Übungen zur Akustik

Serie 10: Stehende Wellen & Tonerzeugung bei Instrumenten

1. *Reine Intervalle $\widehat{=}$ natürliche Frequenzverhältnisse!*

   Bereits die alten Griechen erkannten, dass zu harmonisch klingenden Intervallen einfache Verhältnisse natürlicher Zahlen gehören. Schlägt man z.B. zwei Saiten an, deren Längen zueinander im Verhältnis $2 : 3$ stehen und die abgesehen von diesem Längenunterschied gleich präpariert sind (gleiches Material, gleiche Spannung), so hört man als Intervall zwischen den beiden gespielten Tönen eine reine Quinte.

   Weil die Grundfrequenz einer klingenden Saite umgekehrt proportional zu ihrer Länge l ist ($f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l}$), können wir das auch so formulieren: Zwei Töne X und Y bilden zusammen ein sogenannt **reines** oder **natürliches Intervall**, wenn ihre Grundtonfrequenzen $f_{0,X}$ und $f_{0,Y}$ einem Verhältnis zweier natürlichen Zahlen entspricht. Je einfacher dieses Zahlenverhältnis ist, desto harmonischer klingt dieses Intervall. Hier eine entsprechende Tabelle:

Intervall	Frequenzverhältnis	Töne, die das Intervall bilden	
Prim	1 : 1	c — c	↑ zunehmend konsonant
Oktave	2 : 1	c — c^1	
Quinte	3 : 2	c^1 — g^1	
Quarte	4 : 3	g^1 — c^2	
große Sexte	5 : 3	g^1 — e^2	
große Terz	5 : 4	c^2 — e^2	
kleine Terz	6 : 5	e^2 — g^2	
kleine Sexte	8 : 5	e^2 — c^3	
kleine Septime	9 : 5	e^2 — d^3	↓ zunehmend dissonant
große Sekunde	9 : 8	c^3 — d^3	
große Septime	15 : 8	c^3 — h^3	
kleine Sekunde	16 : 15	h^3 — c^4	

   (a) Welche Grundfrequenz hat ein Ton, der eine reine grosse Sexte oberhalb eines A's mit einer Grundtonfrequenz von $220\,\mathrm{Hz}$ liegt.

   (b) Im Musikunterricht hast du kapiert: Eine Oktave besteht aus einem Quint- und einem Quartsprung. Stimmt dies auch bezüglich der reinen Intervalle? Erhalte ich also effektiv einen Oktavsprung, wenn ich zuerst eine reine Quinte und dann noch eine reine Quarte nach oben springe?

   (c) Zwölf Halbtonschritte (= kleine Sekunden) ergeben eine Oktave, so zumindest scheint das auf einer Klaviatur zu sein. Stimmt dies rechnerisch auch für reine Intervalle?

   (d) Die Antwort zu (c) lautet offensichtlich: Nein! Die **wohltemperierte** Sekunde des Klaviers ist im Vergleich zur reinen Sekunde "kleiner". Veranschauliche diesen Unterschied! Für die reine Sekunde gilt ja das exakte Zahlenverhältnis $16 : 15$. Welche Zahl müsste bei der wohltemperierten Zahl anstelle der 16 in diesem Zahlenverhältnis stehen? Gib die Antwort mit 3 Nachkommastellen!

2. *Die Frequenzen einer Klaviersaite*

   Eine Klaviersaite sei $162\,\mathrm{cm}$ lang. Beim Stimmen wird sie durch eine Kraft von ca. $1200\,\mathrm{N}$ so stark gespannt, dass die Wellengeschwindigkeit in ihr $1711\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt.

   (a) Welche Grundtonfrequenz und welche Obertonfrequenzen können auf dieser Saite schwingen, wenn sie angeschlagen wird?

   (b) Zu welchem Ton gehört diese Saite?

3. *Rund ums Cello*

Die vier leeren Saiten eines Cellos erzeugen die vier Töne

C mit $f_{\mathrm{C}} = 65.4\,\mathrm{Hz}$,

G mit $f_{\mathrm{G}} = 98.0\,\mathrm{Hz}$,

d mit $f_{\mathrm{d}} = 147\,\mathrm{Hz}$ und

a mit $f_{\mathrm{a}} = 220\,\mathrm{Hz}$.

Alle vier Saiten sind gleich lang, nämlich $690\,\mathrm{mm}$.

Pablo Casals (1876 – 1973)

(a) Welche Intervalle liegen zwischen den vier Tönen?

Hinweis: Diese Frage beantwortest du natürlich bereits aufgrund deiner musiktheoretischen Kenntnisse, weil du zweifelsohne weisst, wie z.B. das Intervall zwischen dem Ton C und dem Ton G heisst. Hier sollst du dich nun aber auch noch "mathematisch" von der Richtigkeit deiner Antwort überzeugen, indem du die Frequenzverhältnisse bildest und mit der Tabelle in Aufgabe 1 dieser Übungsserie vergleichst.

(b) Was passiert beim Stimmen einer Saite? Genauer: Welche Größe verändert man durch das Stimmen und weshalb hat diese Größe einen Einfluss auf die Tonhöhe des Saitenklangs? Argumentiere mitunter auch mathematisch!

(c) Weshalb kann eine eingespannte Saite nur in einer Überlagerung ihrer Eigenschwingungen schwingen? Anders formuliert: Weshalb erzeugt eine eingespannte Saite ein Frequenzspektrum, in welchem Grund- und Obertonfrequenzen in regelmäßigen Frequenzabständen auftreten?

Erläutere in zwei bis drei Sätzen mit passenden Fachausdrücken!

(d) Zeichne die Graphen der ortsabhängigen Amplitudenfunktionen $A_n(x)$ für die Grund- und die ersten fünf Oberschwingungen in die folgenden Vorlagen ein.

Grundschwingung $n = 0$

3. Oberschwingung $n = 3$

1. Oberschwingung $n = 1$

4. Oberschwingung $n = 4$

2. Oberschwingung $n = 2$

5. Oberschwingung $n = 5$

(e) Bestimme mit Hilfe deiner Graphen aus (d) die Wellenlängen λ_n für $n = 0, \ldots, 5$ der Eigenschwingungen auf den Saiten des Cellos.

Gib die Antworten in Millimetern.

(f) Welche Obertonfrequenzen können theoretisch im Ton der leeren d-Saite mitschwingen? Führe mindestens vier Werte an.

(g) Welche Wellengeschwindigkeiten sind auf der C- und auf der a-Saite vorhanden?

(h) Cellistinnen und Cellisten können die Klangfarbe ihres Spiels durch ihre Spieltechnik mit beeinflussen und haben damit mehr Gestaltungsmöglichkeiten.

   i. Erläutere allgemein, wovon die Klangfarbe eines Tones physikalisch abhängt. Hier geht es noch nicht darum, wie die Klangfarbe beim Instrument zustande kommt, sondern erst, welche **Eigenschaften der Schallwelle** in unserer Wahrnehmung die Klangfarbe eines Tones bestimmen (maximal 4 Sätze).

   ii. Gib nun mindestens zwei konkrete Möglichkeiten an, wie die Klangfarbe beim Spielen des Cellos verändert werden kann. Was könnte man ausprobieren?

(i) Eine Cellistin möchte auf der d-Saite ein h spielen, also vom Grundton der leeren Saite eine grosse Sexte nach oben springen. Wie weit vom Steg entfernt muss sie die Saite mit ihren Fingern abdrücken?

(j) Ein Cellist spielt die G-Saite zuerst leer. Dann klemmt er die Saite so ab, dass der schwingende Teil nur noch knapp $51.8\,\mathrm{cm}$ lang ist.

   Welchen Intervallsprung vernehmen wir dabei als Zuhörerinnen und Zuhörer?

(k) Danach verkürzt der Cellist die schwingende Saitenlänge nochmals, und zwar um $10.4\,\mathrm{cm}$.

   Welchen Intervallsprung hören wir hierbei?

(l) Bei Streichinstrumenten besteht eine große Herausforderung darin, die Töne genau zu treffen. Auf den Saiten ist in der Regel nicht angegeben, wo welcher Ton "hockt". Das muss man sich also in jahrelanger Arbeit antrainieren.

   Wie genau muss man denn nun beim Cello-Spiel sein? Nehmen wir an, eine Cellospielerin spiele auf der a-Saite ein sogenannt zweigstrichenes a. Diese Tonhöhe liegt zwei Oktaven über dem Grundton der leeren a-Saite!

   Damit befindet sie sich in den ziemlich obersten Lagen, die auf einem Cello noch normal anspielbar sind. Nun möchte sie einen Halbton (= kleine Sekunde) nach oben rutschen. Um welche Distanz muss sich ihr Finger dazu verschieben?

4. *Funktionsansätze*

Im Laufe unserer akustischen Betrachtungen haben wir verschiedene Schwingungen und Wellen betrachtet. Dabei haben wir eine Handvoll Funktionen zur mathematischen Beschreibung dieser Phänomene kennengelernt. Diese wollen wir hier repetieren.

Notiere zu den im Folgenden beschriebenen Schwingungen und Wellen die zugehörige mathematische Funktion, wobei du jeweils beschreibst, welche Parameter in der Funktion auftreten und welche Bedeutung sie haben. Erläutere ebenfalls, warum die Mathematik zum jeweiligen Phänomen gerade so auszusehen hat!

Bem.: Verwende unbedingt die Parameter k (Wellenzahl) und ω (Kreisfrequenz), wo dies möglich ist. Erläutere aber auch mindestens einmal, wie diese beiden Parametern mit der Wellenlänge λ resp. mit der Frequenz f und mit der Periode T verknüpft sind.

(a) Ungedämpfte Schwingung eines Federpendels.

(b) Gedämpfte Schwingung eines Federpendels.

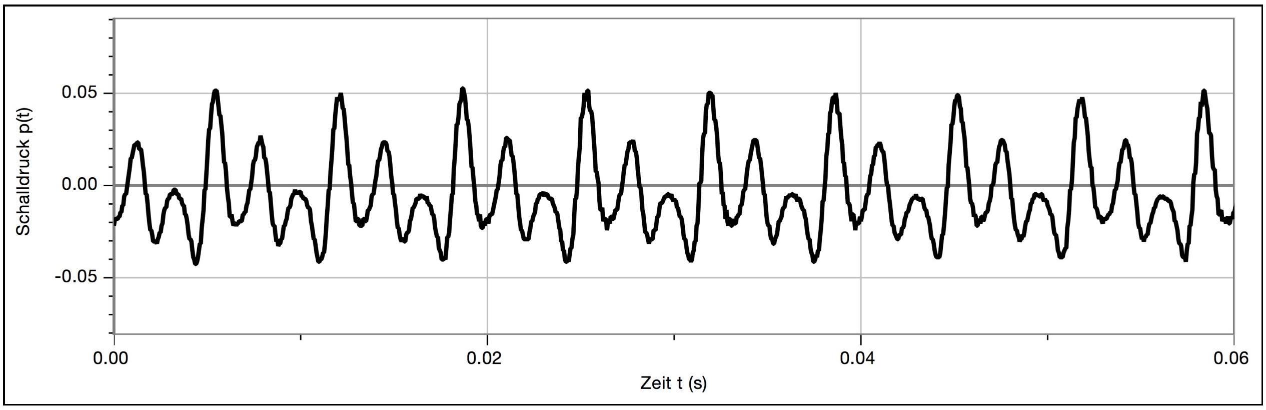
(c) Schwebung zweier Sinustöne mit fast gleichen Frequenzen f_1 und f_2.

(d) Auf einem Seil laufende Sinuswelle.

(e) Stehende Welle auf einer Instrumentensaite.

5. *Ein Versuch mit dem Vokal "O"*

Ich habe den Vokal "O" auf einer bestimmten Tonhöhe in ein Mikrophon gesungen. Dabei hat sich das folgende Schalldruckdiagramm ergeben:



In meinem Versuch betrug die Grundtonfrequenz $150\,\mathrm{Hz}$.

(a) **Wie lässt sich die Grundtonfrequenz aus dem Schalldruckdiagramm "ablesen"?**
Zeige auf, wie man die $150\,\mathrm{Hz}$ möglichst präzise ermittelt.

(b) Der von mir gesungene Ton ist relativ tief. Mein Stimmumfang erlaubt mir das "O" auch eine Oktave höher zu singen. Um welches Intervall liegt dieser höhere Ton immer noch unter dem Kammerton a der Stimmgabel $(440\,\mathrm{Hz})$?

Tipp: Zunächst empfiehlt es sich die Grundfrequenz des oktavierten Tones zu bestimmen.

(c) Unten findest du vier **Frequenzspektren** A bis D. Eines davon gehört zum oben gezeigten Schalldruckdiagramm. Welches?

Begründe deine Antwort hinreichend unter Verwendung passender Fachausdrücke. Am besten startest du deine Argumentation, indem du erläuterst, was ein Frequenzspektrum effektiv zeigt.