Übungen zur Elektrizitätslehre – Lösungen Serie 2

1. *Grundrechnungen zur Spannungsdefinition* $U := \frac{\Delta E}{Q}$

   (a) Die Lampe benötigt pro Sekunde eine elektrische Energie von $15\,\mathrm{J}$. Die Spannung von $230\,\mathrm{V}$ gibt an, dass jedem einzelnen Coulomb Ladung $230\,\mathrm{J}$ Energie mitgegeben werden. Somit können wir bestimmen, welche Ladungsmenge pro Sekunde ihre elektrische Energie in der Lampe abgeben muss:

   $$Q = \frac{\Delta E}{U} = \frac{15\,\mathrm{J}}{230\,\mathrm{V}} = 0.06522\,\mathrm{C} \simeq \underline{\underline{0.065\,\mathrm{C}}} = \underline{\underline{65\,\mathrm{mC}}}$$

   (b) Dieser Ladungsbetrag lässt sich mit der Elementarladung e in eine Anzahl Elektronen umrechnen:

   $$N = \frac{Q}{e} = \frac{0.065\,22\,\mathrm{C}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 4.071 \cdot 10^{17}\,\mathrm{C} \simeq \underline{\underline{4.1 \cdot 10^{17}}}$$

   (c) Die Umstellung der Spannungsdefinition liefert die Antwort:

   $$U = \frac{\Delta E}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = U \cdot Q = 6.0\,\mathrm{V} \cdot 0.0125\,\mathrm{C} = 0.0750\,\mathrm{J} \simeq \underline{\underline{75\,\mathrm{mJ}}}$$

   (d) Aus der gespeicherten Energiemenge von $10\,\mathrm{kJ}$ lässt sich bei bekannter Spannung auf die Ladungsmenge schliessen, die sich vom einen zum anderen Batteriepol bewegen muss, bis diese "leer" ist:

   $$Q = \frac{\Delta E}{U} = \frac{10\,000\,\mathrm{J}}{1.5\,\mathrm{V}} = 6667\,\mathrm{C}$$

   Diese Ladung entspricht einer Elektronenanzahl von:

   $$N = \frac{Q}{e} = \frac{6667\,\mathrm{C}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \simeq \underline{\underline{4 \cdot 10^{22}}} \qquad \text{(nur 1 signifikante Ziffer!)}$$

2. *Zum Verständnis der elektrischen Spannung*

   Die Spannung beschreibt den "energetischen Unterschied" zwischen Schienen und Fahrleitung. Ist z.B. die Fahrleitung positiv geladen und sind die Schienen elektrisch neutral (geerdet), so besitzen die Leitungselektronen in den Schienen mehr elektrische Energie als in der Fahrleitung: pro $1\,\mathrm{C}$ Ladung eben $600\,\mathrm{J}$ Energie ($\Rightarrow 600\,\mathrm{V}$).

   "Volt ist Joule Pro Coulomb." resp. **"Spannung ist Energieumsatz pro Ladung."**

   Öffnet man den Elektronen einen Weg von den Schienen zur Fahrleitung, so entsteht elektrischer Strom. Ladungen streben nach Zuständen möglichst geringer elektrischer Energie ("Spannung = Ursache von Strom"). Fliesst dieser Strom, so wird die elektrische Energie frei, mit welcher das Tram angetrieben wird.

3. *Zum Verständnis der elektrischen Stromstärke*

   (a) Fliesst in einem Kabel ein Strom der Stärke 10 Ampere, so wird jede beliebige Stelle des Kabels pro Sekunde von 10 Coulomb Ladung durchströmt.

   Da der Strom im Kabel auf Ebene der Teilchen für Reibung sorgt, wird das Kabel durch ihn erwärmt. Dies ist einer der Gründe, warum man im Haushalt Sicherungen einbaut, die die Stromstärke begrenzen.

   (b) Die Ladung einer Batterie beschreibt, welche Menge elektrischer Ladung die Batterie insgesamt mit Energie versorgen kann.

   Oder anders: Wie viel Ladung kann der elektrochemische Prozess, mit dem die Batterie läuft, trennen, bis der Prozess abgelaufen ist?

   Oder nochmals anders: Wie lange vermag die Batterie einen Strom mit bestimmter Stromstärke zu erzeugen?

   $1000\,\mathrm{mAh}$ (Milliamperestunden) bedeuten in diesem Zusammenhang: während $1000\,\mathrm{h}$ ein Strom von $1\,\mathrm{mA}$ Stärke, oder während $5\,\mathrm{h}$ ein Strom von $200\,\mathrm{mA}$ Stärke, etc.

   Die Batterieladung beträgt in Coulomb: $Q = I \cdot \Delta t = 1\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{C}$.

4. *Elementare Messungen und Feststellungen im elektrischen Stromkreis*

   Bei noch einigermassen voll geladenen Batterien ergeben sich z.B. folgende Messwerte:

Leerlaufspannung des unbelasteten Batterieblocks:	$U_0 = 2.69\,\mathrm{V}$
Klemmenspannung am belasteten Batterieblock:	$U = 2.67\,\mathrm{V}$
Spannung über der Leuchtdiode:	$U_{\mathrm{LED}} = 2.15\,\mathrm{V}$
Spannung über dem Vorwiderstand:	$U_{\mathrm{R}} = 0.52\,\mathrm{V}$
Summe der beiden Teilspannungen:	$U_{\mathrm{LED}} + U_{\mathrm{R}} = 2.67\,\mathrm{V}$
Stromstärke im LED-Stromkreis:	$I = 34.8\,\mathrm{mA}$

   Man bemerke, dass für die Spannungen gilt: $U = U_{\mathrm{LED}} + U_{\mathrm{R}}$! (Aufgrund der Messungenauigkeiten können die beiden Werte allerdings um bis zu $\pm 0.01\,\mathrm{V}$ voneinander abweichen.)

5. *Rechnungen mit der elektrischen Stromstärke und der elektrischen Spannung*

   (a) Pro Sekunde ergibt sich aus Spannung U und Energieumsatz ΔE eine Ladungsmenge Q von:

   $$Q = \frac{\Delta E}{U} = \frac{3.5\,\mathrm{J}}{4.5\,\mathrm{V}} = 0.778\,\mathrm{C}$$

   Daraus schliessen wir für die Stromstärke I:

   $$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{0.778\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{s}} = 0.778\,\mathrm{A} \simeq \underline{\underline{780\,\mathrm{mA}}}$$

   Für die sekündliche Elektronenanzahl folgt daraus:

   $$N = \frac{Q}{e} = \frac{0.778\,\mathrm{C}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \simeq \underline{\underline{4.9 \cdot 10^{18}}}$$

   (b) Zuerst folgern wir für die sekündliche Ladungsmenge:

   $$Q = I \cdot \Delta t = 7.8\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s} = 7.8\,\mathrm{C}$$

   Aus Energiebedarf und Ladungsmenge lässt sich auf die Spannung schliessen:

   $$U = \frac{\Delta E}{Q} = \frac{1800\,\mathrm{J}}{7.8\,\mathrm{C}} \simeq \underline{\underline{230\,\mathrm{V}}}$$

6. *Auswertungen zum LED-Stromkreis aus Aufgabe 4*

   (a) Für die Spannung über dem Innenwiderstand erhalten wir:

   $$U_{\mathrm{i}} = U_0 - U = 2.69\,\mathrm{V} - 2.67\,\mathrm{V} = \underline{\underline{0.02\,\mathrm{V}}}$$

   (b) Mit meinen Zahlen ergibt sich für die sekündliche Ladungsmenge:

   $$Q = I \cdot \Delta t = 34.8\,\mathrm{mA} \cdot 1\,\mathrm{s} = \underline{\underline{34.8\,\mathrm{mC}}}$$

   Anmerkung zur Genauigkeit: Die Sekunde soll exakt sein. Daher ist die Genauigkeit des Resultats direkt durch die Messgenauigkeit des Multimeters gegeben.

   (c) Für die verschiedenen sekündlichen Energieumsätze im Stromkreis erhalten wir:

   $$\Delta E_0 = U_0 \cdot Q = 2.69\,\mathrm{V} \cdot 34.8\,\mathrm{mC} = 93.61\,\mathrm{mJ} \simeq \underline{\underline{93.6\,\mathrm{mJ}}}$$

   $$\Delta E_{\mathrm{LED}} = U_{\mathrm{LED}} \cdot Q = 2.15\,\mathrm{V} \cdot 34.8\,\mathrm{mC} = 74.82\,\mathrm{mJ} \simeq \underline{\underline{74.8\,\mathrm{mJ}}}$$

   $$\Delta E_{\mathrm{R}} = U_{\mathrm{R}} \cdot Q = 0.52\,\mathrm{V} \cdot 34.8\,\mathrm{mC} = 18.10\,\mathrm{mJ} \simeq \underline{\underline{18.1\,\mathrm{mJ}}}$$

   $$\Delta E_{\mathrm{i}} = U_{\mathrm{i}} \cdot Q = 0.02\,\mathrm{V} \cdot 34.8\,\mathrm{mC} = 0.696\,\mathrm{mJ} \simeq \underline{\underline{0.7\,\mathrm{mJ}}}$$

   Man bemerke die Energieerhaltung innerhalb des Stromkreises: Was die Batterie pro Sekunde reinsteckt, wird im Stromkreis innerhalb einer Sekunde umgesetzt, also: $\Delta E_0 = \Delta E_{\mathrm{LED}} + \Delta E_{\mathrm{R}} + \Delta E_{\mathrm{i}}$.

(d) Für die Leistungen folgt:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{\Delta E_0}{\Delta t} = \frac{93.61\,\mathrm{mJ}}{1\,\mathrm{s}} = 93.61\,\mathrm{mW} \simeq \underline{\underline{93.6\,\mathrm{mW}}} \\
P_{\mathrm{LED}} &= \frac{\Delta E_{\mathrm{LED}}}{\Delta t} = \frac{74.82\,\mathrm{mJ}}{1\,\mathrm{s}} = 74.82\,\mathrm{mW} \simeq \underline{\underline{74.8\,\mathrm{mW}}} \\
P_{\mathrm{R}} &= \frac{\Delta E_{\mathrm{R}}}{\Delta t} = \frac{18.10\,\mathrm{mJ}}{1\,\mathrm{s}} = 18.10\,\mathrm{mW} \simeq \underline{\underline{18.1\,\mathrm{mW}}} \\
P_{\mathrm{i}} &= \frac{\Delta E_{\mathrm{i}}}{\Delta t} = \frac{0.02\,\mathrm{mJ}}{1\,\mathrm{s}} = 0.02\,\mathrm{mW} \simeq \underline{\underline{0.02\,\mathrm{mW}}}
\end{aligned}$$

Auch für die Leistungen gilt die Energieerhaltung: $P_0 = P_{\mathrm{LED}} + P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{i}}$.

(e) Für den Wirkungsgrad des Stromkreises erhalten wir:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{LED}}}{P_0} = \frac{74.82\,\mathrm{mW}}{93.61\,\mathrm{mW}} = 0.7993\,\% = \underline{\underline{79.9\,\%}}$$

(f) Schliesslich berechnen wir noch die Laufzeit mit anfänglich neuen Batterien. Dabei muss man mit den Einheitenvorsätzen aufpassen:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta E}{P_0} = \frac{13\,\mathrm{kJ}}{93.61\,\mathrm{mW}} = \frac{13\,000\,\mathrm{J}}{0.093\,61\,\mathrm{W}} = 138\,874\,\mathrm{s} = 38.6\,\mathrm{h} \simeq \underline{\underline{39\,\mathrm{h}}}$$

Das sind immerhin etwa $1\frac{2}{3}$ Tage.

7. **Zusatzaufgabe:** *Die Driftgeschwindigkeit von Leitungselektronen in Kupfer*

Bei $1.0\,\mathrm{A}$ Stromstärke wird die Querschnittsfläche des Kupferkabels an jeder beliebigen Stelle in jeder Sekunde von $1.0\,\mathrm{C}$ Ladung durchquert. Umgerechnet in eine Anzahl Leitungselektronen ist dies:

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{1.0\,\mathrm{C}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 6.24 \cdot 10^{18}$$

Da in Kupfer pro Atom etwa 1 Leitungselektron ans Elektronengas abgegeben wird, lässt sich diese Elektronenzahl in ein pro Sekunde verschobenes Elektronengasvolumen umrechnen. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis des Atomvolumens $V_{\mathrm{A}} = 1.18 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3$ für Kupfer. Daraus erhalten wir für das Elektronengasvolumen V, welches sich pro Sekunde durch die Querschnittsfläche an einer Stelle des Kupferdrahtes bewegt:

$$V = N \cdot V_{\mathrm{A}} = 6.24 \cdot 10^{18} \cdot 1.18 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3 = 7.36 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \quad \text{(lediglich 7.36 \% eines } \mathrm{mm}^3\text{!)}$$

Bei einem Kabeldurchmesser von $1\,\mathrm{mm}$ ergibt sich nun für die sekündliche Verschiebungsstrecke l:

$$l = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 7.36 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3}{\pi \cdot (0.001\,\mathrm{m})^2} = 9.37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 0.0937\,\mathrm{mm}$$

Die sekündliche Verschiebungsstrecke ist also enorm klein. Rechnen wir diese Geschwindigkeit auf eine Stunde hoch, so ergibt sich:

$$v_e = \frac{l}{\Delta t} = 0.0937\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}} = 0.0937\,\frac{\mathrm{mm}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 337\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{h}} \approx \underline{\underline{3\,\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{h}}}}$$

In Metallkabeln sind die Leitungselektronen also im wortwörtlichen Sinn nicht einmal mit Schneckentempo unterwegs! Dies liegt daran, dass sie durch Stösse gegen die Atomrümpfe eben immer wieder abgebremst werden und dabei kinetische Energie ans Material verlieren (= Ursache für die Joule'sche Wärme).

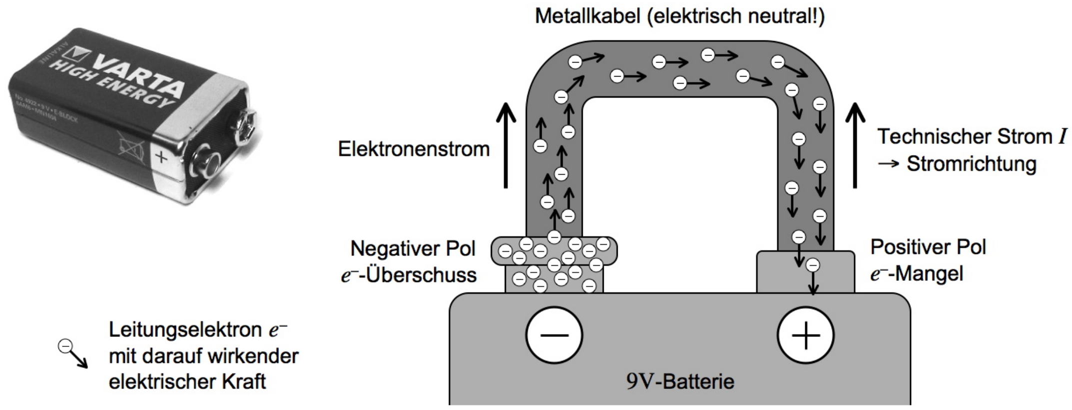
Lassen wir Elektronen durchs Vakuum fliegen, so sieht die Sache ganz anders aus, wie die dritte Zusatzaufgabe (Aufgabe 9) zeigt.

8. **Zusatzaufgabe:** *Elektronenleitung – wohlverstanden!*

Elektronen sind Teilchen, die alle eine einzelne negative Elementarladung tragen. Deshalb herrschen zwischen ihnen **abstossende Coulombkräfte** und sie können sich nicht beliebig nahe kommen.

Drückt nun eine Spannungquelle Elektronen vom einen Ende her in ein Metallkabel hinein, so stossen sich die Leitungselektronen im Kabel aufgrund der Coulombkräfte wie in einer Kettenreaktion weiter. Die Weitergabe dieser Kraftwirkungen erfolgt rasend schnell, nämlich fast mit Lichtgeschwindigkeit. Deshalb beginnen sich die Elektronen im ganzen Kabel praktisch gleichzeitig zu bewegen. Der Strom muss sich nicht zuerst im Kabel "ausbreiten".

Natürlich funktioniert dies nur, wenn die Elektronen am andern Ende des Kabels von der Spannungsquelle aufgenommen werden können. Man könnte übrigens auch von diesem anderen Ende her argumentieren: Dort hat die Spannungsquelle einen positiven Pol, der die Elektronen anzieht. Auf diese Weise würden sich aber im Kabel positive Pole, also Stellen mit einem Elektronenmangel ergeben, wenn nicht von weiter hinten im Kabel Elektronen nachrücken würden. Auf dieser Seite des Kabel muss man also anziehende Coulombkräfte betrachten.



9. **Zusatzaufgabe:** *Elektronenbeschleunigung im Fernseher*

(a) Das Elektron und somit ein Teilchen mit Ladungsbetrag e (Elementarladung) bewegt sich von der negativen Kathode zur positiven Anode. Zwischen diesen geladenen Metallplättchen herrscht eine Spannung von $U = 17\,000\,\mathrm{V}$. Bei der Bewegung des Elektrons muss demnach elektrische Energie freigesetzt werden. Diese beträgt:

$$\Delta E = |q_e| \cdot U = e \cdot U = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 17\,000\,\mathrm{V} = 2.72 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

Das sieht nach ziemlich wenig Energie aus, aber es ist ja auch die Energie von nur einem Elektron!

(b) Verwandelt das Elektron diese Energie vollständig in kinetische Energie (was der Realität entspricht!), so lässt sich daraus die Geschwindigkeit berechnen, mit der es die Elektronenkanone verlässt:

$$\Delta E = E_{\text{kin}} = \frac{m_e \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.72 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}}{9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 7.7 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{77\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}}$$

Das Elektron ist also enorm schnell unterwegs, was eine Folge seiner geringen Masse ist, wie man in der Rechnung sieht.

Übrigens: In der Realität ist der Wert etwas geringer, weil diese Geschwindigkeit bereits in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit ($c \approx 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$) kommt.
Dann gilt die klassische Formel für die kinetische Energie nicht mehr. Sie muss durch eine erweiterte Gleichung aus **Albert Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (SRT)** ersetzt werden. Damit ergibt sich ein tatsächlicher Wert von "nur noch": $v_{\text{relativistisch}} = 69\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.