Übungen zur Akustik – Lösungen Serie 10

1. *Reine Intervalle $\widehat{=}$ natürliche Frequenzverhältnisse!*

   (a) Zur reinen grossen Sexte gehört ein Frequenzverhältnis von $5:3$. Daraus folgt für die Grundfrequenz des Tons fis, der eine grosse Sexte über dem A liegt:

   $$f_{0,\text{fis}} = \frac{5}{3} \cdot f_{0,\text{A}} = \frac{5}{3} \cdot 220\,\text{Hz} = \underline{\underline{367\,\text{Hz}}}$$

   (b) Ja, auch mit reinen Intervallen ergibt eine Quarte auf einer Quinte die Oktave. Hat der Anfangston die Grundtonfrequenz f_0, so folgt für die Quinte darüber:

   $$f_{0,\text{Quinte}} = \frac{3}{2} \cdot f_0$$

   Gehen wir von diesem Ton aus eine Quarte nach oben, so folgt:

   $$f_{0,\text{Quinte+Quarte}} = \frac{4}{3} \cdot f_{0,\text{Quinte}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot f_0 = 2 \cdot f_0 = f_{0,\text{Oktave}}$$

   (c) Man sieht bereits aufgrund der Primzahlfaktorisierungen, dass die reine Oktave nicht aus zwölf reinen Halbtonschritten bestehen kann, denn:

   $$\text{Kleine Sekunde:} \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{16}{15} = \frac{2^4}{3 \cdot 5}$$

   Die Aneinanderreihung mehrerer kleiner Sekunden bedeutet die Multiplikation mehrerer solcher Faktoren. Durch diese Multiplikationen können keine neuen Kürzungsmöglichkeiten entstehen. Dies wäre aber nötig, wenn am Ende einfach der Faktor 2 für den Oktavsprung herauskommen soll.

   Berechnen wir nun näherungsweise, welcher Faktor denn effektiv durch zwölf reine Sekunden entsteht:

   $$\left(\frac{16}{15}\right)^{12} \approx 2.169$$

   Das ist ganz deutlich grösser als der Faktor 2. Die natürliche oder reine kleine Sekunde ist also klar **zu gross**, als dass damit die Oktave in zwölf gleiche Schritte unterteilt werden könnte.

   (d) Das Zahlenverhältnis der reinen kleinen Sekunde beträgt:

   $$16 : 15 \approx 1.067$$

   Bei der wohltemperierten Stimmung müssen 12 Halbtonschritte den Faktor 2 ergeben. Daraus können wir auf den Faktor x des einzelnen Halbtonschrittes schliessen:

   $$x^{12} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[12]{2} \approx \underline{1.05946} < 1.067$$

   Die wohltemperierte Sekunde müsste demnach folgendermassen in Fünfzehnteln geschrieben werden:

   $$15 \cdot 1.05946 \approx 15.892 \quad \Rightarrow \quad \text{Wohltemperierte Sekunde:} \quad \underline{\underline{\frac{f_2}{f_1} \approx \frac{15.892}{15}}}$$

2. *Die Frequenzen einer Klaviersaite*

   (a) Die Klaviersaite ist beidseitig eingespannt. Bei derartigen Randbedingungen ist die Wellenlänge λ_0 der Grundschwingung gerade das Doppelte der Saitenlänge l:

   $$\lambda_0 = 2l = 2 \cdot 1.62\,\text{m} = 3.24\,\text{m}$$

   Aus der Wellengleichung folgt daraus für die Grundtonfrequenz:

   $$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{1711\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3.24\,\text{m}} = \underline{\underline{528\,\text{Hz}}}$$

   Zu den Oberschwingungen der Saite gehören lauter natürliche Vielfache von f_0:

   $$f_n = \underline{\underline{(n+1) \cdot f_0}} = \underline{\underline{(n+1) \cdot 528\,\text{Hz}}} \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Die gehörte Tonhöhe wird durch die Grundtonfrequenz f_0 vorgegeben. Gehen wir davon aus, dass der Kammerton a (= eingestrichenes a') bei diesem Klavier mit $440\,\mathrm{Hz}$ identifiziert wurde, so erhalten wir für das Frequenzverhältnis zwischen diesem Ton und dem Grundton der Saite:

$$\frac{528\,\mathrm{Hz}}{440\,\mathrm{Hz}} = 1.2 = \frac{6}{5}$$

Damit liegt der Ton dieser Klaviersaite eine kleine Terz über dem Kammerton. D.h., es handelt sich um ein c. (Da dieses c in der üblichen Nummerierung der nächst höheren Oktave zugerechnet wird, bezeichnet man es als das zweigestrichene c".)

Prüfungsinfo: An der Physikprüfung wird nicht verlangt diesen Ton als ein c zu bezeichnen – geschweige denn als zweigestrichenes c. Dass der Kammerton a mit $440\,\mathrm{Hz}$ angesetzt wird, sollte man aber wissen. Demnach kann man aufgrund der Tabelle in Aufgabe 1 der Übungsserie auch angeben, dass es sich um einen Ton handelt, der eine kleine Terz höher als dieses Stimmgabel-a liegt.

3. *Rund ums Cello*

(a) Bildet man jeweils die Verhältnisse der benachbarten Frequenzen, so erkennt man:

$$\frac{98.0}{65.4} \approx \frac{147}{98.0} \approx \frac{220}{147} \approx 1.5 = \frac{3}{2}$$

Aus der Intervalltabelle erfahren wir, dass dieses Frequenzverhältnis zu einer Quinte gehört. Die Töne der vier Violinsaiten besitzen also **Quintabstände**.

(b) Beim Stimmen verändert man die **Spannung** einer Saite und variiert damit die **Ausbreitungs**- resp. **Wellengeschwindigkeit** c in ihr: Je grösser die Spannung, desto grösser ist c.

Aufgrund der Gleichung $c = \lambda \cdot f$ ergibt sich daraus ein direkter Einfluss auf die erzeugte Tonhöhe: Bei vorgegebener Saitenlänge l ist die Wellenlänge $\lambda_0 = 2l$ des **Grundtons** fix. Somit muss bei grösserer Wellengeschwindigkeit c auch die zum Grundton gehörende **Frequenz** f_0 grösser werden: $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$.

Je stärker die Saite gespannt ist, umso höher tönt sie also.

(c) **Argumentation 1:** Jede Schwingung, die die Saite ausführen soll, hat deren **Randbedingungen** zu erfüllen. Dort, wo die Saite eingespannt ist, kann sie sich ja nicht bewegen. D.h., eine Sinusfunktion, welche die **ortsabhängige Amplitude** einer Saitenschwingung beschreiben soll, muss am Anfang und am Ende der Saite je eine Nullstelle aufweisen.

Dadurch sind auf der Saite nur ganz bestimmte **Wellenlängen** λ_n zulässig (vgl. Aufgabe (d)):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n+1} \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zu jeder solchen Wellenlänge gehört wegen $c = \lambda_n \cdot f_n$ eine ganz bestimmte **Frequenz** $f_n = (n+1) \cdot f_0$. Die Frequenzen f_n weisen **regelmässige Frequenzabständen** auf. Wir sprechen von einem **diskreten Frequenzspektrum** und sagen, die **Eigenschwingungen** des Systems haben die **Eigenfrequenzen** f_n.

Argumentation 2: Beim Anspielen einer Saite erzeuge ich alle möglichen Wellen unterschiedlicher Wellenlänge λ, die aufgrund der starken Spannung der Saite auf dieser mit einer enormen Geschwindigkeit hin und her laufen.

Damit sich eine Welle mit bestimmter Wellenlänge bei diesem hin und her Laufen aber nicht selber **destruktiv auslöscht**, muss die Rückkehr eines Wellenberges zum Anregungsort genau mit dem Aussenden eines weiteren Wellenberges übereinstimmen. Das bedeutet, die Frequenz f muss genau zu Saitenlänge l und Wellengeschwindigkeit c passen, damit eine konstruktive Interferenz entsteht und sich die Welle erhalten kann.

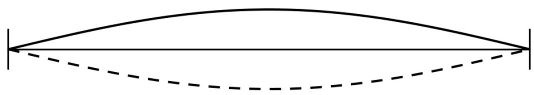
Die zurückgelegte Strecke bei einmaligem hin und her Laufen beträgt $2l$. Dafür braucht es die Zeit $t = \frac{2l}{c}$ und diese Zeit muss einem Vielfachen der Periode einer sich selbst erhaltenden Schwingung entsprechen. Daraus erhalten wir die folgende Gleichung für die Eigenperioden T_n aller möglichen Eigenschwingungen:

$$(n+1) \cdot T_n = \frac{2l}{c} \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

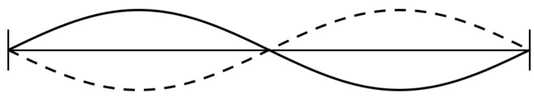
Auch diese Überlegung führt mit $f_n = \frac{1}{T_n}$ und $c = \lambda_n \cdot f_n$ auf ganz bestimmte Eigenfrequenzen f_n mit Wellenlängen λ_n..

(d) **Bemerke:** Die n-te Oberschwingung weist n Knotenpunkte auf!

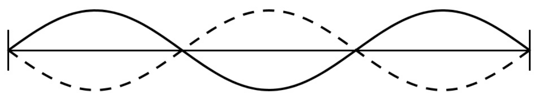
Grundschwingung $n = 0$



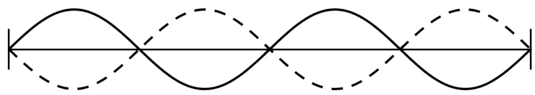
1. Oberschwingung $n = 1$



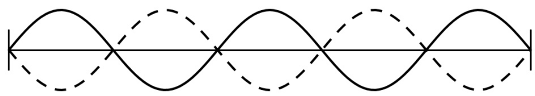
2. Oberschwingung $n = 2$



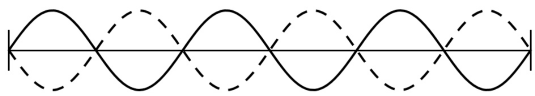
3. Oberschwingung $n = 3$



4. Oberschwingung $n = 4$



5. Oberschwingung $n = 5$



(e) Die Saitenlänge ist laut Vorgabe $l = 690\,\mathrm{mm}$. Eine Wellenlänge besteht stets aus einem Wellenberg und einem Wellental. Somit folgt aus den Graphen oben:

$$n = 0: \quad \lambda_0 = 2 \cdot l = \underline{\underline{1380\,\mathrm{mm}}}$$

$$n = 1: \quad \lambda_1 = l = \underline{\underline{690\,\mathrm{mm}}} = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$n = 2: \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot l = \underline{\underline{460\,\mathrm{mm}}} = \frac{\lambda_0}{3}$$

$$n = 3: \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot l = \underline{\underline{345\,\mathrm{mm}}} = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$n = 4: \quad \lambda_4 = \frac{2}{5} \cdot l = \underline{\underline{276\,\mathrm{mm}}} = \frac{\lambda_0}{5}$$

$$n = 5: \quad \lambda_5 = \frac{1}{3} \cdot l = \underline{\underline{230\,\mathrm{mm}}} = \frac{\lambda_0}{6}$$

Diese Wellenlängen sind alles andere als willkürlich. Sie lassen sich durch eine sehr einfache Gleichung in Abhängigkeit von n ausdrücken:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n+1} = \frac{\lambda_0}{n+1}$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich leicht überzeugen, wenn man jede der unter (d) gezeigten Saiten verdoppelt. In der doppelten Länge $2l$ hat stets eine ganze Anzahl Wellenlängen Platz, bei der Grundschwingung eine, bei der 1. Oberschwingung zwei, etc.

(f) Die Grundtonfrequenz der d-Saite ist uns bekannt: $f_\mathrm{d} = 147\,\mathrm{Hz}$. Die Frequenzen sämtlicher Eigenschwingungen der Saite sind ganzzahlige Vielfache dieser Grundtonfrequenz:

$$f_n = (n+1) \cdot f_\mathrm{d}$$

Somit ergibt sich für die niedrigsten sechs Schwingungsfrequenzen:
$f_0 = \underline{\underline{147\,\mathrm{Hz}}}$, $f_1 = \underline{\underline{294\,\mathrm{Hz}}}$, $f_2 = \underline{\underline{441\,\mathrm{Hz}}}$, $f_3 = \underline{\underline{588\,\mathrm{Hz}}}$, $f_4 = \underline{\underline{735\,\mathrm{Hz}}}$, $f_5 = \underline{\underline{882\,\mathrm{Hz}}}$.

(g) Mit den beiden Grundtonfrequenzen $f_\mathrm{C} = 65.4\,\mathrm{Hz}$ und $f_\mathrm{a} = 220\,\mathrm{Hz}$ und der auf beiden Saiten gleich grossen Grundtonwellenlänge $\lambda_0 = 1380\,\mathrm{mm} = 1.38\,\mathrm{m}$ lassen sich mit der Wellengleichung sofort die Wellengeschwindigkeiten bestimmen:

$$c_\mathrm{C} = \lambda_0 \cdot f_\mathrm{C} = 1.38\,\mathrm{m} \cdot 65.4\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{90.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

$$c_\mathrm{a} = \lambda_0 \cdot f_\mathrm{a} = 1.38\,\mathrm{m} \cdot 220\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{304\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

(h) i. Die Klangfarbe eines Tones wird durch seine Obertonzusammensetzung festgelegt. D.h., es kommt darauf, wie stark Grund- und Obertonfrequenzen relativ zueinander in der ausgesandten Schallwelle vorhanden sind.

ii. Je nachdem, wo die Saite angestrichen wird, kann sich die Obertonzusammensetzung und damit die Klangfarbe verändern.
Der Strich kann unterschiedliche Qualitäten aufweisen (viel Druck $\leftrightarrow$ wenig Druck, schneller Strich $\leftrightarrow$ langsamer Strich). Auch dies hat einen Einfluss auf die Klangfarbe.
Die Saite kann anstatt mit dem Bogen gestrichen auch mit dem Finger gezupft werden.

(i) Zu einer grossen Sexte gehört das Frequenz- resp. Saitenlängenverhältnis $5:3$. Die leere Saite besitzt eine Länge von $690\,\mathrm{mm}$. Daraus folgt für die Saitenlänge der Sexte darüber:

$$l_{\text{Sexte}} = \frac{3}{5} \cdot l_{\text{leer}} = \frac{3}{5} \cdot 690\,\mathrm{mm} = \underline{\underline{414\,\mathrm{mm}}}$$

Merke: Das zu einem Intervall gehörende Frequenzverhältnis beschreibt umgekehrt auch gerade das Saitenlängenverhältnis. Je höher der Ton, desto höher die Frequenz, desto kürzer die Saite.

(j) Die leere Saite ist immer noch $690\,\mathrm{mm}$ lang. Dann ergibt sich das Saitenlängenverhältnis zur abgeklemmten Saite zu:

$$\frac{l_{\text{neu},1}}{l_{\text{leer}}} = \frac{518\,\mathrm{mm}}{690\,\mathrm{mm}} = 0.751 \approx 0.75 = \frac{3}{4}$$

Somit hören wir eine **Quarte** als Intervallsprung.

Es spielt gar keine Rolle, auf welcher der vier Saiten diese neue Saitenlänge angespielt wird. Das Intervall zur leeren Saite ist stets diese Quarte.

(k) Die neue Saitenlänge beträgt nun $l_{\text{neu},2} = 518\,\mathrm{mm} - 104\,\mathrm{mm} = 414\,\mathrm{mm}$. Wiederum ermitteln wir das Saitenlängenverhältnis:

$$\frac{l_{\text{neu},2}}{l_{\text{neu},1}} = \frac{414\,\mathrm{mm}}{518\,\mathrm{mm}} = 0.799 \approx 0.8 = \frac{4}{5}$$

Somit haben wir hier eine **grosse Terz** gehört.

(l) Das zweigestrichene a liegt zwei Oktaven über dem Grundton der leeren Saite. D.h., die Saitenlänge musste zweimal halbiert, also geviertelt werden:

$$\frac{l_{\text{a}''}}{l_{\text{leer}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad l_{\text{a}''} = \frac{1}{4} \cdot l_{\text{leer}} = \frac{1}{4} \cdot 690\,\mathrm{mm} = 172.5\,\mathrm{mm}$$

Ausgehend von diesem Ton soll ein Halbtonschritt (= kleine Sekunde) nach oben gegangen werden, d.h., die Saite muss um $\frac{1}{16}$ verkürzt werden:

$$\text{Fingerverschiebung} = \frac{1}{16} \cdot 172.5\,\mathrm{mm} = 10.8\,\mathrm{mm} \approx \underline{\underline{1.1\,\mathrm{cm}}}$$

Das sollte man z.B. mit der Dicke eines "Fingerbeeris" vergleichen, dann hat man eine erste Ahnung, warum das Treffen eines solch hohen Tones auf dem Cello so schwierig ist.

4. *Funktionsansätze*

(a) Die **ungedämpfte Schwingung** eines Federpendels wird in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben durch die Funktion:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

A = **Amplitude** = Ausschlagsstärke der Schwingung
= Distanz zwischen mittlerer Lage und maximalem Ausschlag

ω = **Kreisfrequenz**
= Winkelgeschwindigkeit für die Sinusschwingung, durch die die Schwingung beschrieben wird

T = **Schwingungsperiode** = Dauer eines einzelnen Schwingungszyklus

f = **Schwingungsfrequenz** = Anzahl Schwingungszyklen pro Zeitspanne

Die ungedämpfte Schwingung eines Federpendels ist prototypisch für einen sogenannten **harmonischen Oszillator**. Viele schwingende Objekte können in erster Näherung durch eine solche Schwingung beschrieben werden. Es ist auch für die klassische und für die Quantenmechanik ein wiederkehrendes Beispiel, an dem elementare Überlegungen gut illustriert werden können.

Auch innerhalb der Akustik kommt diese ungedämpfte Schwingung gleich wieder vor als Teil von komplexeren Funktionen.

(b) Die **gedämpfte Schwingung** eines Federpendels beschreiben wir in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion:

$$h(t) = \underbrace{A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}}_{=A(t)} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$A_0 =$ **Anfangsamplitude** = Ausschlagsstärke zum Zeitpunkt $t = 0$

$A(t) =$ **Zeitabhängige Amplitude**
= Beschreibung der Abnahme der Ausschlagsstärke der Schwingung

$T_{1/2} =$ **Halbwertzeit der Schwingung**
= Zeitspanne, in der sich die Amplitude des Schwingung einmal halbiert

(c) Für die **Schwebung** ergibt sich aus der Addition der beiden einzelnen sinusartigen Schalldruckschwankungen mittels Additionstheoreme:

$$h(t) = \underbrace{A \cdot \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\, t\right)}_{=A(t)} \cdot \sin(\bar{\omega} t) \qquad \text{mit} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ , \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \ , \quad \omega_{1/2} = 2\pi f_{1/2}$$

$A(t) =$ **Zeitabhängige Amplitude** (erzeugt das lauter und leiser Werden)

$\Delta\omega =$ **Kreisfrequenzdifferenz** zwischen der schnelleren und der langsameren Einzelschwingung

$\bar{\omega} =$ **Mittlere Kreisfrequenz** der schnelleren und der langsameren Einzelschwingung

$\omega_{1/2} =$ **Kreisfrequenzen** der beiden Einzelschwingungen

$f_{1/2} =$ **Frequenzen** der beiden Einzelschwingungen

Bei der Überlagerung zweier Sinustöne mit nahezu gleichen Frequenzen f_1 und f_2 entsteht ein Schwebungsphänomen. Das ist ein lauter und leiser werdender Ton, dessen Tonhöhe der mittleren Frequenz der beiden Einzeltöne entspricht.
Die zeitabhängige Amplitude $A(t)$ ist eine sinusartige Schwankung, deren Kreisfrequenz der Differenz der Kreisfrequenzen der beiden Einzelschwingungen entspricht. Der wahrgenommene Ton wird durch diese zeitabhängige Amplitude ständig lauter und wieder leiser, wobei die Schwebungsfrequenz $\Delta f_{\text{Schwebung}}$ dieser Lautstärkenschwankung doppelt so gross ist wie die mathematische Schwebungsfrequenz $\Delta f = f_2 - f_1$, denn bei jedem Wellenberg und bei jedem Wellental der Einhüllenden $A(t)$ wird es laut, also eben zweimal pro Periode.

(d) Die auf einem Seil **laufende Welle** wird mathematisch beschrieben durch:

$$h(x,t) = A \cdot \sin(kx \mp \omega t) \qquad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$A =$ **Amplitude**

$k =$ **Wellenzahl** = Anzahl rad (Winkelgrösse) pro Meter

$\omega =$ **Kreisfrequenz**

$T =$ **Periode** = Zeitabstand zwischen zwei Wellenbergen

$f =$ **Frequenz** der Welle = Frequenz, mit der die Welle ausgesandt wird
= Frequenz, mit der die Welle an einem Ort vorbeikommt

Die Funktion $h(x,t)$ beschreibt die Auslenkung des Seils aus der Ruhelage und zwar an jeder Stelle x und zu jedem Zeitpunkt t. Mit dem Minuszeichen läuft die Welle in die positive Richtung der x-Achse, mit dem Pluszeichen entsprechend in die negative Richtung.

(e) Zur n-ten **stehenden Welle** auf einer Instrumentensaite der Länge l gehört folgende Funktion:

$$h_n(x,t) = \underbrace{A_n \cdot \sin(k_n x)}_{=A_n(x)} \cdot \sin(\omega_n t) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{und} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = 2\pi f_n \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\text{wobei} \qquad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = 2l \qquad \text{und} \qquad f_n = (n+1)\cdot f_0 \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{c}{2l}$$

$n = 0,1,2,3,\ldots =$ **Index** $\in \mathbb{N}_0 =$ Nummerierung der Eigenschwingungen der Saite

$l =$ **Länge der Saite**

$c =$ **Wellengeschwindigkeit auf der Saite**

$A_n(x) =$ **Ortsabhängige Amplitude** $=$ Funktion von x (enthält die Knotenpunkte!)

$A_n =$ **Amplitude** der ortsabhängigen Amplitude der n-ten Eigenschwingung

$k_n =$ **Wellenzahl** der ortsabhängigen Amplitude der n-ten Eigenschwingung

$\lambda_n =$ **Wellenlänge** der n-ten Eigenschwingung

$\lambda_0 = 2l =$ **Wellenlänge** der Grundschwingung

$\omega_n =$ **Kreisfrequenz** der n-ten Eigenschwingung

$T_n =$ **Periode** der n-ten Eigenschwingung

$f_n =$ **Frequenz** der n-ten Eigenschwingung $=$ n-te **Eigenfrequenz**

$f_0 =$ **Grundfrequenz** $=$ Frequenz der Grundschwingung

Bei ganz bestimmten Anregungsfrequenzen (Eigenfrequenzen) schwingt die Saite in Form einer stehenden Welle mit sich nicht bewegenden **Knotenpunkten**. Dabei haben diese möglichen **Eigenschwingungen** lauter Eigenfrequenzen, die natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz f_0 sind.

In der mathematischen Beschreibung enthält der stehenden Welle, $h_n(x,t)$ die ortsabhängige Amplitude $A_n(x)$ die Knotenpunkte der n-ten Oberschwingung als Nullstellen.

Die real angespielte Saite schwingt in Form einer Summe über die unterschiedlich gewichteten Eigenschwingungen $h_n(x,t)$. D.h., die Amplituden A_n sind unterschiedlich gross und legen durch ihre relative Gewichtung die Klangfarbe des Instrumentes fest.

5. *Ein Versuch mit dem Vokal "O"*

(a) Wir erkennen ein sich ständig wiederholendes Muster. Dessen horizontale, also zeitliche Länge entspricht der Grundperiode T_0. Einmal pro Grundperiode gibt es einen hohen Peak (= Ausschlag nach oben), der sich gut als "Zeitmarker" verwenden lässt.

Der hohe Peak ganz links liegt etwa bei $t_1 = 0.005\,\mathrm{s}$. Acht Grundperioden weiter rechts bin ich fast am Ende des gezeigten Diagrammausschnitts angekommen. Der dortige hohe Peak liegt etwa bei $t_2 = 0.058\,\mathrm{s}$. Somit erhalte ich für acht Grundperioden eine Zeitspanne von:

$$8T_0 = t_2 - t_1 = 0.058\,\mathrm{s} - 0.005\,\mathrm{s} = 0.053\,\mathrm{s}$$

Daraus folgt für eine einzelne Grundperiode und für die zugehörige Grundfrequenz:

$$T_0 = \frac{8T_0}{8} = \frac{0.053\,\mathrm{s}}{8} = 0.006625\,\mathrm{s} \qquad \Rightarrow \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.006625\,\mathrm{s}} = 150.94\,\mathrm{Hz} \approx \underline{\underline{150\,\mathrm{Hz}}}$$

Für diese Rechnung habe ich die Dauer möglichst vieler Grundperioden aus dem Diagramm abgelesen, denn bei der anschliessenden Division dividiere ich automatisch auch den Ablesefehler durch die entsprechende Anzahl und erhöhe so die Genauigkeit des errechneten Wertes.

(b) Erhöhe ich die Tonhöhe um eine Oktave, so verdoppelt sich dabei die Grundfrequenz. Mein höher gesungenes "O" hätte dann also eine Grundfrequenz von $f_0 = 2 \cdot 150\,\mathrm{Hz} = 300\,\mathrm{Hz}$.

Ich ermittle das Frequenzverhältnis zu $440\,\mathrm{Hz}$ und versuche es durch ein "möglichst einfaches, natürliches Zahlenverhältnis" auszudrücken:

$$\frac{440\,\mathrm{Hz}}{300\,\mathrm{Hz}} \approx 1.47 \approx 1.5 = \frac{3}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{300\,\mathrm{Hz}}{440\,\mathrm{Hz}} \approx 0.682 \approx 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$$

Damit dürfte in etwa eine $\underline{\underline{\text{Quinte}}}$ zum Kammerton a fehlen.

(c) **Allgemein:** Das zu einem bestimmten Schalldruckdiagramm gehörende Frequenzspektrum zeigt mir, welche Frequenzen in der gesamten Schalldruckschwankung wie stark vertreten sind. Dabei würde das Schalldruckdiagramm zu einer einzelnen Frequenz einer reinen Sinuskurve entsprechen. Das Schalldruckdiagramm muss also stets also Summe aus unterschiedlich stark gewichteten Sinuskurven aufgefasst werden.

Bei einem Klang, den wir als Ton mit bestimmter Tonhöhe und Klangfarbe wahrnehmen, enthält das Frequenzspektrum nur natürliche Vielfache ein- und derselben Grundfrequenz. Wir sehen ein sogenannt **diskretes Frequenzspektrum** mit regelmässig auftretenden Ausschlägen (Peaks) bei einzelnen Frequenzen.

Zur konkreten Aufgabe: Im gezeigten Schalldruckdiagramm erkennen wir, dass insbesondere diejenige Oberschwingung ziemlich ausgeprägt vorhanden sein muss, die innerhalb einer Grundperiode dreimal schwingt, die also die dreifache Grundfrequenz aufweist. Anders gesagt: Die zweite Oberschwingung resp. der dritte Peak von links muss im Frequenzspektrum eine herausragende Stellung haben.

Damit fallen die Frequenzspektren A und D ganz klar aus dem Rennen. B und C hingegen zeigen genau einen sehr ausgeprägten dritten Peak.

Im Frequenzspektrum C ist zudem der sechste Peak, also die fünfte Oberschwingung sehr deutlich vorhanden. Es müsste im Schalldruckdiagramm also auch noch eine doppelt so schnelle Schwingung gut sichtbar sein. Das ist nicht der Fall.

Die Lösung muss somit das $\underline{\underline{\text{Frequenzspektrum B}}}$ sein.