um die abgegebene Reibungsarbeit W_R. Damit folgt der in der Aufgabenstellung enthaltene Tipp, mit dem wir direkt weiterarbeiten können ($v_1 = 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15.278\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v_2 = 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 12.500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$
\begin{aligned}
& E_{\text{kin},1} = E_{\text{kin},2} + W_\mathrm{R} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + F_\mathrm{R} \cdot s && \mid F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g \\
\Rightarrow\quad & \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g \cdot s && \mid : m \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} + \mu_\mathrm{R} \cdot g \cdot s && \mid -\frac{v_2^2}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \mu_\mathrm{R} \cdot g \cdot s && \mid : (g \cdot s) \\
\Leftrightarrow\quad & \mu_\mathrm{R} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot s} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& \phantom{\mu_\mathrm{R}} = \frac{\left(15.278\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(12.500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 150\,\mathrm{m}} = 0.0262 = \underline{\underline{0.026}}
\end{aligned}
$$

7. *Ausschwingendes Fadenpendel*

   (a) Das Pendel ist zwar in guter Näherung, aber eben nicht vollständig reibungsfrei. Das bedeutet, das nach und nach eben doch mechanische Energie verloren geht. Namentlich die Reibung bei der Aufhängung und der Luftwiderstand der Kugel sind für diese Energieverluste verantwortlich.

   (b) Damit wir sauber mit dem prozentualen Energieverlust rechnen können, muss das Nullniveau – wie im Aufgabentext deklariert – auf Höhe der untersten Lage platziert werden. Ein Verlust von $32\,\%$ bedeutet, es bleiben noch $68\,\% = 0.68$ übrig. Damit können wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
& & E_{\text{total},2} &= 0.68 \cdot E_{\text{total},1} && \mid \text{Energien erkennen} \\
&\Rightarrow & E_{\text{pot},2} + E_{\text{kin},2} &= 0.68 \cdot E_{\text{pot},1} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
&\Rightarrow & m \cdot g \cdot h_2 + \frac{m \cdot v_2^2}{2} &= 0.68 \cdot m \cdot g \cdot h_1 && \mid \cdot \frac{2}{m} \\
&\Leftrightarrow & 2 \cdot g \cdot h_2 + v_2^2 &= 2 \cdot 0.68 \cdot g \cdot h_1 && \mid -2 \cdot g \cdot h_2 \\
&\Leftrightarrow & v_2^2 &= 2 \cdot g \cdot (0.68 \cdot h_1 - h_2) && \mid \sqrt{\ldots} \\
&\Rightarrow & v_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (0.68 \cdot h_1 - h_2)} && \mid \text{Werte einsetzen} \\
& & &= \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (0.68 \cdot 1.00\,\text{m} - 0.500\,\text{m})} = 1.879\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{1.9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}
\end{aligned}
$$

   (c) Es kommt ein zweiter Faktor 0.68 vor die Gesamtenergie und es folgt:

$$
\begin{aligned}
& & E_{\text{total},3} &= 0.68 \cdot E_{\text{total},2} = 0.68 \cdot 0.68 \cdot E_{\text{total},1} && \mid \text{Energien erkennen} \\
&\Rightarrow & E_{\text{pot},3} &= 0.68^2 \cdot E_{\text{pot},1} && \mid \text{Formeln einsetzen} \\
&\Rightarrow & m \cdot g \cdot h_3 &= 0.68^2 \cdot m \cdot g \cdot h_1 && \mid :(m \cdot g) \\
&\Leftrightarrow & h_3 &= 0.68^2 \cdot h_1 && \mid \text{Wert einsetzen} \\
& & &= 0.68^2 \cdot 1.00\,\text{m} && = 0.462\,\text{m} = \underline{\underline{46\,\text{cm}}}
\end{aligned}
$$

8. *Einen Gummiball fallen lassen*

   (a) Zu Beginn, also vor dem fallen gelassen Werden, besitzt der Ball aufgrund seiner Starthöhe eine ganz bestimmte Menge an potentieller Energie E_{pot}. Während dem Fallen, dem Kontakt mit dem Boden und dem anschliessenden Aufsteigen, ist der Ball **kein abgeschlossenes System**. Es ist aber klar, dass keine Energie hinzukommt, sondern das der Ball durch den **Luftwiderstand**, die **Reibung mit dem Boden** und die **innere Reibung während dem Bodenkontakt** allenfalls etwas **Energie verliert**. Somit verfügt der Ball nach dem Bodenkontakt im toten Punkt oben über weniger Energie. Die potentielle Energie und die dadurch erreichte Höhe sind geringer.

   (b) Legen wir das Nullniveau auf diesen tiefsten Punkt der Bewegung, so gibt es dort keine potentielle Energie und auch die kinetische Energie ist gleich Null, denn es handelt sich um den unteren Umkehrpunkt der Bewegung. Die mechanische Energie ist in diesem Moment in der leichten Komprimierung des elastischen Gummiballs gespeichert. Es handelt sich also um **Feder**- oder eben **elastische Energie**.

9. *Bessere Autos?*

   (a) Berechnen wir die Veränderung der kinetischen Energie. Dabei müssen wir auf die richtigen Einheiten achten ($v_1 = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v_2 = 44\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 12.22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin},2} - E_{\mathrm{kin},1} &= \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} \\ &= \frac{1200\,\mathrm{kg} \cdot \left(\left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(12.22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right)}{2} = -150\,370\,\mathrm{J} = \underline{\underline{-150\,\mathrm{kJ}}} \end{aligned}$$

   Das Minuszeichen bringt zum Ausdruck, dass es sich um einen Energie**verlust** handelt. Solange du dir des Verlustes bewusst sind, darfst du einen solchen Wert auch ohne dieses Vorzeichen angeben.

   Achtung! Vielleicht hast du intuitiv zuerst versucht, den Energieverlust aus der Differenz der beiden Geschwindigkeiten zu bestimmen. Diese Vorgehensweise kann nicht funktionieren, weil in der Berechnung der kinetischen Energie die Geschwindigkeit im Quadrat auftritt. Hier die Rechnung, welche den Fehler aufzeigt:

$$20^2 - 12.22^2 = 400 - 149.4 = 250.6 \neq (20 - 12.22)^2 = 7.78^2 = 60.5$$

$$\text{und allgemein:} \qquad v_1^2 - v_2^2 \neq (v_2 - v_1)^2 = v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2$$

   Zwischen $44\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ steckt wegen diesem Geschwindigkeitsquadrat deutlich mehr kinetische Energie als zwischen $0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $44\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

   (b) Die verloren gegangene kinetische Energie ist zu innerer Energie geworden. Nebst einer geringen Erwärmung von Pneus, Strasse und umgebender Luft sind bei diesem Vorgang vor allem die Bremsen des Autos heiss geworden.

   (c) Offenbar schwierig umzusetzen, aber theoretisch denkbar, wären Schwungräder innerhalb des Autos, welche beim Abbremsen beschleunigt würden und beim nächsten Losfahren – z.B. an einer Ampel – ihre Bewegungsenergie sofort wieder an das Auto abgeben könnten.

   Bei Fahrzeugen mit Elektromotoren kann der Antrieb beim Abbremsen direkt dazu verwendet werden, um aus der kinetischen zumindest teilweise wieder elektrische Energie zu gewinnen (**Rekuperationsbremse**). Was bei Eisenbahnlokomotiven längst schon Anwendung gefunden hat, ist im Zuge der Entwicklung von Hybridautos (Autos mit sowohl Benzin, als auch Elektroantrieb) seit ein paar Jahren auch auf der Strasse zum Thema geworden.

   Leider stellen wir nach wie vor fest, dass bei Autos mit herkömmlichen Verbrennungsmotoren die gesamte kinetische Energie beim Abbremsen in innere Energie verloren geht. Es werden keine Rückgewinnungsmechanismen eingesetzt. Hier gibt es noch Entwicklungspotential!

10. *Ein Auto am Hang*

   (a) Das Auto verliert seine anfängliche (Zustand 1) potentielle gegenüber dem Nullniveau, das wir auf Höhe des Zustandes 2 nach der Beschleunigung legen wollen:

$$E_{\mathrm{pot},1} = m \cdot g \cdot h_1 = 1150\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 5.00\,\mathrm{m} = 56\,408\,\mathrm{J} = \underline{\underline{56.4\,\mathrm{kJ}}}$$

   (b) Der Zuwachs an kinetischer Energie beträgt ($v_2 = 34.7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 9.639\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$E_{\mathrm{kin},2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} = \frac{1150\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.639\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 53\,423\,\mathrm{J} = \underline{\underline{53.4\,\mathrm{kJ}}}$$

(c) Wäre das Auto ein abgeschlossenes System, so müsste die potentielle Energie im Zustand 1 vollständig zu kinetischer Energie des Zustandes 2 werden. Genau dies ist nicht der Fall. Die beiden Resultate unterscheiden sich um etwa $3\,\mathrm{kJ}$.

Der Grund für den Energieverlust ist einmal mehr die Tatsache, dass währen des Vorgangs Reibung stattfindet. Insbesondere die Rollreibung ist bedeutsam.

(d) Korrekterweise müsste bei dieser Aufgabenstellung deklariert werden, dass das Nullniveau der potentiellen Energie effektiv auf die Höhe von Zustand 2 gelegt werden soll, denn ansonsten ist nicht klar, wie viel mechanische Energie in den beiden Zuständen effektiv vorhanden ist und dann lässt sich auch kein eindeutiger prozentualer Verlust angeben.

Mit dem Nullniveau auf Höhe von Zustand 2 ergibt sich für den prozentualen Verlust:

$$\frac{56\,408\,\mathrm{J} - 53\,423\,\mathrm{J}}{56\,408\,\mathrm{J}} = \frac{2985\,\mathrm{J}}{56\,408\,\mathrm{kJ}} = 0.052\,918 = \underline{\underline{5.29\,\%}}$$

11. *Reibungsverlust beim Schlitteln*

(a) Nur die potentielle und die kinetische Energie des Schlittlers verändern sich. Der Verlust an potentieller Energie ergibt sich aus dem Höhenverlust und die Verlust von kinetischer Energie folgt aus der Abnahme der Geschwindigkeit.

Der Höhenverlust beträgt:

$$h = l \cdot \sin\alpha = 25\,\mathrm{m} \cdot \sin 3.5^\circ = 1.53\,\mathrm{m}$$

Damit lässt sich der Verlust an potentieller Energie bestimmen:

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h = 85\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 1.53\,\mathrm{m} = 1276\,\mathrm{J}$$

Für die verlorene kinetische Energie erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{kin}} = E_1 - E_2 &= \frac{m \cdot v_1^2}{2} - \frac{m \cdot v_2^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) \\ &= \frac{85\,\mathrm{kg}}{2} \cdot \left(\left(6.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(5.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right) = 635\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Insgesamt beträgt der Energieverlust somit:

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{pot}} + \Delta E_{\mathrm{kin}} = 1276\,\mathrm{J} + 635\,\mathrm{J} = 1911\,\mathrm{J} = \underline{\underline{1.9\,\mathrm{kJ}}}$$

Dieser Energieverlust entstand aufgrund der Reibung. Es handelt sich also um die verrichtete Reibungsarbeit.

(b) Mit der Reibungsarbeit aus (a) lässt sich direkt die mittlere Reibungskraft während der betrachteten Schlittelstrecke bestimmen:

$$F_{\mathrm{R}} = \frac{\Delta E}{s} = \frac{1911\,\mathrm{J}}{25\,\mathrm{m}} = 76.4\,\mathrm{N}$$

Die Reibungszahl μ ist definiert als das Verhältnis von Reibungskraft F_{R} zu Normalkraft F_{N}. Letztere müssen wir zuerst berechnen. Auf der schiefen Ebene gilt:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha = 85\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \cos 3.5^\circ = 832\,\mathrm{N}$$

Somit folgt für die Gleitreibungszahl zwischen Schlitten und Schnee:

$$\mu = \frac{F_{\mathrm{R}}}{F_{\mathrm{N}}} = \frac{76.4\,\mathrm{N}}{832\,\mathrm{N}} = 0.0918 = \underline{\underline{0.092}}$$

12. *Beau Jeu in Aktion*

    Für die Beschleunigungsarbeit erhält man ($93\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25.833\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$W_\mathrm{B} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{0.435\,\mathrm{kg} \cdot \left(25.833\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 145.15\,\mathrm{J}$$

    Daraus ergibt sich für die Beschleunigungsleistung:

$$P_\mathrm{B} = \frac{W_\mathrm{B}}{\Delta t} = \frac{145.15\,\mathrm{J}}{0.0076\,\mathrm{s}} = 19\,100\,\mathrm{W} = \underline{\underline{19\,\mathrm{kW}}}$$

13. *Eine Sylvesterrakete*

    Unter Berücksichtigung des Verlustes aufgrund des Luftwiderstandes setzen wir die Energieerhaltung für die Hülle an (Zustand 1 = toter Punkt, Zustand 2 = unmittelbar vor dem Aufprall):

$$\begin{aligned}
& & E_{\mathrm{pot},1} &= E_{\mathrm{kin},2} + W_\mathrm{Luftwiderstand} & &|\,\text{Formeln einsetzen}\\
&\Rightarrow & m \cdot g \cdot h_1 &= \frac{m \cdot v_2^2}{2} + 14\,\mathrm{J} & &|\cdot \frac{2}{m}\\
&\Leftrightarrow & 2 \cdot g \cdot h_1 &= v_2^2 + \frac{28\,\mathrm{J}}{m} & &|-\frac{28\,\mathrm{J}}{m}\\
&\Leftrightarrow & v_2^2 &= 2 \cdot g \cdot h_1 - \frac{28\,\mathrm{J}}{m} & &|\sqrt{\ldots}\\
&\Rightarrow & v_2 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1 - \frac{28\,\mathrm{J}}{m}} & &|\,\text{Werte einsetzen}\\
& & &= \sqrt{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 47\,\mathrm{m} - \frac{28\,\mathrm{J}}{0.072\,\mathrm{kg}}} = 23.09\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
\end{aligned}$$

14. *Elektrizitätskosten beim Theater*

    Für die mittlere Leistung der 18 Scheinwerfer erhalten wir:

$$P = 55\,\% \cdot 18 \cdot 850\,\mathrm{W} = 8415\,\mathrm{W}$$

    Damit ergibt sich für die während der Vorführung bezogene Energiemenge:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 8415\,\mathrm{W} \cdot 1.75\,\mathrm{h} = 14\,726\,\mathrm{Wh} = 14.726\,\mathrm{kWh}$$

    Der Preis für die Aufführung beträgt somit:

$$\text{Preis} = 14.726\,\mathrm{kWh} \cdot 20\,\frac{\mathrm{Rp.}}{\mathrm{kWh}} = 294.5\,\mathrm{Rp.} = \underline{\underline{2.95\,\mathrm{Fr.}}}$$

15. *Eine Neuüberlegung für Theorie-Fans: Die Beschleunigung eines Autos*

    Nach der Zeit t wurde am Auto die Beschleunigungsarbeit $W_\mathrm{B} = P_\mathrm{B} \cdot t = \frac{m \cdot v^2}{2}$ verrichtet. Durch Auflösen nach der Endgeschwindigkeit v erhalten wir daraus:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot P_\mathrm{B} \cdot t}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_\mathrm{B}}{m}} \cdot \sqrt{t}$$

    Die Geschwindigkeitszunahme erfolgt bei konstanter Beschleunigungsleistung des Autos also **nicht gleichmässig, sondern mit einer Wurzelabhängigkeit von der Zeit t!**