Der Ortsfaktor an der Oberfläche von Himmelskörpern

Repetition: Meine Gewichtskraft F_G hängt direkt davon ab, wie viel Masse ich besitze. Das verrät mir jede Waage. Sie misst, wie viel Normalkraft sie meiner Gewichtskraft entgegensetzen muss, damit ich in Ruhe bleibe. Je mehr Masse m mein Körper hat, desto grösser ist die Gewichtskraft F_G, mit der ich gegen die Erde gezogen werde und desto grösser die Normalkraft der Waage (und ihr angezeigter Wert):

$$\text{Proportionalität:} \qquad F_\mathrm{G} = m \cdot g \qquad \text{mit} \quad g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Der **Ortsfaktor** g ist die **Proportionalitätskonstante**, mit der sich die Gewichtskraft einer Masse berechnen lässt. Der Wert $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ gilt an der Erdoberfläche. An der Oberfläche des Mondes wäre er deutlich kleiner ($g_\mathrm{Mond} \approx 1.6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$). Der "Ortsfaktor" ist eben ein vom Ort abhängiger Wert.

Frage: Wie wird eigentlich festgelegt, wie gross dieser Ortsfaktor an verschiedenen Orten ist? Weshalb beträgt er hier an der Erdoberfläche in Zürich gerade $9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$?

Vorüberlegung – Teil 1: Meine Masse wird von der Erde angezogen. Weshalb sollte das nicht auch umgekehrt gelten? Tatsächlich können wir im Experiment überprüfen, dass sich zwei Massen gegenseitig gleich stark anziehen. Die Erde zieht nicht nur mich an, sondern ich ebenso die Erde. Wenn nun aber die Gewichtskraft proportional zu meiner Masse ist, dann doch auch zur Masse der Erde!

In der Berechnung des Ortsfaktors muss folglich die **Erdmasse** M als linearer Faktor enthalten sein.

Vorüberlegung – Teil 2: Mit dem **Gravtiationsgesetz** erklärte Newton, wie die Stärke der Anziehungskraft zwischen zwei Massen von deren Abstand abhängt – genauer: vom Abstand ihrer Schwerpunkte. Je weiter sie voneinander entfernt sind, umso schwächer ist die Anziehung. Und zwar nimmt die Anziehungskraft quadratisch mit dem Abstand r ab. D.h., wenn ich den Abstand zwischen zwei Massen verdopple, wird dadurch die Anziehungskraft geviertelt, wenn ich den Abstand verdreifache, beträgt F_G nur noch ein Neuntel des vorigen Wertes.

In der Berechnung des Ortsfaktors muss folglich der Abstand zwischen dem Erdmittelpunkt und mir, also der **Erdradius** R, als quadratischer Faktor im Nenner auftreten.

Antwort – alles zusammen: Meine Gewichtskraft an der Erdoberfläche, die wir mit dem hiesigen Ortsfaktor berechnen können ($F_\mathrm{G} = m \cdot g$), muss dem Wert entsprechen, den ich mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz für die Anziehung zwischen meiner und der Erdmasse im Abstand R erhalte:

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{G} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot g \overset{!}{=} G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Berechnung des Ortsfaktors an der Erdoberfläche: Dieses Resultat wollen wir doch gleich mit den realen Erddaten ($M = 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6370\,\mathrm{km}$) überprüfen:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6\,370\,000\,\mathrm{m})^2} \simeq 9.82\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Das stimmt ziemlich genau! Dass nicht ganz genau $9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ herauskommen, hat damit zu tun, dass in diesen $9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ auch die Erdrotation enthalten ist, was die gefühlte Schwerkraft und die reale Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche effektiv minimal verringert.

Allgemeines Resultat: Ausserhalb eines Himmelskörpers mit Masse M herrscht im Abstand r zu dessen Mittelpunkt ein Ortsfaktor von:

$$g = \frac{G \cdot M}{r^2} \qquad \text{für} \quad r \geq R$$

Daraus folgt insbesondere für den Ortsfaktor an der Oberfläche des Himmelskörpers ($r = R$):

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$