Übungen zur Wärmelehre – Lösungen Serie 4

1. *Der Gasdruck bei der plötzlichen Expansion*

   (a) Die Gastemperatur ϑ ist als Mass für die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\overline{v}$ resp. die mittlere kinetische Energie $\overline{E}_{\text{kin}}$ der Gasmoleküle aufzufassen. (Bei fix vorgegebenem Aggregatzustand – hier: gasförmig – brauchen wir keinen speziellen Unterschied zwischen kinetischer und innerer Energie zu machen. Den Nullpunkt der inneren Energie dürfen wir nach eigenem Gutdünken legen, z.B. auf einen Zustand, bei dem der Körper gasförmig ist und punkto Temperatur schon deutlich über dem Siedepunkt liegt. Oberhalb dieses Nullpunktes entspricht jede Veränderung der inneren Energie auch einer Veränderung der kinetischen Energie der Teilchen, wobei je nach Teilchensorte ein Teil der Energie für sogenannte innere Freiheitsgrade der Teilchen (Molekülschwingungen) verwendet wird.)

   Weil sich die Gasmoleküle bewegen, stossen sie immer wieder gegen einander und auch gegen jede Oberfläche, die mit dem Gas in Kontakt ist. Durch diese Teilchenstösse entsteht der Druck, also die Kraft, die das Gas auf Flächen ausübt. Je höher die Temperatur, desto heftiger ist die mittlere Molekülgeschwindigkeit und umso heftiger und häufiger werden die Gasmoleküle gegen die Gefässwände stossen. Der Druck hängt somit von der Temperatur ab.

   Könnte ich beispielsweise das Volumen des Gasbehälters steuern, so hätte ich eine weitere Möglichkeit den Druck zu regeln. Wäre dieselbe Gasmenge bei gleicher Temperatur in einem kleineren Volumen eingesperrt, so wären die Aufpralle der Teilchen auf den Gefässwänden häufiger resp. auf weniger Gefässoberfläche verteilt und der Druck wäre somit grösser.

   (b) Da es im Vakuum gar keine Teilchen gibt, kann auch kein Druck durch Aufpralle von Teilchen entstehen. Der Druck eines Vakuums ist also stets $p_{\text{Vakuum}} = 0$.

   (c) Aus dem Behälter B gibt es gegen diese Expansion des Gases aus A keinen Gegendruck. D.h., die Gasteilchen aus A können in den Behälter B hinübergehen, ohne durch Zusammenstösse mit anderen Gasteilchen daran gehindert zu werden. So verteilen sich die Gasteilchen aus A sehr rasch auf das gesamte zur Verfügung stehende Volumen $\mathrm{A}+\mathrm{B}$.

   "Sehr rasch" heisst: Bei Zimmertemperatur sind die $\mathrm{N_2}$-Moleküle der Luft mit einer mittleren Geschwindigkeit von $\overline{v} \approx 470\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unterwegs. Das ist ungefähr 1.5-fache Schallgeschwindigkeit! Der Gasausgleich erfolgt tatsächlich so schnell, dass er sich von Auge nicht mitverfolgen lässt.

   Um die Diffusion zu demonstrieren, würden wir Behälter B anfänglich mit Luft füllen. Dann würden sich die Gasmengen nach Öffnung des Hahns C nach und nach durchmischen. Bis zur vollständigen Durchmischung würde viel mehr Zeit vergehen. Man könnte schön zuschauen, wie sich das farbige Gas nach und nach auf beide Behälter verteilt.

   (d) Bei Stössen mit der Wand (und untereinander) verlieren die Gasteilchen im Schnitt keine kinetische Energie – in der Welt der Teilchen gibt es keine Reibung! – wenn das Gas mit der Wand im thermischen Gleichgewicht ist, wovon wir ausgehen wollen. D.h., auch nach der Expansion ist die innere Energie des Gases und damit seine Temperatur gleich gross. Es handelt sich bei diesem Vorgang um eine **isotherme Expansion**.

   Da das Volumen verdoppelt wurde, dauert es im Schnitt doppelt solange, bis ein Gasteilchen wieder auf die Gefässwände trifft und dort zur Druckerzeugung beiträgt. Folglich hat sich der Druck des Gases halbiert.

2. *Mehr zur Zustandsänderung von Gasen*

   (a) Das Wort **isochor** bezeichnet Vorgänge, bei denen das Volumen eines Körpers gleich bleibt resp. konstant gehalten wird.

   Dagegen beschreiben **Kompression** und **Expansion** eben gerade das kleiner oder das grösser Werden eines Körpers. Das ergibt zusammen mit dem Wort isochor effektiv keinen Sinn!

   (b) Der Gasbehälter erwärmt sich an der Sonne (indem er Strahlungsenergie – eine Form des Wärmetransports – aufnimmt). Dadurch wird auch das Gas in seinem Inneren erwärmt. Dem Gas wird also Wärme Q zugeführt.

   Da es sich um einen verschlossenen und soliden Behälter handelt, bleibt das Volumen gleich. Wir reden hier also über eine **isochore Erwärmung**.

   Steigt die Temperatur bei konstantem Volumen, so bedeutet dies, dass die Gasmoleküle sich schneller bewegen und somit heftiger und häufiger gegen die Wände des Behälters stossen. Makroskopisch steigt also der Druck im Behälter an.

   (c) Die Gasteilchen müssen bei dieser Expansion, wo einfach ein Hahn geöffnet wird und das grössere Volumen ansonsten einfach bereit steht, keine Expansionsarbeit verrichten ($W = 0$). Bei den Teilchenstössen untereinander oder gegen die Wände geht auch nicht irgendwie Wärme verloren ($Q = 0$). Damit bleibt aber auch die innere Energie des Gases unverändert, denn es gilt ja nach dem ersten Hauptsatz:

   $$\Delta U = Q + W = 0 + 0 = 0$$

   Es handelt sich also um eine Art von Gratis-Expansion, die wir im Prinzip gleichzeitig als **isotherm** ($\Delta U = 0$) und als **adiabatisch** ($Q = 0$) bezeichnen könnten.

   N.B. 1: Obwohl auch $W = 0$ ist, handelt es sich sicher nicht um eine isochore Expansion, denn das Gasvolumen verändert sich ja tatsächlich.

   N.B. 2: Dieses Beispiel mag effektiv ein bisschen irreführend sein. Wir sollten es daher nicht als Referenz für andere Situationen heranziehen. Die Ausdehnung einer Gasmenge auf einen Raum, der vorher evakuiert war, ist definitiv ein **Spezialfall!**

   Der **Normalfall** ist, dass ein Gas für eine Expansion stets Expansionsarbeit verrichten muss! Davon dürfen wir in allen anderen Fällen immer ausgehen.

   (d) Stellen wir uns ein Gas im Kolbenzylinder von Abb. 4.1 auf Seite 38 im Skript vor. Diese Gasmenge soll durch das Hineinschieben des Kolbens komprimiert werden. Dabei soll aber zudem der Druck gleich bleiben (isobare Kompression).

   Es ist klar, dass wir dem Gas gleichzeitig Wärme entziehen müssen, wenn wir wollen, dass der Druck gleich bleibt! Würden wir keine Wärme entziehen, so handelte es sich um einen adiabatischen Prozess, bei dem die am Gas verrichtete Arbeit direkt die innere Energie und somit die Teilchengeschwindigkeit erhöhen würde. Die Folge davon wären heftigere und – auch aufgrund des sich verkleinernden Volumens – häufigere Stösse der Teilchen gegen die Zylinderwände, also ein deutlich ansteigender Druck, was aber eben beim isobaren Prozess ja gerade nicht der Fall sein soll. Es muss also sicher Wärme entzogen werden.

   Dabei reicht es nicht einfach dafür zu sorgen, dass sich die Temperatur nicht verändert (isothermer Prozess). Wenn ich nur soviel Wärme Q entziehen würde, dass damit gerade die zugeführte Arbeit W dem Gas wieder weggenommen wird, dann wäre die innere Energie U des Gases konstant. Die Gasteilchen blieben im Mittel gleich schnell. Dies würde aber wegen der gleichzeitigen Verkleinerung des Volumens immer noch zu einer Erhöhung des Drucks führen.

   Bei der Durchführung einer isobaren Kompression muss das Gas also zwangsläufig stark gekühlt werden. **Die Gastemperatur muss sinken!**

(e) Machen wir uns zunächst klar, was mit einer "adiabatischen Expansion" genau gemeint ist. Dazu denken wir mit Vorteil wiederum an unser Gas im Kolbenzylinder:

- Eine "Expansion" bedeutet eine Vergrösserung des Gasvolumens. Dabei schiebt das Gas den Kolben nach aussen, es verrichtet Expansionsarbeit: $W < 0$ (vom Gas abgegebene Energiebeträge sind negativ).
- Gleichzeitig steht "adiabatisch" dafür, dass das Gas während dem Vorgang weder Wärme abgibt, noch Wärme aufnimmt: $Q = 0$.

Aus beiden Punkten zusammen folgt, dass die innere Energie des Gases sinkt, denn nach dem 1. Hauptsatz ist:

$$\Delta U = Q + W \stackrel{Q=0}{=} W < 0$$

Da die innere Energie U bei Gasen ein direktes Mass für die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\overline{v}$ ist, muss auch diese mittlere Teilchengeschwindigkeit geringer werden. Die Antwort lautet somit: **"Ja! Bei der adiabatischen Expansion eines Gases werden die Teilchen im Schnitt langsamer."**

(f) Wir betrachten eine bestimmte Gasmenge – gedacht am besten gleich wieder in einem Kolbenzylinder, wo wir uns die Prozesse gut vorstellen können.

Bei der isochoren Erwärmung bleibt das Volumen konstant. Weder verrichtet das Gas Expansionsarbeit, noch wird ihm Kompressionsarbeit zugeführt. Es ist $W = 0$. Die gesamte dem Gas zugeführte Wärme Q_V wird zur Erhöhung ΔU der inneren Energie verwendet und der 1. Hauptsatz reduziert sich auf:

$$\Delta U \stackrel{W=0}{=} Q_\mathrm{V}$$

Der Index V in Q_V soll anzeigen, das diese Wärmemenge bei konstant gehaltenem Volumen zugeführt wird.

Anders sieht die Sache bei der isobaren Erwärmung aus: Während der Wärmezufuhr soll der Gasdruck gleich bleiben. Das geht nur, wenn sich das Gas dabei ausdehnt, also der Kolben nach aussen gedrückt wird resp. das Gas Expansionsarbeit verrichtet ($W < 0$). (Ohne die Expansion würden die Teilchenaufpralle aufgrund der zugeführten Wärme heftiger und häufiger – der Druck würde ansteigen.) Durch die Erweiterung des Volumens wird verhindert werden, dass durch die höhere Temperatur auch ein höherer Druck entsteht. Mit dem 1. Hauptsatz folgt daraus für die isobare Erwärmung:

$$\Delta U = Q_\mathrm{p} + W$$

Q_p steht für eine Wärmemenge, die bei konstant gehaltenem Druck zugeführt wird.

Egal, ob die Erwärmung isochor oder isobar abläuft: Wenn ich eine bestimmte Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta$ erreichen möchte, so muss dafür die innere Energie um einen ganz bestimmten Betrag ΔU erhöht werden. Schliesslich ist die innere Energie U die Summe über die Energien aller Gasteilchen und die Temperatur ist ein Mass dafür, wie viel innere Energie im Mittel pro Teilchen vorhanden ist. Egal, ob wir mit der betrachteten Gasmenge eine isochore oder eine isobare Erwärmung durchführen, es handelt sich in beiden Fällen um die gleiche Anzahl Gasteilchen und somit muss für die Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta$ eben eine ganz bestimmte Erhöhung ΔU der inneren Energie erfolgen.

Das bedeutet, für eine bestimmte Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta$ ist das ΔU in den beiden obigen Varianten des 1. Hauptsatzes für die isochore und die isobare Erwärmung gleich gross. Und daraus folgt sofort:

$$\Delta U = Q_\mathrm{V} = Q_\mathrm{p} + W \qquad \stackrel{W<0}{\Longrightarrow} \qquad Q_\mathrm{p} > Q_\mathrm{V}$$

Für dieselbe Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ muss bei konstantem Druck mehr Wärme zugeführt werden als bei konstantem Volumen. Und wir verstehen genau, weshalb das so ist: Um den Druck konstant (niedrig) zu halten, muss man dem Gas die Möglichkeit geben Expansionsarbeit zu verrichten. Die zugeführte Wärme wird dann nicht alleine zur Erhöhung der Temperatur resp. der inneren Energie, sondern auch zur Verrichtung dieser Expansionsarbeit verwendet.

Ergänzung resp. Ausblick: Die Sache lässt sich mit verschiedenen spezifischen Wärmekapazitäten formal noch etwas ausführlicher notieren. Ist c_V die spezifische Wärmekapazität beim Prozess mit konstantem Volumen, so gilt für die isochore Erwärmung:

$$\Delta U \overset{W=0}{=} Q = c_\mathrm{V} \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$

m steht für die Gasmasse. Ebenso schreiben wir beim isobaren Prozess:

$$\Delta U = c_\mathrm{P} \cdot m \cdot \Delta\vartheta + W$$

Dabei ist c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstant gehaltenem Druck.

Wiederum muss für eine bestimmte Erhöhung der Temperatur die Zunahme ΔU der inneren Energie in beiden Fällen gleich gross sein, sodass folgt:

$$\Delta U = c_\mathrm{V} \cdot m \cdot \Delta\vartheta = c_\mathrm{p} \cdot m \cdot \Delta\vartheta + W$$

Dividieren wir diese Gleichung durch m und durch ϑ, so folgt:

$$c_\mathrm{V} = c_\mathrm{P} + \underbrace{\frac{W}{m \cdot \Delta\vartheta}}_{<0} \qquad \Rightarrow \qquad c_\mathrm{p} > c_\mathrm{V}$$

Wie wir bereits weiter oben überlegt hatten, wird die Arbeit W bei der isobaren Erwärmung vom Gas verrichtet (Expansionsarbeit). Sie ist also negativ und so wird nun auch in der Gleichung klar, dass c_p grösser als c_V sein muss. Bei konstantem Druck ist die spezifische Wärmekapazität eines Gases grösser als bei konstantem Volumen. Für Luft bei $20\,^\circ\mathrm{C}$ sind beispielsweise $c_\mathrm{V} = 717\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$ und $c_\mathrm{p} = 1005\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$.

(g) **Klarstellung:** Der thermische Anfangszustand des Gases soll bei allen drei Vorgängen derselbe sein. D.h., es wird eine stets gleiche Anfangstemperatur ϑ_1 und ein ebenso stets gleicher Anfangsdruck p_1 vorgegeben.

Erhellende Vorüberlegung: Das Gas zu komprimieren bedeutet, Kompressionsarbeit zu verrichten. Diese Kompressionsarbeit hängt vom aktuellen Gasdruck ab. Bei geringem Druck kann der Kolben mit weniger Kraft gegen das Gas bewegt werden als bei grösserem Druck.

Verändert sich der Gasdruck durch das Hineinstossen des Koblens, so kann man schrittweise – quasi Millimeter für Millimeter – überlegen, was das für einen Einfluss auf die Kompressionsarbeit hat. Nimmt der Druck zu, so wird es für den nächsten Millimeter der Kolbenbewegung mehr Arbeit brauchen als für den vorangegangenen.

Diese Vorüberlegung ist sehr hilfreich, denn mit dem 1. Hauptsatz und mit dem Teilchenmodell verstehen wir sehr gut, wie sich der Druck im Gas während einer isobaren, einer isothermen und einer adiabatischen Kompression verändert. Daraus können wir folgern, bei welcher Art der Kompression am meisten Kompressionsarbeit zu verrichten ist.

Isobare Kompression: Der Gasdruck p soll sich bei dieser Art der Kompression nicht verän- dern. Das bedeutet, dass jeder Millimeter Kolbenverschiebung genau gleich viel Kompressionsarbeit erfordern wird.

Wir können uns zusätzlich überlegen, dass das Gas bei dieser isobaren Kompression stark gekühlt werden muss, denn sonst würde der Gasdruck eben nicht gleich bleiben. Am Gas wird ja einerseits Kompressionsarbeit verrichtet, was zu einer Erhöhung der inneren Energie und damit der Teilchengeschwindigkeit führen könnte, und andererseits verkleinert sich auch noch das Volumen. Beide Aspekte würden zur Erhöhung des Drucks beitragen und müssen kompensiert werden:

$$Q_\mathrm{p} = \underbrace{\Delta U}_{<0} \; \underbrace{-W}_{<0}$$

Dem Gas ist beim isobaren Prozess also viel Wärme zu entziehen ($Q_\mathrm{p} < 0$) – um die positive Kompressionsarbeit ($W > 0$) gleich wieder abzuführen und das Gas zusätzlich auch noch abzukühlen ($\Delta U < 0$).

Isotherme Kompression: Hier soll sich die Gastemperatur nicht verändern ($\Delta U = 0$). Das bedeutet, die Gasteilchen bleiben im Mittel gleich schnell. Da gleichzeitig aber das Volumen verkleinert wird, wird der Druck p ansteigen, denn die Gasteilchen stossen in einem kleiner werdenden Volumen immer häufiger gegen die Gefässwände. Folglich wird für jeden Millimeter Kolbenverschiebung immer mehr Arbeit notwendig sein.
Somit wird die isotherme Kompression von V_1 auf V_2 sicher mehr Kompressionsarbeit erfordern als die isobare Kompression.
Auch hier können wir uns dazu überlegen, dass dem Gas während der Kompression ebenfalls Wärme entzogen werden muss, denn gemäss dem 1. Hauptsatz gilt ja ($T = \mathrm{konstant} \;\Leftrightarrow\; \Delta U = 0$):

$$Q_\vartheta = \underbrace{-W}_{<0}$$

Die am Gas verrichtete Kompressionsarbeit ($W > 0$) muss durch Entzug von Wärme ($Q_\vartheta < 0$) gleich wieder abgeführt werden, sonst würde sich die innere Energie und damit die Temperatur des Gases erhöhen.

Adiabatische Kompression: Nun soll das Gas keine Wärme abgeben. Das bedeutet nun aber, dass der Druck während der Kompression stark ansteigt, denn einerseits wird das Volumen verkleinert, andererseits erhöht die am Gas verrichtete Kompressionsarbeit ständig die innere Energie und damit die Temperatur des Gases. Die Gasteilchen werden im Schnitt nicht nur häufiger, sondern auch heftiger gegen die Gefässwände prallen. Die Zunahme der Kompressionsarbeit pro Millimeter Kolbenverschiebung wird deswegen nochmals deutlich grösser sein als bei der isothermen Kompression.
Auch hier sei nochmals der 1. Hauptsatz angeführt (mit $Q = 0$):

$$\Delta U = W$$

Die Kompressionsarbeit ($W > 0$) wird vollständig zur Erhöhung der inneren Energie verwendet ($\Delta U > 0$), womit die Gastemperatur zunimmt.

Damit haben wir Klarheit über die Rangliste:

Zur adiabatischen Kompression wird am meisten Arbeit benötigt, weil dabei die Gastemperatur ansteigt resp. dem Gas keine Wärme entzogen wird,

zur isothermen Kompression wird am zweitmeisten Arbeit benötigt, weil dabei die Gastemperatur gleich bleibt resp. dem Gas ein wenig Wärme entzogen wird, und

zur isobaren Kompression wird am wenigsten Arbeit benötigt, weil dabei die Gastemperatur abnimmt resp. dem Gas viel Wärme entzogen wird.