Übungen zur Thermodynamik – Lösungen Serie 5

1. *Der Nutzen von Untersätzen*

   (a) Zuerst ermitteln wir aus dem Durchmesser des Untersatzes seine Fläche:

   $$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.17\,\mathrm{m})^2}{4} = 0.0227\,\mathrm{m}^2$$

   Für den Wärmestrom folgt daraus mit der Dicke der Korkunterlage (= Länge l der Wärmeleitung), der Leitfähigkeit von Kork λ und der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = 90\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C} = 70\,^\circ\mathrm{C}$ zwischen Pfanne und Tisch:

   $$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{0.040\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.0227\,\mathrm{m}^2 \cdot 70\,^\circ\mathrm{C}}{0.009\,\mathrm{m}} = 7.06\,\mathrm{W}$$

   Aus dieser Wattzahl können wir die in 10 Minuten übertragene Wärmemenge bestimmen:

   $$Q = \frac{Q}{\Delta t} \cdot \Delta t = 7.06\,\mathrm{W} \cdot 600\,\mathrm{s} = 4237\,\mathrm{J} = \underline{\underline{4.2\,\mathrm{kJ}}}$$

   Das Resultat können wir sehr gut einordnen, denn $4.2\,\mathrm{kJ}$ ist gerade etwa die Wärmemenge, die es braucht um einen Liter Wasser um $1\,^\circ\mathrm{C}$ zu erwärmen. Das Holz des Tisches wird zwar eine deutlich geringere Wärmekapazität aufweisen – vielleicht ein Zehntel derjenigen von Wasser – aber auch ein Temperaturanstieg von $10\,^\circ\mathrm{C}$ des hölzernen Tischoberfläche ist sicherlich vertretbar. Ausserdem verteilt sich diese Wärmezufuhr ja über 10 Minuten und es ist davon auszugehen, dass diese Wärme im Tisch nicht lokal konzentriert bleibt.

   (b) In 10 Minuten soll die Holzunterlage gleich viel resp. wenig Wärme übertragen wie die Korkunterlage. Das bedeutet, die Wärmeströme müssen gleich gross sein. Dabei haben beide Unterlagen dieselbe Querschnittfläche A und auch die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ ist dieselbe, sodass wir folgern:

   $$\left(\frac{Q}{\Delta t}\right)_{\mathrm{Holz}} = \left(\frac{Q}{\Delta t}\right)_{\mathrm{Kork}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_{\mathrm{Kork}} \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l_{\mathrm{Kork}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{Holz}} \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l_{\mathrm{Holz}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_{\mathrm{Kork}}}{l_{\mathrm{Kork}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{Holz}}}{l_{\mathrm{Holz}}}$$

   Diese Beziehung lässt sich nach l_{Holz} auflösen:

   $$l_{\mathrm{Holz}} = \frac{\lambda_{\mathrm{Holz}}}{\lambda_{\mathrm{Kork}}} \cdot l_{\mathrm{Kork}} = \frac{0.13\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot^\circ\mathrm{C}}}{0.040\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot^\circ\mathrm{C}}} \cdot 0.9\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{2.9\,\mathrm{cm}}}$$

   Die Holzunterlage muss also doch ziemlich dick sein, wenn sie den Tisch gleich gut vor der Wärme schützen soll wie die Korkunterlage. ausgehen?

2. *Der Leidenfrost-Effekt*

   (a) Der Wassertropfen erhält von der Herdplatte Wärm mittels **Wärmeleitung**. Da Tropfen und Platt in direktem physischen Kontakt stehen, funktioniert die Wärmeleitung sehr gut.

   (b) Beim Leidenfrost-Effekt ist die Hitze der Platte dermassen gross, dass einige Wassermoleküle an der Unterseite des Tropfens sofort verdampfen, wenn dieser auf die Platte gegeben wird. Die Folge davon ist, dass der Tropfen auf einem Wasserdampfkissen schwebt. Dieses Kissen hat zwei Auswirkungen:

   - Der Tropfen hat praktisch keine Reibung mehr mit der Platte und ist deshalb sehr beweglich auf ihr.
   - Der Tropfen ist durch das Wasserdampfkissen praktisch von der Herdplatte isoliert. Die Wärmeleitung wird also unterbrochen resp. wesentlich reduziert, sodass der Tropfen viel langsamer verdampft.

3. *Wärmetransport im Pfannenboden*

(a) Einerseits leitet der Pfannenboden aus Kupfer die Wärme von der Herdplatte sehr gut an den Pfanneninhalt weiter, weil Kupfer eine hohe Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_{\mathrm{Cu}} = 390\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$ aufweist. Andererseits ist der rostfreie Stahl aus hygienischen Gründen ein gutes Pfannenmaterial.

(b) Für den Temperaturgradienten folgt sofort aus dem Temperaturunterschied und der Dicke des Pfannenbodens:

$$\text{Temperaturgradient} = \frac{\Delta\vartheta}{l} = \frac{160\,^\circ\mathrm{C} - 45\,^\circ\mathrm{C}}{0.75\,\mathrm{cm}} = 153\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{cm}} = \underline{\underline{150\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{cm}}}}$$

Wir gehen beim Pfannenboden von einer kompakten Kupferschicht aus. Seine Fläche beträgt:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.19\,\mathrm{m})^2}{4} = 0.02835\,\mathrm{m}^2$$

Damit folgt für den Wärmestrom durch den Pfannenboden:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta}{l} = \frac{390\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0.02835\,\mathrm{m}^2 \cdot 115\,^\circ\mathrm{C}}{0.0075\,\mathrm{m}} = 169\,500\,\mathrm{W} = \underline{\underline{170\,\mathrm{kW}}}$$

In der Realität wird der Wärmestrom kaum je diesen riesigen Wert annehmen, weil wir die Pfanne bereits beim Einschalten der Herdplatte auf dieser platzieren und so der Temperaturunterschied gar nie so gross werden kann.

Für die Wärmestromdichte ergäbe sich auf jeden Fall:

$$\frac{Q}{A\cdot\Delta t} = \frac{\frac{\lambda\cdot A\cdot\Delta\vartheta}{l}}{A} = \frac{\lambda\cdot\Delta\vartheta}{l} = \frac{390\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 115\,^\circ\mathrm{C}}{0.0075\,\mathrm{m}} = 5\,980\,000\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{600\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}}} = \underline{\underline{0.60\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{cm}^2}}}$$

(c) Im quasi-statischen Fall herrschen über dem Aluminium und dem Stahl fixe Temperaturdifferenzen. Beide Materialien nehmen pro Zeitspanne gleich viel Energie auf, wie sie abgeben. Die Wärmeströme und auch die Wärmestromdichten müssen je gleich gross sein. Daraus folgern wir (S = Stahl, A = Aluminium):

$$\text{Wärmestromdichte:} \qquad \frac{Q}{A\cdot\Delta t} = \frac{\lambda_\mathrm{S}\cdot\Delta\vartheta_\mathrm{S}}{l_\mathrm{S}} = \frac{\lambda_\mathrm{A}\cdot\Delta\vartheta_\mathrm{A}}{l_\mathrm{A}}$$

Dabei kennen wir einerseits die Materialdicken $l_\mathrm{S} = 1.0\,\mathrm{mm}$ und $l_\mathrm{A} = 4.0\,\mathrm{mm}$, sowie die Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_\mathrm{S} = 80\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$ (Stahl besteht im Wesentlichen aus Eisen!) und $\lambda_\mathrm{A} = 239\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}$. Andererseits wissen wir, dass die Gesamttemperaturdifferenz $\Delta\vartheta = 115\,^\circ\mathrm{C}$ die Summe der Temperaturdifferenzen über der Stahl- und der Aluminiumschicht zusammen sein muss:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_\mathrm{S} + \Delta\vartheta_\mathrm{A}$$

Somit haben wir zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $\Delta\vartheta_\mathrm{S}$ und $\Delta\vartheta_\mathrm{A}$:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\lambda_\mathrm{S}\cdot\Delta\vartheta_\mathrm{S}}{l_\mathrm{S}} = \frac{\lambda_\mathrm{A}\cdot\Delta\vartheta_\mathrm{A}}{l_\mathrm{A}} \\ \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_\mathrm{S} + \Delta\vartheta_\mathrm{A} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \ldots$$

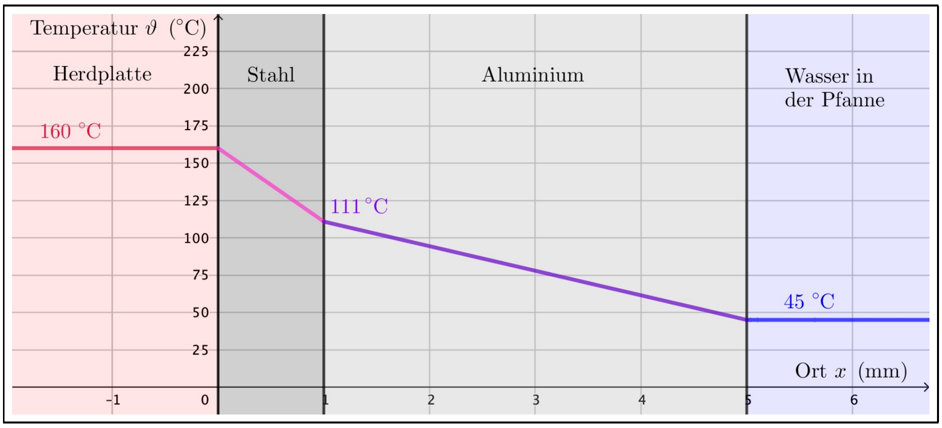
$$\Rightarrow \quad \Delta\vartheta_\mathrm{S} = \frac{l_\mathrm{S}\cdot\lambda_\mathrm{A}}{l_\mathrm{S}\cdot\lambda_\mathrm{A} + l_\mathrm{A}\cdot\lambda_\mathrm{S}} \cdot \Delta\vartheta \quad \text{und} \quad \Delta\vartheta_\mathrm{A} = \frac{l_\mathrm{A}\cdot\lambda_\mathrm{S}}{l_\mathrm{S}\cdot\lambda_\mathrm{A} + l_\mathrm{A}\cdot\lambda_\mathrm{S}} \cdot \Delta\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vartheta_\mathrm{S} = \frac{1.0\,\mathrm{mm}\cdot 239\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}}{1.0\,\mathrm{mm}\cdot 239\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} + 4.0\,\mathrm{mm}\cdot 80\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}} \cdot 115\,^\circ\mathrm{C} = \underline{49.2\,^\circ\mathrm{C}}$$

$$\text{und} \quad \Delta\vartheta_\mathrm{A} = \frac{4.0\,\mathrm{mm}\cdot 80\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}}{1.0\,\mathrm{mm}\cdot 239\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} + 4.0\,\mathrm{mm}\cdot 80\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}} \cdot 115\,^\circ\mathrm{C} = \underline{65.8\,^\circ\mathrm{C}}$$

Die Resultate für $\Delta\vartheta_\text{S}$ und $\Delta\vartheta_\text{A}$ sind recht gut verständlich: Die Gesamttemperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ wird aufgeteilt. Dabei ist die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_\text{S}$ über dem Stahl umso grösser, je dicker die Stahlschicht ist (l_S) und je besser das Aluminium die Wärme leitet (λ_A). Umgekehrt ist die Temperaturdifferenz über dem Aluminium umso grösser, je dicker das Aluminium ist (l_A) und je besser der Stahl leitet (λ_S).

Mit diesen Rechenresultaten können wir den Temperaturverlauf skizzieren:



Die Kontaktfläche zwischen dem Stahl und dem Aluminium liegt folglich auf etwa 111 °C und die Temperaturgradienten in den beiden Materialien sind gegeben durch:

$$\frac{\Delta\vartheta_\text{S}}{l_\text{S}} = \frac{49.2\,°\text{C}}{1.0\,\text{mm}} = \underline{49.2\,\frac{°\text{C}}{\text{mm}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Delta\vartheta_\text{A}}{l_\text{A}} = \frac{65.8\,°\text{C}}{4.0\,\text{mm}} = \underline{16.5\,\frac{°\text{C}}{\text{mm}}}$$

4. *Isolationsmassnahmen*

   Zunächst vereinfache ich die Berechnung der Wärmestromdichte mittels der Wärmeleitungsgleichung wie folgt:

$$\frac{Q}{A\cdot\Delta t} = \frac{\frac{Q}{\Delta t}}{A} = \frac{\frac{\lambda\cdot A\cdot\Delta\vartheta}{l}}{A} = \frac{\lambda\cdot\Delta\vartheta}{l}$$

   Damit berechne ich die beiden Wärmestromdichten mit den Wärmeleitfähigkeitswerten für Fensterglas (Skript: $\lambda_\text{G} = 0.8\,\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot°\text{C}}$) und für Holz (vgl. Aufgabe 1: $\lambda_\text{H} = 0.13\,\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot°\text{C}}$):

$$\left(\frac{Q}{A\cdot\Delta t}\right)_\text{G} = \frac{\lambda_\text{G}\cdot\Delta\vartheta_\text{G}}{l_\text{G}} = \frac{0.8\,\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot°\text{C}}\cdot 1.5\,°\text{C}}{0.0060\,\text{m}} = \underline{\underline{200\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

$$\left(\frac{Q}{A\cdot\Delta t}\right)_\text{H} = \frac{\lambda_\text{H}\cdot\Delta\vartheta_\text{H}}{l_\text{H}} = \frac{0.13\,\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot°\text{C}}\cdot 21\,°\text{C}}{0.17\,\text{m}} = \underline{\underline{16\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

   Bei den Fensterscheiben besteht somit eine grosse Verbesserungsmöglichkeit für die Isolation des Hauses. Die relativ dünnen Einfachfenster lassen die Wärme viel zu gut passieren. (Daher sind sie an der Innenseite auch richtig kalt, was den geringen Temperaturunterschied über ihnen erklärt.)

5. *Wärmestrom beim Haarföhn*

   Die erste Frage muss sein, wie viel Luftmasse pro Sekunde im Föhn erwärmt und aus ihm ausgestossen wird. Wenn ich das Gefühl des Luftstroms mit dem Gefühl des Fahrtwindes vergleiche, den ich spüre, wenn ich eine Hand aus dem Auto halte, so schätze ich die Geschwindigkeit dieser Luft auf vielleicht $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Durchmesser des Föhnrohres beträgt z.B. 4 cm, was einer Querschnittsfläche von $12.6\,\text{cm}^2 = 0.00126\,\text{m}^2$ entspricht. Daraus folgt für den Volumenstrom der Luft (= Volumen ΔV, das pro Zeitspanne Δt den Föhn passiert):

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A\cdot v = 0.00126\,\text{m}^2\cdot 12.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.01575\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

   Diesen Volumenstrom $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ können wir mit der Luftdichte in einen Massenstrom $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ umrechnen:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \varrho_\text{Luft}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t} = 1.3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 0.01575\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.020\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Pro Sekunde passiert also eine Luftmasse von etwa $20\,\mathrm{g}$ den Föhn. Dabei wird sie von den Heizdrähten erwärmt, an denen sie vorbeiströmt. Die Leistung dieser Heizdrähte beträgt gemäss Angabe:

$$P_{\text{Heiz}} = 70\,\% \cdot 1400\,\mathrm{W} = \underline{\underline{980\,\mathrm{W}}} = \frac{Q}{\Delta t}$$

Nehmen wir an, dass diese ganze Leistung an die Luft abgegeben wird, so entsprechen diese $980\,\mathrm{W}$ auch gerade dem Wärmestrom der ausgestossenen Föhnluft.

Wir überprüfen rasch, ob sich mit dem berechneten Massestrom ein plausibles Resultat für die Lufttemperatur ergibt: Die sekündliche Luftmenge von $m = 20\,\mathrm{g}$ erhält also eine Wärme von $Q = 980\,\mathrm{J}$. Daraus folgt mit der spezifischen Wärmekapazität von Luft:

$$\Delta\vartheta = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{980\,\mathrm{J}}{0.020\,\mathrm{kg} \cdot 1005\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}} = 49\,^\circ\mathrm{C}$$

Die Luft wird also um etwa $50\,^\circ\mathrm{C}$ erwärmt. Das tönt ganz realistisch und bestätigt somit unsere anfängliche Annahme zur Luftgeschwindigkeit im Föhn.

Schliesslich können wir noch die Wärmestromdichte angeben:

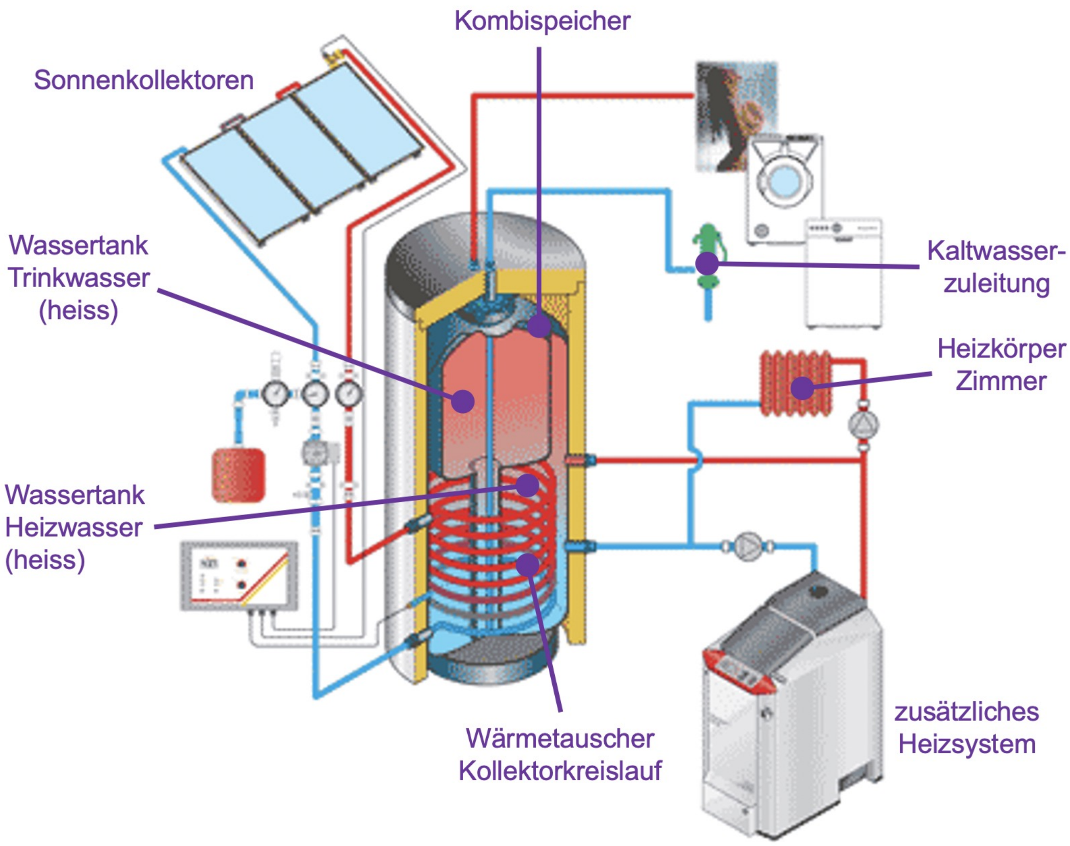
$$\frac{Q}{A \cdot \Delta t} = \frac{\frac{Q}{\Delta t}}{A} = \frac{980\,\mathrm{W}}{0.00126\,\mathrm{m}^2} = 780\,000\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{78\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}}} = \underline{\underline{0.078\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{cm}^2}}}$$

Damit ist die Wärmestromdichte des Föhns doch deutlich kleiner als der im Skript berechnete Wert für eine Heisswasserleitung im Haus ($24\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{cm}^2}$). Auch die Wärmestromdichte des Golfstroms ($1.5\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{cm}^2}$) liegt noch deutlich darüber.

6. *Solare Warmwasserbereitung und Heizungsunterstützung*

   (a) Keine Lösungen. Siehe Internet, z.B. Wikipedia.

   (b) Hier das Bild der Anlage mit entsprechenden Beschriftungen. Der Kombispeicher beinhaltet in dieser Ausführung den Tank für das heisse Heizwasser, in dessen unteren Teil sich der Wärmetauscher des Kollektorkreislaufs und oben der Tank für das heisse Trinkwasser befindet.



(c) Die gelbe Schicht steht für eine gute **Wärmeisolation** der Kombispeichers.

(d) Wir entdecken die verschiedenen Arten des Wärmetransports an folgenden Stellen der Anlage:

Konvektion: Dies ist die omnipräsente Wärmetransportart des Heizsystem. Die Verschiebung von warmem Wasser bringt die innere Energie von einem zu einem anderen Ort, sei es vom Kollektor zum Heizwasserspeicher, vom Heizwasserspeicher zu den Heizungen, vom heissen Trinkwasserspeicher zum Verbraucher (Heisswasserhähne, Duschen, etc.) oder vom zusätzlichen Heizsystem zu den Heizungen.

Die Konvektion ist zusätzlich wichtig, weil sie sich im Heizkreislauf der Zimmerheizungen selber antreibt. Das heisse Wasser ist weniger dicht und steigt drum aus dem Keller zu den Heizkörpern auf. Dort braucht es höchsten Hilfspumpen, v.a. für den Durchfluss durch das zusätzliche Heizsystem.

Im Kombispeicher sammelt sich das Heisswasser oben, was auch als Konvektion verstanden werden kann.

Wärmeleitung: Während die Heisswasserleitungen und der Kombispeicher isoliert sein müssen, um Wärmeleitung zu verhindern, gibt es in der Anlage doch einen Ort, wo die Wärmeleitung enorm erwünscht ist. Dies ist der Wärmetauscher im Innern des Kombispeicher. Der Kollektorkreislauf gibt aufgrund der Wärmeleitung (direkter Kontakt) Wärme an den Heisswassertank ab.

Wärmestrahlung: Natürlich ist der Sonnenkollektor der Ort, der die Wärmestrahlung von der Sonne empfängt. So gewinnt die Anlage einen Grossteil ihrer Energie.

(e) Pro 10 Minuten werden 1.3 Liter Wasser um $\Delta\vartheta = 73\,^\circ\mathrm{C} - 25\,^\circ\mathrm{C} = 48\,^\circ\mathrm{C}$ erwärmt. Das entspricht einer Wärmemenge von:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 1.3\,\mathrm{kg} \cdot 48\,^\circ\mathrm{C} = 261\,000\,\mathrm{J}$$

Damit folgt für den Wärmetransport im Kollektorkreislauf:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{261\,000\,\mathrm{J}}{600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{435\,\mathrm{W}}}$$

Das ist ein ziemlich beträchtlicher Wert!