Übungen zur Wärmelehre – Lösungen Serie 2

1. *Innere Energie, Wärme und thermisches Gleichgewicht*

   (a) Wenn meine Hände den Kachelofen berühren, so ist dies ein **thermischer Kontakt**. Da der Ofen eine höhere Temperatur als meine Hände aufweist, wird von ihm **Wärme** auf meine Hände übertragen, d.h., die **innere Energie** des Ofens nimmt (leicht) ab, während dem die **innere Energie** meiner Hände zunimmt. Die **Wärme** ist der Übertrag an **innerer Energie**.

   Achtung! Es wird hier kaum zum thermischen Gleichgewicht kommen, denn normalerweise ist ein Kachelofen so heiss, dass ich meine Hände nicht allzu lange an ihm wärmen möchte. Es kann also nicht das Ziel sein, dass Ofen und Hände schlussendlich die gleiche Temperatur aufweisen.

   Auf der Teilchenebene "zittern" die Atome, aus welchen der Ofen besteht, im Mittel heftiger als die Moleküle, aus welchen sich meine Hände zusammensetzen. Bei Kontakt zwischen diesen Teilchen kommt es häufig vor, dass ein gerade heftig zitterndes "Ofenatom" ein Teilchen meiner Hand anstösst und dabei Bewegungsenergie an dieses abgibt. In die Gegenrichtung ist das seltener der Fall, da sich ja die Ofenatome im Mittel eben heftiger bewegen als die Moleküle meiner Hände. Netto wird also kinetische Energie vom Ofen an die Hände abgegeben. Dies ist die weiter oben angesprochene Wärme.

   (b) Auf den Punkt gebracht: Man muss den Körper in eine kühlere Umgebung bringen. Der Körper muss wärmer sein als seine Umgebung, dann gibt er Wärme ab und verliert somit an innerer Energie.

   (c) Das Problem liegt darin, dass bei einer Temperaturangabe nichts über die Grösse und die Energiespeicherfähigkeit eines Körpers gesagt wird.

   Ein Beispiel: $2\,\mathrm{kg}$ Wasser und $1\,\mathrm{kg}$ Kupfer seien zu Beginn im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur von $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Nun wird beiden die gleiche Wärmemenge zugeführt. Der Kupferblock hat anschliessend eine Temperatur von $130\,^{\circ}\mathrm{C}$, während das Wasser danach nur $25\,^{\circ}\mathrm{C}$ heiss ist. Gründe dafür sind die grössere Masse, aber auch die grössere Speicherfähigkeit für innere Energie beim Wasser. Man kann nach der Erwärmung also nicht behaupten, dass das Kupfer mehr innere Energie enthält, obwohl es viel heisser als das Wasser ist.

   Innere Energie ist allgemein nur sehr schwierig absolut anzugeben. Das ist aber nicht schlimm, denn es geht immer nur um Änderungen dieser Grösse, nie um den absoluten Wert.

   (d) Der Körper wird entweder wärmer (Temperaturänderung) oder er verändert seinen Aggregatzustand (Phasenübergang).

2. *Einführende Fragen zu Phasenübergängen*

   (a) Gegenüber dem flüssigen Wasser enthält die innere Energie des Wasserdampfes bei gleicher Temperatur zusätzlich die Verdampfungsenergie.

   (b) Aus der Tabelle der spezifischen Übergangswärmen im Skript folgt:

   $$Q = L_{\mathrm{v}} \cdot m \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{Q}{L_{\mathrm{v}}} = \frac{334 \cdot 10^3\,\mathrm{J}}{2265 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} \simeq \underline{\underline{0.147\,\mathrm{kg}}}$$

   (c) Soll das Kochen der Kartoffeln schnell gehen, so braucht man möglichst hohe Temperaturen. Sobald das Wasser siedet, kann allerdings seine Temperatur gar nicht mehr ansteigen. Somit muss nach Erreichen der Siedetemperatur lediglich der Energieverlust des Topfes zur Umgebung ausgeglichen werden, weil die zugeführte Energie nicht mehr für die Temperaturzunahme verwendet werden kann. Heizt man gleich stark weiter, so fördert man damit lediglich die raschere Verdampfung des Wassers, aber nicht das schnellere gar werden der Kartoffeln!

   Hinweis: Ein Dampfkochtopf ist ein abgeschlossenes Gefäss. Verdampft dort flüssiges Wasser, so trägt der dadurch entstehende Wasserdampf zur Erhöhung des Drucks im Topf bei. Dadurch wird allerdings der Siedepunkt im Phasendiagramm zu höheren Temperaturen verschoben. D.h., im Topf liegt die Temperatur deutlich über $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ und die Kartoffeln sind schneller gar – eben der Trick beim Dampfkochtopf!

3. *Erwärmung durch Umrühren*

   Pro Kilogramm und pro Grad Celsius Temperaturanstieg wird bei Wasser eine Energiezufuhr von $4182\,\mathrm{J}$ benötigt. Für die beschriebene Erwärmung braucht es somit die folgende Energiemenge:

   $$\Delta E = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.5\,\mathrm{kg} \cdot 34\,^\circ\mathrm{C} = 71\,094\,\mathrm{J}$$

   Dies können wir in eine Anzahl Umdrehungen umrechnen:

   $$\text{Anzahl Umdrehungen} = \frac{71\,094\,\mathrm{J}}{0.75\,\mathrm{J}} = 94\,792$$

   Jede Umdrehung beansprucht eine Viertelsekunde Zeit. Also ergibt sich insgesamt eine Zeit von:

   $$\Delta t = 94\,792 \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{s} = 23\,698\,\mathrm{s} \approx \underline{\underline{6.5\,\mathrm{h}}}$$

   Leider würde diese Erwärmung in der Realität kaum funktionieren, weil du erstens viel zu schnell müde würdest und weil das Wasser seine so erhaltene zusätzliche innere Energie aufgrund des Temperaturunterschieds zur Umgebung fortlaufend wieder abgeben würde.

   Tatsächlich wurde aber auf ganz ähnliche Art eine der ersten Einheiten für die Energie, nämlich die Kalorie, festgelegt – durch einen gewissen Herrn J.P. Joule. Dabei hat natürlich nicht ein Mensch, sondern eine Apparatur gerührt, die das erstens viel schneller kann, und die zweitens viel gleichmässiger rühren konnte, sodass man ganz genau angeben konnte, wie viel Energie sie aufwendet. Drittens musste das Ganze in einem gut isolierten Gefäss stattfinden, damit der Wärmeverlust nach aussen bei der Messung nicht ins Gewicht fiel.

   Die **Kalorie (cal)** ist definiert als die Energiemenge, welche benötigt wird, um $1\,\mathrm{g}$ Wasser um $1\,^\circ\mathrm{C}$ zu erwärmen. Eine Kalorie entspricht $4.182\,\mathrm{J}$.

4. *Der Schmelzofen eines Stahlwerks*

   Uns interessiert lediglich die für den Phasenübergang benötigte Energie. Dass man vorher auf $1600\,^\circ\mathrm{C}$ erwärmen musste, spielt für die Fragestellung keine Rolle.

   Zunächst kennen wir die Leistung des Ofens und die Zeit, welche er zum Schmelzen des Schrotts benötigt. Daraus kann bestimmt werden, welche Wärme dem Schrott für das Schmelzen zugeführt werden muss:

   $$P_{\text{Heiz}} = \frac{Q}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = P_{\text{Heiz}} \cdot \Delta t = 91\,\mathrm{MW} \cdot 360\,\mathrm{s} = 32\,760\,\mathrm{MJ}$$

   Bitte beachte die Einheitenumrechnung: Die SI-Grundeinheiten von Leistung, Zeit und Wärme sind Watt W, Sekunde s und Joule J. Werden in eine Rechnung nur Grundeinheiten eingesetzt, so kommt automatisch die Grundeinheit der gesuchten Grösse heraus. Hier bedeutet das: $\mathrm{J} = \mathrm{W}\cdot\mathrm{s}$, woraus auch folgt: $\mathrm{MJ} = \mathrm{MW}\cdot\mathrm{s}$.

   Mit dieser Wärme und der Masse können wir auf die spezifische Schmelzwärme des Schrotts schliessen:

   $$L_{\mathrm{f}} = \frac{Q}{m} = \frac{32\,760\,\mathrm{MJ}}{120\,000\,\mathrm{kg}} = 0.273\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{270 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}}$$

5. *Schnee schmelzen*

   Wir berechnen die für den ganzen Vorgang benötigte Wärme:

   $$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= c_{\text{Eis}} \cdot m \cdot \Delta\vartheta_1 + L_{\mathrm{f}} \cdot m + c_{\text{Wa}} \cdot m \cdot \Delta\vartheta_3 = m \cdot (c_{\text{Eis}} \cdot \Delta\vartheta_1 + L_{\mathrm{f}} + c_{\text{Wa}} \cdot \Delta\vartheta_3) \\ &= 1.6\,\mathrm{kg} \cdot \left(2100\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 7\,^\circ\mathrm{C} + 333.8 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 92\,^\circ\mathrm{C}\right) = 1\,173\,000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Heizleistung:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{1\,173\,000\,\mathrm{J}}{18\,\mathrm{min}} = \frac{1\,173\,000\,\mathrm{J}}{1080\,\mathrm{s}} = 1086\,\mathrm{W} \simeq \underline{\underline{1.1\,\mathrm{kW}}}$$

6. *Aufwärmen des Bügeleisens*

   Sowohl das Eisen, als auch das Aluminium müssen erhitzt werden. Wir starten mit dem Heizvorgang bei Zimmertemperatur, also etwa bei $20\,^\circ\mathrm{C}$. Daraus folgt für die benötigte Wärmemenge:

$$\begin{aligned} Q = Q_{\mathrm{Eisen}} + Q_{\mathrm{Alu}} &= c_{\mathrm{Eisen}} \cdot m_{\mathrm{Eisen}} \cdot \Delta\vartheta + c_{\mathrm{Alu}} \cdot m_{\mathrm{Alu}} \cdot \Delta\vartheta \\ &= 450\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 1.3\,\mathrm{kg} \cdot 110\,^\circ\mathrm{C} + 896\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.27\,\mathrm{kg} \cdot 110\,^\circ\mathrm{C} \\ &= 64\,350\,\mathrm{J} + 26\,611\,\mathrm{J} \approx 91\,000\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

   Aus der angeführten Leistung bestimmt man damit die benötigte Aufheizzeit:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{91\,000\,\mathrm{J}}{350\,\mathrm{W}} \simeq 260\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}}}$$

   In der Realität braucht es mehr Zeit für diese Erwärmung, weil dabei auch Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

7. *Kochwaschgang*

   $38\,\mathrm{lit.}$ Wasser haben eine Masse von etwa $38\,\mathrm{kg}$. Diese wird von $15\,^\circ\mathrm{C}$ auf $95\,^\circ\mathrm{C}$ erhitzt. Dazu braucht man die folgende Wärmemenge:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 38\,\mathrm{kg} \cdot (95\,^\circ\mathrm{C} - 18\,^\circ\mathrm{C}) = 1.22 \cdot 10^7\,\mathrm{J} \cdot \underbrace{\frac{1\,\mathrm{kWh}}{3\,600\,000\,\mathrm{J}}}_{=1} = 3.40\,\mathrm{kWh}$$

   Daraus folgt der gesuchte Prozentsatz:

$$\frac{3.40\,\mathrm{kWh}}{12\,\mathrm{kWh}} = 0.283 \simeq \underline{\underline{28\,\%}}$$

8. *Trockeneis*

   Der Vorgang besteht aus zwei Phasen – Abkühlen und Resublimieren. Für beide Vorgänge lässt sich der Wärmeumsatz berechnen:

$$\begin{aligned} Q = Q_1 + Q_2 &= c \cdot m \cdot \Delta\vartheta - L_{\mathrm{s}} \cdot m \\ &= 837\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.26\,\mathrm{kg} \cdot (-78.45\,^\circ\mathrm{C} - 21\,^\circ\mathrm{C}) - 317.5 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 0.26\,\mathrm{kg} \\ &= -21\,642\,\mathrm{J} - 82\,550\,\mathrm{J} = -104\,192\,\mathrm{J} \simeq \underline{\underline{-100\,\mathrm{kJ}}} \end{aligned}$$

   Die Rechnung ist von Anfang an so angesetzt, dass beide Wärmen negativ herauskommen, denn dem Trockeneis muss diese Wärmemenge ja entzogen werden.

9. *Die Bettflasche*

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.80\,\mathrm{kg} \cdot (29\,^\circ\mathrm{C} - 100\,^\circ\mathrm{C}) = -237\,538\,\mathrm{J} \simeq \underline{\underline{-240\,\mathrm{kJ}}}$$

10. *Kochphysik*

    (a) Mit der spezifischen Schmelz- resp. Erstarrungswärme von Wasser folgt (Wasser: $1\,\mathrm{dl} \approxeq 0.1\,\mathrm{kg}$):

$$Q = -L_{\mathrm{f}} \cdot m = -333.8 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 0.100\,\mathrm{kg} = -33\,380\,\mathrm{J} \simeq \underline{\underline{-33.4\,\mathrm{kJ}}}$$

(b) Wenn die Teigwaren ins Wasser gegeben werden, haben sie noch Zimmertemperatur. Das Wasser hat bereits eine Temperatur von $100\,°\mathrm{C}$. Wegen diesem Temperaturunterschied wird nun ein Wärmeaustausch stattfinden. Das Wasser gibt innere Energie in Form von Wärme an die Pasta ab. Dadurch verringert sich seine Temperatur kurzzeitig unter den Siedepunkt. Das Sieden stoppt. Erst, nachdem die Kochplatte genügend Wärme nachgeliefert hat, beginnt das Wasser wieder zu sieden.

(c) Pro Minute nimmt das Wasser die folgende Wärmemenge auf:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad Q = P \cdot \Delta t = 1200\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s} = 72\,000\,\mathrm{J}$$

Welche Wassermenge kann damit verdampft werden?

$$Q = L_\mathrm{v} \cdot m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{Q}{L_\mathrm{v}} = \frac{72\,000\,\mathrm{J}}{2256 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = 0.0319\,\mathrm{kg}$$

Mit der leicht zu memorierenden Dichte von Wasser ergibt sich ein Volumen von:

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\varrho} = \frac{0.0319\,\mathrm{kg}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 0.000\,031\,9\,\mathrm{m}^3 \cdot \underbrace{\frac{10^9\,\mathrm{mm}^3}{1\,\mathrm{m}^3}}_{=1} = 31\,900\,\mathrm{mm}^3$$

Dieses Wasservolumen entspricht einer Scheibe im zylinderförmigen Innenraum der Pfanne. Dessen Grundfläche können wir aus dem Druchmesser berechnen:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (250\,\mathrm{mm})^2}{4} = 49\,100\,\mathrm{mm}^2$$

Jetzt lässt sich bestimmen, welche Höhe die Wasserscheibe hat, die pro Minute verdampft:

$$V = A \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{A} = \frac{31\,900\,\mathrm{mm}^3}{49\,100\,\mathrm{mm}^2} \simeq \underline{\underline{0.65\,\mathrm{mm}}}$$

11. *Die Masse eines Glühdrahtes*

Während den $5\,\mathrm{ms}$ nimmt der Draht die folgende Wärmemenge auf:

$$Q = P \cdot \Delta t = 100\,\mathrm{W} \cdot 0.05\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{J}$$

In dieser Zeit wird der Draht von Zimmertemperatur ($\approx 20\,°\mathrm{C}$) auf mindestens $2900\,°\mathrm{C}$ erhitzt. Wäre zu viel Masse vorhanden, so würde die eben berechnete Wärmemenge nicht ausreichen. Wir können die Grenzmasse bestimmen, bei welcher es theoretisch gerade noch klappt:

$$m_\mathrm{max} = \frac{Q}{c \cdot \Delta\vartheta_\mathrm{min}} = \frac{5\,\mathrm{J}}{134\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot (2900\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C})} = 13.0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \simeq \underline{\underline{13\,\mathrm{mg}}}$$

12. *Erwärmung im Schwimmbad*

Zur Veranschaulichung: Es wird ein Wasserkreislauf eingerichtet, in welchem das Wasser ständig aus dem Becken durch die Sonnenkollektoren und wieder zurück ins Becken geleitet wird.

Das Becken enthält ein Wasservolumen von $V = l \cdot b \cdot h = 50\,\mathrm{m} \cdot 18\,\mathrm{m} \cdot 2.5\,\mathrm{m} = 2250\,\mathrm{m}^3$. Das entspricht einer Masse von $2\,250\,000\,\mathrm{kg}$. Diese Wassermenge soll um $1\,°\mathrm{C}$ erwärmt werden. Dazu benötigt man die folgende Wärmemenge (wir gehen davon aus, dass das Wasser im Verlaufe des Tages nur vernachlässigbar wenig Wärme an die Umgebung abgibt):

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 2\,250\,000\,\mathrm{kg} \cdot 1\,°\mathrm{C} = 9.4095 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$$

Von den $700\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ Flächenstrahlungsleistung der Sonne kann nur ein Teil umgesetzt werden:

$$P_{\text{effektiv}} = \eta \cdot P_{\text{Sonne}} = 0.60 \cdot 700\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 420\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

In 6 Stunden kommt also die folgende effektive Flächenheizwärme zustande:

$$Q_{\mathrm{m}^2} = P_{\text{effektiv}} \cdot t = 420\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \underbrace{6 \cdot 3600\,\mathrm{s}}_{=6\,\text{Stunden}} = 9.072 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$$

Damit lässt sich die notwendige Kollektorfläche A berechnen:

$$Q = Q_{\mathrm{m}^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Q}{Q_{\mathrm{m}^2}} = \frac{9.4095 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}{9.072 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}} = 1037\,\mathrm{m}^2 \simeq \underline{\underline{1000\,\mathrm{m}^2}}$$

13. *Abwärme beim Kernkraftwerk Beznau*

    Von den $2100\,\mathrm{MW}$ werden $67\,\%$ als Abwärme freigesetzt, d.h. pro Sekunde eine Wärmemenge von:

    $$Q = P \cdot \Delta t = 0.67 \cdot 2100\,\mathrm{MW} \cdot 1\,\mathrm{s} = 1407\,\mathrm{MJ}$$

    $40\,\mathrm{m}^3$ Wasser haben eine Masse von etwa $40\,000\,\mathrm{kg}$. Es ergibt sich also eine Erwärmung von:

    $$\Delta\vartheta = \frac{Q}{c \cdot m} = \frac{1407 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 40\,000\,\mathrm{kg}} = 8.4\,{}^\circ\mathrm{C}$$

    Mit anderen Worten, die Prospektangaben stimmen. Die Erwärmung des Wassers dürfte in der Wirklichkeit noch etwas geringer sein, da auch an die restliche Umgebung Wärme abgegeben wird.

    Selbstverständlich kann man bei der Berechnung auch umgekehrt vorgehen und schauen, wie viel Energie für die Erwärmung von $40\,\mathrm{m}^3$ um $10\,{}^\circ\mathrm{C}$ notwendig wäre. Man findet dann einen leicht grösseren Wert, als die vom Werk abgegebene Abwärme. Dies führt zur gleichen Schlussfolgerung.

14. *Etwas zum Formalismus: Das gewichtete Mittel*

    Die Berechnung der Note geschieht folgendermassen:

    $$N = \frac{g_1 \cdot N_1 + g_2 \cdot N_2 + g_3 \cdot N_3 + g_4 \cdot N_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4} = \frac{1 \cdot 4.5 + \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 5.5}{1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}} = 4.53$$

    Auf die gleiche Weise könnte man beliebig viele Noten miteinander verrechnen:

    $$N = \frac{g_1 \cdot N_1 + \ldots + g_n \cdot N_n}{g_1 + \ldots + g_n}$$

15. *Diverses zu Mischungstemperaturen*

    (a) Die abgegebene Energie des Kupfers ist vom Betrag her gleich der vom Wasser aufgenommenen Energie. Im Skript wird aus dieser Überlegung heraus eine Formel für die Mischungstemperatur ϑ_{E} von n Körpern notiert. Wir haben gesehen, dass das Mischen einer gewichteten Mittelung der vorkommenden Anfangstemperaturen ϑ_i $(i = 1, \ldots, n)$ entspricht. Das Gewicht ist jeweils gleich dem Produkte aus der spezifischen Wärmekapazität c_i und der Masse m_i des Körpers:

    $$\vartheta_{\mathrm{E}} = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot \vartheta_1 + \ldots + c_n \cdot m_n \cdot \vartheta_n}{c_1 \cdot m_1 + \ldots c_n \cdot m_n}$$

Für unsere Körper aus Kupfer und Wasser ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathrm{E}} &= \frac{c_{\mathrm{Cu}} \cdot m_{\mathrm{Cu}} \cdot \vartheta_1 + c_{\mathrm{Wa}} \cdot m_{\mathrm{Wa}} \cdot \vartheta_2}{c_{\mathrm{Cu}} \cdot m_{\mathrm{Cu}} + c_{\mathrm{Wa}} \cdot m_{\mathrm{Wa}}} \\ &= \frac{383\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 40.0\,\mathrm{g} \cdot 80.0\,{}^\circ\mathrm{C} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 15\underline{0}\,\mathrm{g} \cdot 2\underline{0}\,{}^\circ\mathrm{C}}{383\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 40.0\,\mathrm{g} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 15\underline{0}\,\mathrm{g}} \simeq \underline{\underline{21.4\,{}^\circ\mathrm{C}}}\end{aligned}$$

Betrachte kurz den mit Werten und Einheiten aufgeschriebenen Bruch. Wie man sieht, ist es hier für einmal nicht nötig, vor der Rechnung alle Angaben in SI-Grundeinheiten umzuformen. Die Gramm und die Einheiten der spezifischen Wärmekapazitäten ($\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot \mathrm{g}$) kürzen sich nämlich direkt weg und wir erhalten ${}^\circ\mathrm{C}$.

Klar wird: Wasser ist ein gutes Kühlmittel! Die Temperatur des Gemischs ist gegenüber der Ausgangstemperatur des Wassers lediglich um $1.4\,{}^\circ\mathrm{C}$ angestiegen!

(b) Zwar gilt die Energieerhaltung (abgegebene Wärme = aufgenommene Wärme), aber da sich die Körper automatisch immer in einer Umgebung befinden, wird auch diese einen Teil der Wärme aufnehmen oder zusätzlich Wärme in die Körper hineingeben, weil sie sich auf einer anderen Temperatur befindet. Dieser "Energieverlust" oder "-gewinn" wird bei der Berechnung des theoretischen Wertes nicht berücksichtigt.

(c) Es wird nach einer Grösse gesucht, welche den unbekannten Stoff S charakterisiert. Da wir diesen Stoff via Mischungsversuch herausfinden wollen, kann es sich dabei nur um die spezifische Wärmekapazität c handeln.

Es ist hier nicht besonders sinnvoll, die Formel für die Mischtemperatur aus Teilaufgabe (a) zu verwenden. Die Rechnung wird zu kompliziert. Diese Formel eignet sich nur dann, wenn wir eine Mischungstemperatur zu berechnen haben.

Stattdessen verwenden wir den ursprünglichen Ansatz der Energieerhaltung: Die vom Wasser abgegebene Wärme wird vollständig vom anderen Stoff aufgenommen:

$$\begin{aligned} & Q_{\mathrm{S}} = -Q_{\mathrm{Wa}} && |\,\text{Formeln einsetzen} \\ \Rightarrow\quad & c_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{S}} \cdot \Delta\vartheta_{\mathrm{S}} = -c_{\mathrm{Wa}} \cdot m_{\mathrm{Wa}} \cdot \Delta\vartheta_{\mathrm{Wa}} && |\,\Delta\vartheta\text{'s ausschreiben} \\ \Rightarrow\quad & c_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{S}} \cdot (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{S}}) = -c_{\mathrm{Wa}} \cdot m_{\mathrm{Wa}} \cdot (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{Wa}}) && |\;:(m_{\mathrm{S}} \cdot (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{S}})) \\ \Leftrightarrow\quad & c_{\mathrm{S}} = -\frac{c_{\mathrm{Wa}} \cdot m_{\mathrm{Wa}} \cdot (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{Wa}})}{m_{\mathrm{s}} \cdot (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{S}})} && |\,\text{Werte einsetzen} \\ \Rightarrow\quad & c_{\mathrm{S}} = -\frac{4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 14\underline{0}\,\mathrm{g} \cdot (41\,{}^\circ\mathrm{C} - 45\,{}^\circ\mathrm{C})}{2\underline{0}\,0\,\mathrm{g} \cdot (41\,{}^\circ\mathrm{C} - 15\,{}^\circ\mathrm{C})} \\ & \simeq 450\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \end{aligned}$$

Somit könnte es sich gemäss c-Tabelle z.B. um <u>Eisen</u> handeln.

(d) Alles in allem werden einfach drei Stoffe gemischt (wovon zwei die gleiche Anfangstemperatur von $21\,{}^\circ\mathrm{C}$ haben). Die Mischungstemperatur ergibt sich als das gewichtete Mittel aus den drei Anfangstemperaturen ϑ_{K}, ϑ_{W} und ϑ_{S}.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathrm{E}} &= \frac{c_{\mathrm{K}} \cdot m_{\mathrm{K}} \cdot \vartheta_{\mathrm{K}} + c_{\mathrm{W}} \cdot m_{\mathrm{W}} \cdot \vartheta_{\mathrm{W}} + c_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{S}} \cdot \vartheta_{\mathrm{S}}}{c_{\mathrm{K}} \cdot m_{\mathrm{K}} + c_{\mathrm{W}} \cdot m_{\mathrm{W}} + c_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{S}}} \\ &= \frac{553\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 152\,\mathrm{g} \cdot 21\,{}^\circ\mathrm{C} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 320\,\mathrm{g} \cdot 21\,{}^\circ\mathrm{C} + 700\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 560\,\mathrm{g} \cdot 73\,{}^\circ\mathrm{C}}{553\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 152\,\mathrm{g} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 320\,\mathrm{g} + 700\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 560\,\mathrm{g}} \simeq \underline{\underline{32\,{}^\circ\mathrm{C}}}\end{aligned}$$

16. *Wasser als Kühlmittel*

    (Flüssiges) Wasser hat unter sämtlichen Stoffen eine der grössten spezifischen Wärmekapazitäten ($c = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$). Das bedeutet, es braucht bereits relativ viel Energie, um eine Wassermenge um eine geringe Temperaturdifferenz zu erwärmen. Wasser kann also verhältnismässig viel Wärme aufnehmen, ohne dabei selber seine Temperatur gross zu ändern. D.h., ein heisserer Körper, welcher im thermischen Kontakt mit dem Wasser steht, wird mehr an Temperatur verlieren, als das Wasser an Temperatur gewinnt. Und das bedeutet schliesslich, dass Wasser eben ein gutes Kühlmittel ist – es bleibt länger kalt und sorgt damit auch länger für einen speditiven Wärmeentzug beim zu kühlenden Körper.

17. *Frostschutz*

    Auch dem aufgesprühten Wasser muss nun Erstarrungswärme entzogen werden. D.h., die Wärme, welche dem Obst durch die kalte Umgebung entzogen wird, wird zuerst dem Wasser entnommen, da dieses ja auch auf der Oberfläche der Obstblüte sitzt. Erst, wenn dieses Wasser gefroren ist, gefriert die Blüte.

18. *Kurzes Lüften ist besser!*

    Wenn man die Fenster länger offen lässt, so wird nicht nur die warme ("alte") durch kalte ("neue") Luft ausgetauscht, sondern es beginnen sich auch die Wände und Gegenstände im Zimmer merklich abzukühlen. Werden die Fenster geschlossen, so müssen neben der Luft auch diese Körper wieder erwärmt werden, was eben länger dauert.

19. *Im Boiler*

    (a) Bei Wasser gilt: $1\,\mathrm{Liter}$ hat ziemlich genau eine Masse von $1\,\mathrm{kg}$.

    Die Mischtemperatur berechnet sich als gewichtete Mittelung der Anfangstemperaturen, wobei die Gewichte gerade die mit der jeweiligen Masse multiplizierten spezifischen Wärmekapazitäten der beteiligten Körper sind. D.h. hier:

    $$\begin{aligned}\vartheta_\mathrm{E} &= \frac{c_\mathrm{W}\cdot m_\mathrm{kalt}\cdot\vartheta_\mathrm{kalt}+c_\mathrm{W}\cdot m_\mathrm{heiss}\cdot\vartheta_\mathrm{heiss}}{c_\mathrm{W}\cdot m_\mathrm{kalt}+c_\mathrm{W}\cdot m_\mathrm{heiss}} = \frac{m_\mathrm{kalt}\cdot\vartheta_\mathrm{kalt}+m_\mathrm{heiss}\cdot\vartheta_\mathrm{heiss}}{m_\mathrm{kalt}+m_\mathrm{heiss}}\\ &= \frac{180\,\mathrm{kg}\cdot 14\,^\circ\mathrm{C}+740\,\mathrm{kg}\cdot 81\,^\circ\mathrm{C}}{180\,\mathrm{kg}+920\,\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{68\,^\circ\mathrm{C}}}\end{aligned}$$

    Es ist zu beachten, dass das von Herrn Fritz bezogene heisse Wasser durch kaltes ersetzt wird. Damit befinden sich (vor der Durchmischung) nur noch $740\,\mathrm{Liter}$ heisses Wasser im Boiler.

    (b) m sei die für das Bad bezogene und damit also die nachgefüllte kalte Wassermenge, dann hat es im Boiler (vor dem Nachfüllen) noch $(920\,\mathrm{kg}-m)$ an heissem Wasser. Unter Verwendung der bekannten Gleichung für Mischtemperaturen erhält man eine lineare Gleichung in m:

    $$\begin{aligned} & 60\,^\circ\mathrm{C} = \frac{4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\cdot(920\,\mathrm{kg}-m)\cdot 81\,^\circ\mathrm{C}+4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\cdot m\cdot 14\,^\circ\mathrm{C}}{4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\cdot(920\,\mathrm{kg}-m)+4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\cdot m} && \mid c_\mathrm{Wa}\ \text{kürzen}\\ \Leftrightarrow\quad & 60\,^\circ\mathrm{C} = \frac{(920\,\mathrm{kg}-m)\cdot 81\,^\circ\mathrm{C}+m\cdot 14\,^\circ\mathrm{C}}{(920\,\mathrm{kg}-m)+m} && \mid :\ ^\circ\mathrm{C}\\ \Leftrightarrow\quad & 60 = \frac{74\,520\,\mathrm{kg}-67\,m}{920\,\mathrm{kg}} && \mid\cdot 920\,\mathrm{kg},\ \text{etc.}\\ \Leftrightarrow\quad & m \simeq \underline{\underline{290\,\mathrm{kg}}}\end{aligned}$$

    Herr Fritz muss $\underline{\underline{290\,\mathrm{lit.}}}$ heisses Wasser beziehen, damit die Temperatur im Boiler kurzfristig $60\,^\circ\mathrm{C}$ beträgt.

20. *Ein Mischungsversuch mit Phasenübergang*

Stellen wir uns den Vorgang vor: Das Eis wird zuerst auf $0\,°\mathrm{C}$ erwärmt, danach schmilzt es. Die im Wasser vorhandene Energie dürfte ausreichen, um das ganze Eis zu schmelzen und anschliessend noch etwas zu erwärmen. Das können wir genau überprüfen: Wir berechnen zuerst die für das Eis benötigte Wärmemenge bei der Temperaturerhöhung von $-10\,°\mathrm{C}$ auf $0\,°\mathrm{C}$. Wir nennen sie Q_1:

$$Q_1 = c_\mathrm{E} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \Delta\vartheta_1 = 2100\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 2.2\,\mathrm{kg} \cdot \underbrace{(0\,°\mathrm{C} - (-1\underline{0}\,°\mathrm{C}))}_{=10\,°\mathrm{C}} = 46\,200\,\mathrm{J}$$

Die zum Schmelzen benötigte Wärmemenge soll Q_2 heissen:

$$Q_2 = L_\mathrm{f} \cdot m_\mathrm{E} = 3.338 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 2.2\,\mathrm{kg} = 734\,360\,\mathrm{J}$$

Jetzt muss die Energieerhaltung gelten. Die vom Wasser abgegebene Wärme Q_W wird vom Eis in den drei erwähnten Schritten aufgenommen. Q_3 soll für die Erwärmung der anfänglichen Eismasse oberhalb von $0\,°\mathrm{C}$ stehen:

$$\begin{aligned}
& Q_1 + Q_2 + Q_3 = -Q_\mathrm{W} \\
\Rightarrow\quad & Q_1 + Q_2 + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \Delta\vartheta_3 = -c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \Delta\vartheta_\mathrm{W} \\
\Rightarrow\quad & Q_1 + Q_2 + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot (\vartheta_\mathrm{E} - \vartheta_\mathrm{f}) = -c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot (\vartheta_\mathrm{E} - \vartheta_\mathrm{W}) \\
\Leftrightarrow\quad & Q_1 + Q_2 + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{E} - c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{f} = -c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{E} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{W} \\
\Leftrightarrow\quad & c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{E} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{E} = c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{f} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{W} - Q_1 - Q_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \vartheta_\mathrm{E} \cdot (c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W}) = c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{f} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{W} - Q_1 - Q_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \vartheta_\mathrm{E} = \frac{c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} \cdot \vartheta_\mathrm{f} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W} \cdot \vartheta_\mathrm{W} - Q_1 - Q_2}{c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{E} + c_\mathrm{W} \cdot m_\mathrm{W}}
\end{aligned}$$

Es handelt sich bei diesem Ausdruck beinahe um die bereits Gleichung für Mischungstemperaturen. Zwei Mengen Wasser, die eine auf der Schmelztemperatur $\vartheta_\mathrm{f}\,(=0\,°\mathrm{C})$, die andere bei $\vartheta_\mathrm{W}\,(=65\,°\mathrm{C})$, werden miteinander gemischt. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die eine Wassermenge vorhin noch Eis von einer Temperatur unter $0\,°\mathrm{C}$ war. Deshalb müssen im Zähler die weiter oben berechneten Wärmemengen Q_1 und Q_2 abgezogen werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\mathrm{E} &= \frac{4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 2.2\,\mathrm{kg} \cdot 0\,°\mathrm{C} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 3.4\,\mathrm{kg} \cdot 65\,°\mathrm{C} - 46\,200\,\mathrm{J} - 734\,360\,\mathrm{J}}{4\,182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 2.2\,\mathrm{kg} + 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot°\mathrm{C}} \cdot 3.4\,\mathrm{kg}} \\
&= \frac{0 + 924\,222\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}} \cdot °\,\mathrm{C} - 46\,200\,\mathrm{J} - 734\,360\,\mathrm{J}}{9200\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}} + 14\,219\,\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}}} \simeq \underline{\underline{6.1\,°\mathrm{C}}}
\end{aligned}$$

21. *Die Erwärmung beim Föhn – eine Aufgabe für "Cracks"*

Der Trick bei dieser Aufgabe ist es, alle Angaben auf ein Einheitsvolumen – z.B. m^3 – zu beziehen.

Die Wasserdichte in der Luft beträgt laut Angabe: $\varrho_\mathrm{W} = 8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}$. Davon kondensieren allerdings nur $30\,\%$. Beim Kondensieren entsteht eine bestimmte Wärmemenge pro Volumen:

$$\frac{Q}{V} = \frac{0.30 \cdot L_\mathrm{v} \cdot m}{V} = 0.30 \cdot L_\mathrm{v} \cdot \varrho_\mathrm{W} = 0.30 \cdot 2265 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 0.008\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 5436 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Jetzt schauen wir, welche Masse Luft damit pro Kubikmeter erwärmt werden muss. Diese Angabe steckt gerade in der Dichte der Luft: $\varrho_\mathrm{Luft} = \frac{m}{V}$.

Es folgt eine geschickte mathematische Überlegung, in welcher wir wieder auf beiden Seiten einer Gleichung durch V teilen:

$$Q = c_\mathrm{Luft} \cdot m \cdot \Delta\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q}{V} = c_\mathrm{Luft} \cdot \frac{m}{V} \cdot \Delta\vartheta = c_\mathrm{Luft} \cdot \varrho_\mathrm{Luft} \cdot \Delta\vartheta$$

Eine Umstellung ergibt schliesslich:

$$\Delta\vartheta = \frac{\frac{Q}{V}}{c_\mathrm{Luft} \cdot \varrho_\mathrm{Luft}} = \frac{5436 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}}{800\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 1.300\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \simeq \underline{\underline{5\,^\circ\mathrm{C}}}$$

Das kann nach unserer Erfahrung mit dem Föhn gut sein.

Am Schluss ist es lehrreich, das erhaltene Resultat rein formal zu betrachten:

$$\Delta\vartheta = \frac{\frac{Q}{V}}{c_\mathrm{Luft} \cdot \varrho_\mathrm{Luft}} = \frac{0.30 \cdot L_\mathrm{v} \cdot \varrho_\mathrm{W}}{c_\mathrm{Luft} \cdot \varrho_\mathrm{Luft}}$$

Wenn man genau hinschaut, erkennt man in dieser Form die gesamte Physik des Problems: Der Zähler erklärt, wie die Wärme freigesetzt wird, nämlich durch das Wasser, welches kondensiert. Der Nenner beschreibt, wofür die Wärme gebraucht wird, nämlich für die Erwärmung der Luft.