Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 5

1. *Rollreibung beim Auto*

   (a) **Gleichförmige Fahrt auf horizontaler Strasse**

   i. Unten links siehst du die Kräftesituation des gleichförmig fahrenden Autos. Es wirken fünf Kräfte auf das Auto: Die Gewichtskraft F_G, als Reaktion darauf die Normalkraft F_N der Strasse, die das Auto trägt und so vertikal in Ruhe hält, die Rollreibungskraft F_R und der Luftwiderstand F_L, die der Bewegung entgegenwirken, sowie die Motorenkraft F_M, welche die beiden bremsenden Kräfte gerade kompensiert und so die gleichförmige Fahrt ermöglicht. Für die Kraftgleichungen ergibt sich:

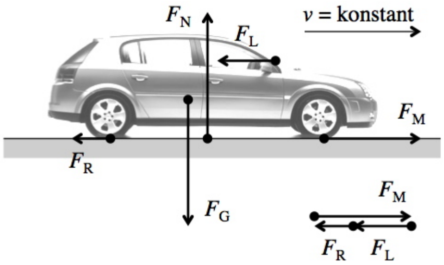
   $$\text{vertikal (Ruhe):}\quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} \qquad \text{und} \qquad \text{horizontal (gfB):}\quad F_\mathrm{M} = F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L}$$

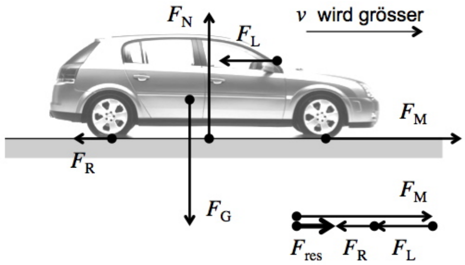
   ii. Um die Motorenkraft zu bestimmen, müssen wir Rollreibung und Luftwiderstand kennen. Letzteres ist bereits der Fall $F_\mathrm{L} = 180\,\mathrm{N}$. Für die Rollreibung auf horizontaler Strasse ergibt sich:

   $$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g = 0.011 \cdot 1350\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 146\,\mathrm{N}$$

   Somit folgt für die Motorenkraft:

   $$F_\mathrm{M} = F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L} = 146\,\mathrm{N} + 180\,\mathrm{N} = 326\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{330\,\mathrm{N}}}$$





   (b) i. Bei der **beschleunigten Bewegung** herrscht in vertikaler Richtung immer noch ein Kräftegleichgewicht. Horizontal dominiert nun die Motorenkraft in Vorwärtsrichtung über die Reibungskraft und den Luftwiderstand (**Aktionsprinzip**). In der Kräfteskizze oben rechts istder Pfeil für F_M länger gezeichnet. Es folgt:

   $$\text{vertikal (Ruhe):}\quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} \qquad \text{und} \qquad \text{horizontal (beschleunigt):}\quad F_\mathrm{res} = F_\mathrm{M} - F_\mathrm{L} - F_\mathrm{R}$$

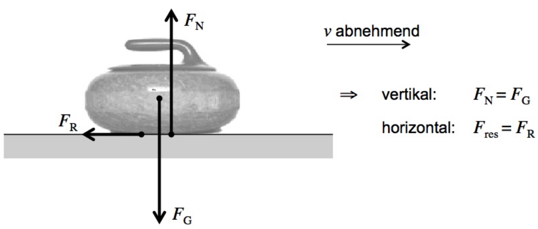
   ii. Laut Newton hängt die resultierende Kraft F_res mit der Beschleunigung a zusammen. Je massiger das Auto und je grösser die Beschleunigung, die es erfahren soll, umso grösser muss die resultierende Kraft sein.
   Mit $F_\mathrm{res} = m \cdot a = 1350\,\mathrm{kg} \cdot 1.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1755\,\mathrm{N}$ ergibt sich für die Motorenkraft:

   $$F_\mathrm{M} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L} = 1755\,\mathrm{N} + 146\,\mathrm{N} + 180\,\mathrm{N} = 2091\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{2100\,\mathrm{N}}}$$

   Übrigens sieht man hier nochmals ganz genau, was der Motor zu tun hat: Er soll erstens beschleunigen ($\rightarrow F_\mathrm{res}$), zweitens muss er aber auch noch die Rollreibung und den Luftwiderstand kompensieren ($\rightarrow F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L}$). Zusammen eben: $F_\mathrm{M} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L}$.

2. *Gleitreibung beim Curlingspiel*

   (a) Für die Kräftesituation finden wir:



   (b) F_res ist gleich F_R. Daraus folgt mit der Gleichung für die Gleitreibung F_R:

   $$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{G} \cdot m \cdot g$$

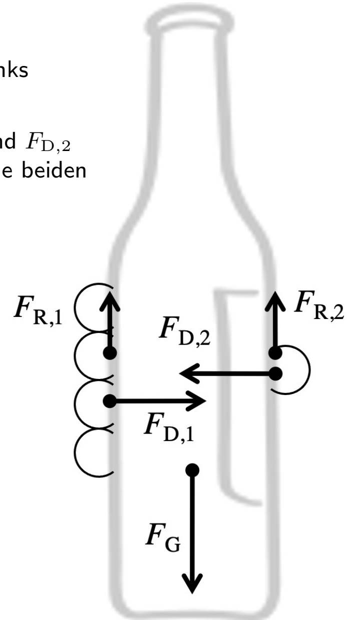
   Laut dem Aktionsprinzip ist $F_\mathrm{res} = m \cdot a$, womit wir auf die Gleitreibungszahl zwischen Stein und Eis schliessen können:

   $$F_\mathrm{res} = \mu_\mathrm{G} \cdot m \cdot g \stackrel{!}{=} m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \mu_\mathrm{G} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{G} = \frac{a}{g} = \frac{0.056\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.00571 \simeq \underline{\underline{0.0057}}$$

   (c) Das Wischen der Curlingspieler/-innen soll kurzfristig die **Gleitreibungszahl verringern**. Dadurch wird die **Reibungskraft verkleinert** und der Stein gleitet erstens etwas weiter, zweitens wird der "Curl"-Effekt, also das seitliche Abdrehen des Steins aufgrund der mitgegebenen Eigenrotation, ebenfalls reduziert.

3. *Haftreibung – Beispiele zum Kennenlernen*

(a) **Gegenstände halten**



i. Die Skizze zeigt, wie der Daumen von rechts und die restlichen Finger von links gegen die Flasche gedrückt werden.

Die Gewichtskraft F_G der Flasche zeigt nach unten. Die Druckkräfte $F_{D,1}$ und $F_{D,2}$ der Finger wirken von beiden Seiten gegen die Flasche. Dadurch entstehen die beiden Haftreibungskräfte $F_{R,1}$ und $F_{R,2}$. Die Flasche ist in Ruhe, also heben sich horizontal die beiden Fingerkräfte auf und vertikal kompensieren die Reibungskräfte die Gewichtskraft:

$$F_{D,1} = F_{D,2} \quad \text{und} \quad F_G = F_{R,1} + F_{R,2}$$

ii. Die beiden Fingerkräfte sind gleich gross und entsprechen der Normalkraft F_N, mit der Finger und Glas gegeneinander gedrückt werden:

$$F_N = F_{D,1} = F_{D,2}$$

In der Folge sind die beiden Haftreibungskräfte ebenfalls gleich gross.
Wir schreiben daher:

$$F_R = F_{R,1} = F_{R,2} \quad \text{und es ist} \quad F_G = 2F_R$$

Für die Haftreibungskraft gilt: $F_R \leq \mu_H \cdot F_N$.

Soll mir die Flasche nicht aus der Hand rutschen, so folgt:

$$F_G = 2F_R \leq 2\mu_H \cdot F_N \quad \Rightarrow \quad F_N \geq \frac{F_G}{2\mu_H} = \frac{m \cdot g}{2\mu_H} = \frac{1.1\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{2 \cdot 0.55} = 9.81\,\text{N}$$

Somit gilt für die minimal notwendigen Druckkräfte der Finger: $F_{D,1,\min} = F_{D,2,\min} \simeq \underline{\underline{9.8\,\text{N}}}$.

(b) **Gehen/Starten/Abbremsen**

i. Die entscheidenden Kräfte sind meine Gewichtskraft F_G nach unten, die Normalkraft F_N des Bodens nach oben und eben die Haftreibungskraft F_R, durch die ich vom Boden in Vorwärtsrichtung gedrückt werde, wenn ich ihn in die Gegenrichtung wegzudrücken versuche.

ii. Gemäss Skizze ist $F_{res} = F_R$. D.h., die Haftreibung F_R muss gerade den für F_{res} notwendigen Betrag aufweisen:

$$F_R = F_{res} = m \cdot a = 86\,\text{kg} \cdot 2.9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 249\,\text{N} \simeq \underline{\underline{250\,\text{N}}}$$

iii. Aus der Ungleichung für die Haftreibungskraft folgt für die Mindesthaftreibungszahl:

$$F_R \leq \mu_H \cdot F_N = \mu_H \cdot F_G = \mu_H \cdot m \cdot g \quad \Rightarrow \quad \mu_H \geq \frac{F_R}{m \cdot g} = \frac{249\,\text{N}}{86\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0.2951 \simeq \underline{\underline{0.30}}$$

Diese Mindestzahl ist in der Realität in der Regel vorhanden (Schuhe auf nicht speziell rutschigem Boden).

iv. Durch die Spikes und die Tartanbahn wird die Haftreibung zwischen Schuhen und Boden auf ein Maximum erhöht. Dies ermöglicht auch extreme Beschleunigungen ohne den Verlust der Bodenhaftung. Wie wir später sehen werden ist die Haftreibung auch dafür verantwortlich, dass man nicht aus der Kurve fliegt. Auch dafür sind die Spikes und die Tartanbahn wichtig.

v. Vernachlässigen wir die Rollreibung und den Luftwiderstand, so ist die resultierende Kraft gerade gleich der Motorenkraft F_M. Diese auf den Boden übertragene Motorenkraft ist bei näherer Betrachtung aber nichts anderes als die Haftreibung zwischen Pneus und Strasse: Die Räder drehen sich wegen des Motors und wegen der Haftreibung zwischen Pneus und Boden wird das Auto vorwärts gestossen!

Für die maximale resultierende Kraft $F_{res,\max}$ und die maximal mögliche Beschleunigung $a_{\max}$ gilt somit:

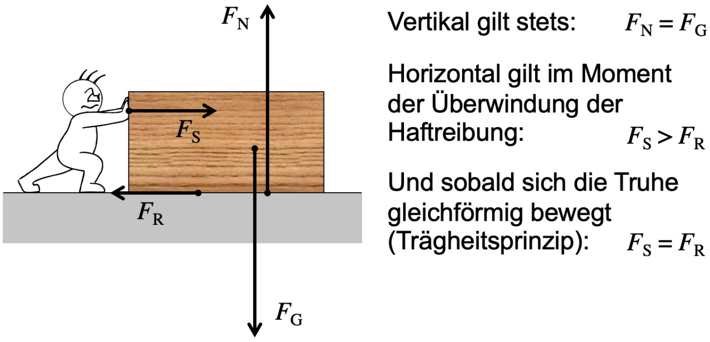
$$F_{res,\max} = F_{R,\max} \quad \Rightarrow \quad m \cdot a_{\max} = \mu_H \cdot F_N$$

Auf horizontaler Strasse ist $F_N = F_G = m \cdot g$, woraus schliesslich folgt:

$$m \cdot a_{\max} = \mu_H \cdot m \cdot g \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = \mu_H \cdot g = 0.66 \cdot 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6.47\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq \underline{\underline{6.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Für die maximal mögliche Beschleunigung spielt also nur die Oberflächenbeschaffenheit eine Rolle (solange sich der Vorgang an der Erdoberfläche mit fix vorgegebenem Ortsfaktor g abspielt)!

4. *Fritz und die Truhe*



(a) Bei $210\,\mathrm{N}$ Schubkraft ist die Obergrenze der Haftreibung erreicht (bzw. minimal überschritten). Es folgt:

$$F_S = F_{R,\max} = \mu_H \cdot F_N \quad \Rightarrow \quad \mu_H = \frac{F_S}{F_N} = \frac{F_S}{F_G} = \frac{F_S}{m \cdot g} = \frac{210\,\mathrm{N}}{58\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} \simeq \underline{\underline{0.37}}$$

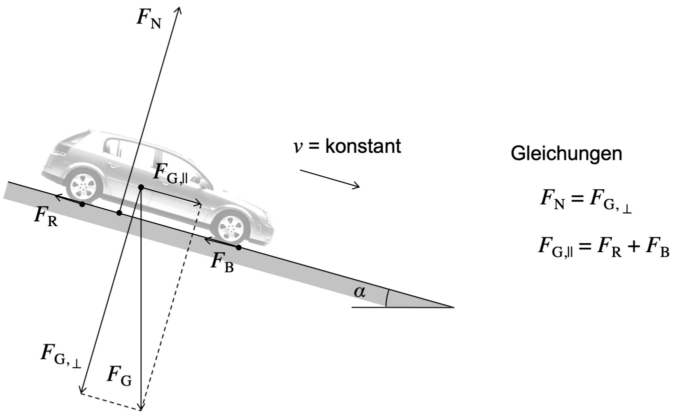
(b) Aus der Gleichung für die Gleitreibungskraft folgt:

$$F_R = \mu_G \cdot F_N = \mu_G \cdot F_G = \mu_G \cdot m \cdot g = 0.32 \cdot 58\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \simeq \underline{\underline{180\,\mathrm{N}}}$$

(c)
- **"Die Truhe mit einer geringeren Geschwindigkeit schieben." ⇒ Falsch!**
  Gleitreibungskräfte hängen (erstaunlicherweise!?) kaum von der Geschwindigkeit ab!
- **"Die Truhe vor dem Verschieben leeren." ⇒ Richtig!**
  Damit wird die Gewichtskraft F_G der Truhe verkleinert, wodurch auch die Normalkraft F_N zwischen Truhe und Boden kleiner wird. Dies verringert die Reibungskraft F_R!
- **"Die Truhe auf die kleinere Frontseite aufstellen und so schieben." ⇒ Falsch!**
  Gleitreibungskräfte hängen kaum von der Grösse der Auflagefläche ab!
- **"Papier auf den Parkettboden legen und die Truhe darauf verschieben." ⇒ Richtig!**
  Die Gleitreibungszahl μ_G zwischen Truhe und Papier dürfte deutlich geringer sein als jene zwischen der Truhe und dem Parkettboden. D.h., auf dem Papier würde die Truhe besser rutschen. Die Reibungskraft F_R wäre kleiner.

5. *Gratisfahrt*

(a) Für die auf das Auto wirkenden Kräfte folgt (inkl. Gleichungen):



(b) Zur Steigung $12.4\,\%$ gehört ein Steigungswinkel $\alpha = \arctan 12.4\,\% = \arctan 0.124 = 7.069°$.
Die Hangabtriebskraft , also die Parallel-Komponente $F_{G,\parallel}$ der Gewichtskraft beträgt:

$$F_{G,\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha = 1570\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \sin 7.069° = 1895\,\mathrm{N}$$

Analog erhält man für die Senkrecht-Komponente $F_{G,\perp}$ der Gewichtskraft und somit für die Normalkraft F_N:

$$F_N = F_{G,\perp} = m \cdot g \cdot \sin\alpha = 1570\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \cos 7.069° = 15\,285\,\mathrm{N}$$

Für die Rollreibung folgt aus dem Kräftegleichgewicht parallel zur schiefen Ebene:

$$F_R = F_{G,\parallel} - F_B = 1895\,\mathrm{N} - 1100\,\mathrm{N} = 795\,\mathrm{N}$$

Daraus folgt schliesslich für die gesuchte Rollreibungszahl:

$$\mu_R = \frac{F_R}{F_N} = \frac{795\,\mathrm{N}}{15\,285\,\mathrm{N}} = 0.05203 \simeq \underline{\underline{0.052}}$$

6. *Rutschpartie*

(a) Im Moment, da die Parallelkomponente der Gewichtskraft die maximale Haftreibungskraft überschreitet, beginnt der Klotz zu rutschen. Mit $\alpha_{\max} = \arctan 0.330 = 18.26°$:

$$F_{\mathrm{R,max}} = F_{\mathrm{G},\|,\max} = m \cdot g \cdot \sin\alpha = 0.785\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \sin 18.26° = 2.413\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{2.41\,\mathrm{N}}}$$

(b) Die Haftreibungszahl μ_{H} erhält man, indem man die maximale Reibungskraft durch die Normalkraft F_{N} teilt, weil $F_{\mathrm{R,max}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}}$. Auf der schiefen Ebene ist die Normalkraft allerdings gleich der Senkrecht-Komponente der Gewichtskraft. Damit ergibt sich:

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0.785\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \cos 18.26° = 7.313\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{H}} = \frac{F_{\mathrm{R,max}}}{F_{\mathrm{N}}} = \frac{2.413\,\mathrm{N}}{7.313\,\mathrm{N}} \simeq \underline{\underline{0.330}}$$

Formal lässt sich dieses Resultat übrigens sehr schön darstellen:

$$\mu_{\mathrm{H}} = \frac{F_{\mathrm{R,max}}}{F_{\mathrm{N}}} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m \cdot g \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Und $\tan\alpha$ ist eben genau wieder die vorgegebene Steigung ($33.0\,\%$)! Dies ist ein allgemein gültiges Resultat, wenn auf einer schiefen Ebene nur die Haftreibung alleine das Rutschen verhindert: Die Steigung der Ebene beim Losrutschen ist gerade gleich der Haftreibungszahl! Masse und Ortsfaktor spielen dabei keine Rolle mehr.

(c) Bei Unterschreitung von $26.5\,\%$ Neigung bremst der Klotz ab und das Rutschen hört auf. Der Grenzfall ist vorhanden, wenn der Klotz gleichförmig rutscht. Dafür folgern wir nun ganz analog zur vorherigen Rechnung formal:

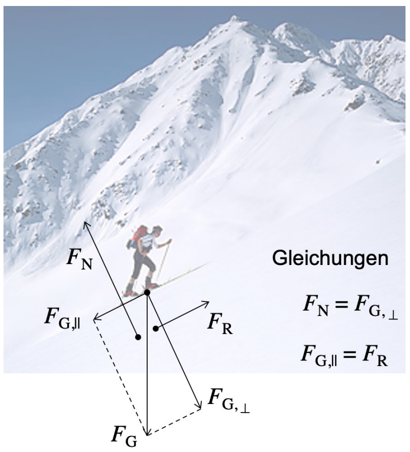
$$\mu_{\mathrm{G}} = \frac{F_{\mathrm{R,gfB}}}{F_{\mathrm{N}}} = \frac{F_{\mathrm{G},\|}}{F_{\mathrm{G},\perp}} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m \cdot g \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = 26.5\,\% = \underline{\underline{0.265}}$$

Das Rutschen endet also, wenn die Steigung unterschritten wird, die der Gleitreibungszahl entspricht (solange auf der schiefen Ebene keine anderen Kräfte bremsen).

7. *Skitour-Physik*

(a) Wenn der Skitourenläufer sich nicht zu stark abstösst, d.h., wenn die Beschleunigung beim Schritt hinreichend klein ist, dann muss die Haftreibung F_{R} praktisch ausschliesslich die Parallel-Komponente $F_{\mathrm{G},\|}$ der Gewichtskraft kompensieren. Der Unterschied zum ruhigen Stehenbleiben ist vernachlässigbar klein.

Die Kraftsituation des stehenden Läufers inkl. der zugehörigen Gleichungen ist rechts gezeigt.



(b) Für die maximale Haftreibungskraft gilt:

$$F_{\mathrm{R,max}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{G},\perp} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Dabei ist α der Neigungswinkel, bei dessen überschreitung das Rutschen einsetzt. Im Grenzfall des gerade noch nicht Rutschens ist diese maximale Haftreibung gleich der Hangabtriebskraft $F_{\mathrm{G},\|}$ und es folgt:

$$F_{\mathrm{R,max}} = F_{\mathrm{G},\|} \quad \Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{H}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \text{maximale Steigung}$$

Wie schon in Aufgabe 6 ist die Steigung, bei der das Rutschen einsetzt, gerade gleich der Haftreibungszahl μ_{H}, hier also gleich $65\,\%$. Dies entspricht einem Steigungswinkel von $33°$.

In der Realität ist die Haftreibungszahl zwischen Fellen und Schnee oftmals noch etwas grösser. Trotzdem ist es technisch schwierig grössere Steigungen als $30°$ zu erklimmen, da dann eben bereits die kleinste zusätzliche Belastung, eben z.B. durch das Abstossen in Vorwärtsrichtung, zu einem kräfteraubenden Abrutschen führt. Natürlich kann man dann mit den Skistöcken etwas nachhelfen, aber auch dafür braucht es eine haltende Unterlage zum Abstützen.

Zusammengefasst wird der Halt bei auf immer steilerem Hang dadurch schwieriger, dass erstens die Parallel-Komponente der Gewichtskraft immer grösser wird und dass dabei zweitens die maximal mögliche Haftreibungskraft abnimmt, weil diese von der Normalkraft und somit von der Senkrecht-Komponente von F_{G} abhängt. Letztere wird bei zunehmender Hangneigung immer geringer.

8. *Wie gross ist* $1\,\mathrm{N}$*?*

(a) Die Masse ist um Faktor 100 grösser als $1\,\mathrm{kg}$. Demnach wäre eine Kraft von $100\,\mathrm{N}$ nötig, um den Läufer in einer Sekunde auf eine Geschwindigkeit von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu beschleunigen.

Allerdings ist die verfügbare Zeit um Faktor 2 grösser als $1\,\mathrm{s}$. Das bedeutet, die Kraft kann doppelt so lange wirken und muss daher nur halb so gross sein, um dieselbe Geschwindigkeit hervorzubringen. $\frac{100\,\mathrm{N}}{2} = 50\,\mathrm{N}$ würden reichen, um ihn in $2\,\mathrm{s}$ auf $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu beschleunigen.

Schliesslich soll aber die Endgeschwindigkeit nicht nur $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, sondern $11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen. D.h., die Kraft muss nochmals um Faktor 11 grösser sein. Wir finden also für den benötigten Kraftbetrag $50\,\mathrm{N} \cdot 11 = \underline{\underline{550\,\mathrm{N}}}$.

(b) Die Kraft ist um Faktor 3000 grösser als $1\,\mathrm{N}$. D.h., damit liessen sich statt $1\,\mathrm{kg}$ ganze $3000\,\mathrm{kg}$ Masse in einer Sekunde auf $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigen.

Zudem wirkt diese Kraft nicht nur während einer, sondern während 10 Sekunden. D.h., man könnte 10-mal $3000\,\mathrm{kg}$ auf $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bechleunigen, also insgesamt $3000\,\mathrm{kg} \cdot 10 = 30\,000\,\mathrm{kg}$.

Schliesslich soll aber die Endgeschwindigkeit um Faktor 30 grösser sein als $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Statt $30\,000\,\mathrm{kg}$ auf $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, werden lediglich $\underline{\underline{1000\,\mathrm{kg}}}$ beschleunigt, dafür allerdings auf $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

9. *Die Beschleunigung des Bugatti Veyron*

Bewegungstyp: gmbBoA. Gegeben: $v = 2\underline{0}\,\underline{0}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 55.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $t = 7.3\,\mathrm{s}$, $m = 1888\,\mathrm{kg}$, $\mu_\mathrm{R} = 0.014$.
Zuerst gesucht: a (kinematische Berechnung).

$$a = \frac{v}{t} = \frac{55.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{7.3\,\mathrm{s}} = 7.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Mit dem Aktionsprinzip schliesst man hieraus auf die resultierende Kraft:

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a = 1888\,\mathrm{kg} \cdot 7.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 14\,368\,\mathrm{N}$$

Nach der Kraftanalyse in Aufgabe 1.(b) gilt immer noch: $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{M} - F_\mathrm{R} - F_\mathrm{L}$. Die Rollreibung F_R ist zwar nicht gegeben, lässt sich aber berechnen:

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g = 0.014 \cdot 1888\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 259\,\mathrm{N}$$

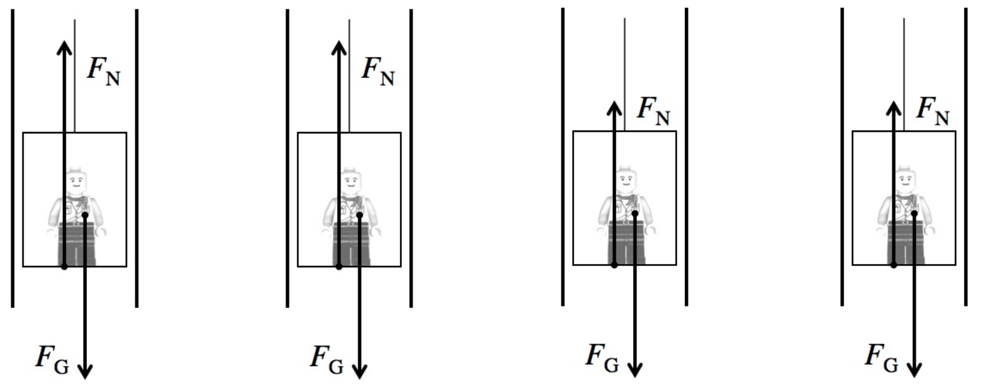
Nun folgt für die auf die Strasse übertragene Motorenkraft:

$$F_\mathrm{M} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{R} + F_\mathrm{L} = 14\,368\,\mathrm{N} + 259\,\mathrm{N} + 1240\,\mathrm{N} = 15\,867\,\mathrm{N} = \underline{\underline{16\,\mathrm{kN}}}$$

10. *Liftfahren*

(a)+(b) Es ergeben sich die folgenden Kräfteskizzen:

Anfahren nach oben	Abbremsen nach Abwärtsfahrt	Gleichmässige Fahrt nach oben	Gleichmässige Fahrt nach unten



$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{N} - F_\mathrm{G}$	$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{N} - F_\mathrm{G}$	$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$	$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$
(nach oben)	(nach oben)	$F_\mathrm{res} = 0$	$F_\mathrm{res} = 0$

(c) In beiden Situationen fühlt man sich schwerer, weil die Normalkraft jeweils grösser ist als, wenn man einfach ruhig da steht. Für die Beschleunigung ergibt sich aus der Kinematik:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(2.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 1.9\,\mathrm{m}} = 1.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

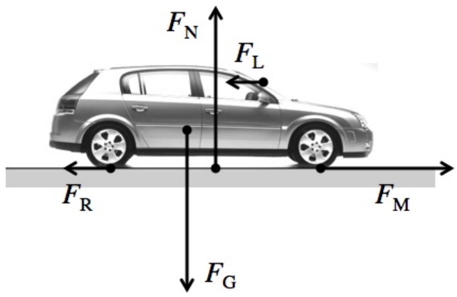
Schreiben wir für die Normalkraft $F_\mathrm{N} = m \cdot g_\mathrm{gefühlt}$, so ergibt sich aus der Kraftgleichung:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\mathrm{gefühlt} = m \cdot a + m \cdot g \quad \Rightarrow \quad g_\mathrm{gefühlt} = a + g = 1.78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 11.59\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Die zusätzlich wahrgenommene Schwere rührt eben von der Beschleunigung her.
Es ist $g_\mathrm{gefühlt} = 11.59\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1.181 \cdot g$. Die gefühlte Schwere ist also um $\underline{\underline{18\,\%}}$ grösser als im ruhigen Stehen oder bei gleichförmiger Fahrt.

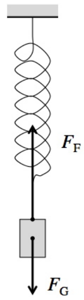
11. *Acht Kräfteskizzen und ihre Gleichungen*

Auto beim Anfahren



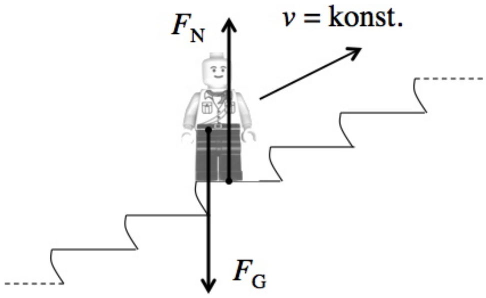
$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}}$ und $F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{M}} - F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{L}}$

Masse am schwingenden Federpendel im untersten Punkt der Bewegung



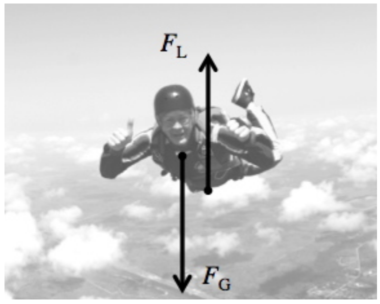
$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{F}} - F_{\mathrm{G}}$

Person auf der Rolltreppe bei gleichförmiger Aufwärtsfahrt



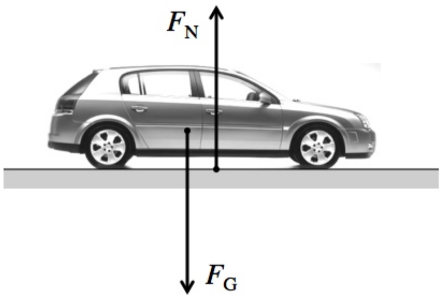
$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}}$

Fallschrimspringer beim gleichförmigen Fallen mit Maximalgeschwindigkeit ($\approx 200\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$)



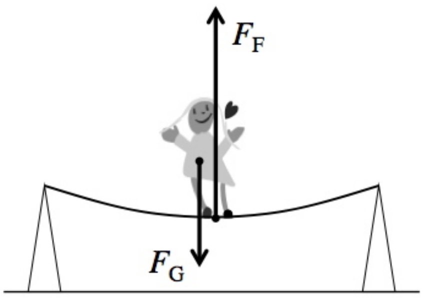
$F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{G}}$

Parkiertes **Auto**



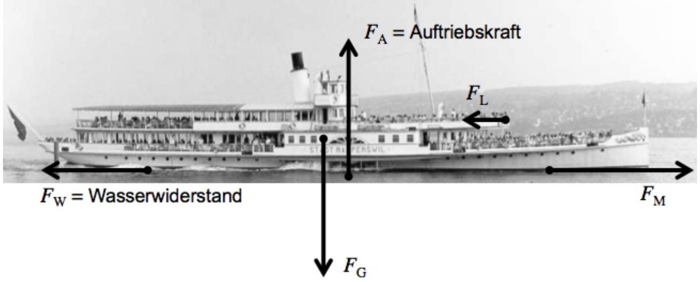
$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}}$

Trampolinspringerin am untersten Punkt ihrer Bewegung



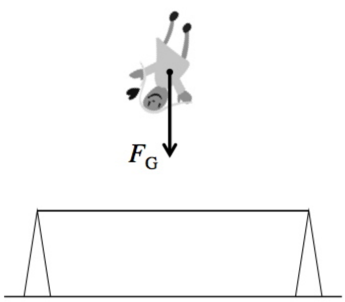
$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{F}} - F_{\mathrm{G}}$

DS Stadt Rapperswil bei gleichförmiger Fahrt



$F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{G}}$ und $F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{W}} + F_{\mathrm{L}}$

Trampolinspringerin am obersten Punkt ihrer Bewegung



$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}}$

12. *"S'Poschtiwägeli"*

(a) Während dem Einkaufen legt man immer mehr Ware ins "Poschtiwägeli". Dieses erhält dadurch immer mehr **Masse**. D.h., seine **Trägheit** nimmt immer weiter zu. Also benötigt man immer mehr **Kraft**, um den Bewegungszustand des Wägelis zu verändern resp. eine bestimmte **Beschleunigung** hervorzurufen (gilt für das schneller und für das langsamer Werden).

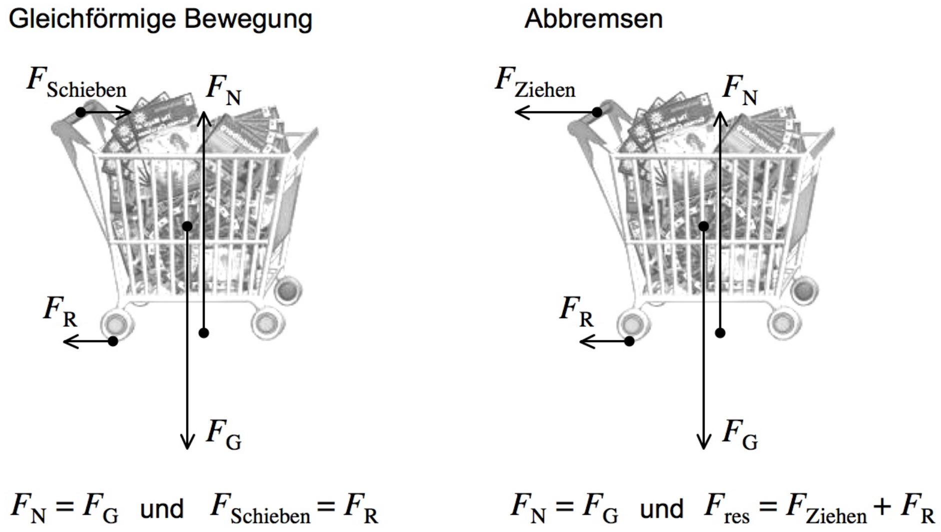
Genau diese Aussage steckt in der Newton'schen Gleichung $F_{\text{res}} = m \cdot a$. Je mehr Masse m ein Objekt besitzt, desto grösser muss die resultierende Kraft F_{res} werden, wenn die Beschleunigung a nicht kleiner werden soll.

(b) Die Kräfteskizze sehen wir unten links. Wir folgern:

$$\text{vertikal (Ruhe):}\quad F_{\text{N}} = F_{\text{G}} \qquad \text{und} \qquad \text{horizontal (gfB):}\quad F_{\text{Schieben}} = F_{\text{R}}$$

Unter Verwendung beider Gleichungen erhalten wir schliesslich für die Schubkraft:

$$F_{\text{Schieben}} = F_{\text{R}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{R}} \cdot m \cdot g = 0.070 \cdot 13.5\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \underline{\underline{9.3\,\text{N}}}$$



(c) Im Aufgabentext wird die Kinematik des Abbremsevorgangs beschrieben. Daraus lässt sich die Bremsbeschleunigung bestimmen. Die Bewegung ist zwar gleichmässig beschleunigt mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA). Da aber auf die Endgeschwindigkeit 0 abgebremst wird, können wir diesen Vorgang in der Zeitumkehr auch als gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA) auffassen, was die Gleichungen vereinfacht. Es folgt:

Geg.: $v = 2.2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = 0.50\,\text{m}$; ges.: a.

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(2.2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.50\,\text{m}} = 4.84\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Daraus bestimmen wir sofort die erforderliche resultierende Kraft:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a = 25\,\text{kg} \cdot 4.84\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 121\,\text{N}$$

Die zum Abbremsen gehörende Kräfteskizze sehen wir oben rechts. Zugkraft und Reibungskraft zusammen bewirken das Abbremsen. (F_{res} entgegen der Fahrtrichtung).

Bevor wir die Zugkraft F_{Ziehen} bestimmen können, muss die Reibungskraft bei einer Masse von $25\,\text{kg}$ neu berechnet werden:

$$F_{\text{R}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{R}} \cdot m \cdot g = 0.070 \cdot 25\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 17.2\,\text{N}$$

Nun folgt für die notwendige Zugkraft:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{Ziehen}} + F_{\text{R}} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{Ziehen}} = F_{\text{res}} - F_{\text{R}} = 121\,\text{N} - 17.2\,\text{N} = \underline{\underline{100\,\text{N}}}$$

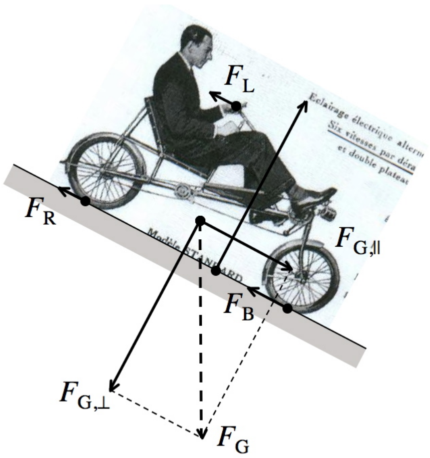
(d) Für die maximal mögliche Haftreibungskraft zwischen Schuhen und Boden berechnen wir:

$$F_{\text{R,max}} = \mu_{\text{H}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{H}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{H}} \cdot m \cdot g = 0.45 \cdot 65\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 287\,\text{N} > 104\,\text{N} = F_{\text{Z}}$$

Die maximale Haftreibungskraft ist also klar grösser als die notwendige Zugkraft. D.h., sie können das Poschtiwägeli abbremsen, ohne selber ins Rutschen zu kommen.

13. *Velofahren auf Strassen mit Steigung*

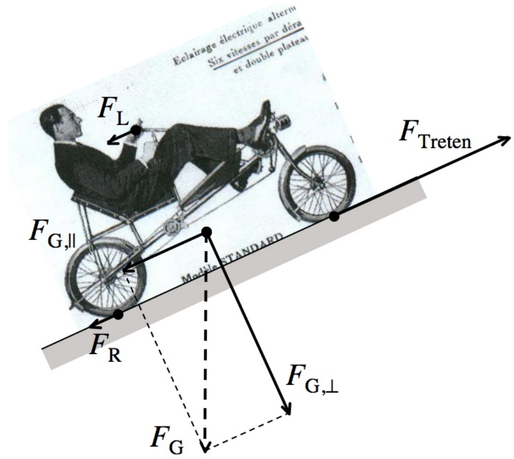
Abwärtsfahren mit
konstanter Geschwindigkeit



$\perp$ zur Strasse: $F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp}$

$\parallel$ zur Strasse: $F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{B}} + F_{\mathrm{R}} + F_{\mathrm{L}}$

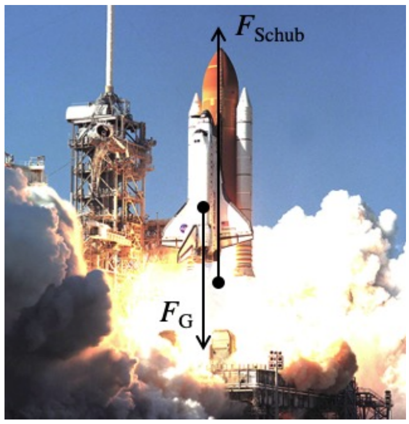
Aufwärts
beschleunigen



$\perp$ zur Strasse: $F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp}$

$\parallel$ zur Strasse: $F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{Treten}} - F_{\mathrm{G},\parallel} - F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{L}}$

14. *Ab in den Weltraum – ein Start mit dem Space Shuttle*



(a) In der Kräfteskizze tauchen nur zwei Kräfte auf (siehe Bild rechts).
Die Gewichtskraft des Shuttles berechnen wir aus der Masse:

$$F_{\mathrm{G}} = m \cdot g = 2\,041\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 20\,022\,000\,\mathrm{N}$$

Aus der Kräfteskizze folgt daraus für die resultierende Kraft:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{res}} &= F_{\mathrm{Schub}} - F_{\mathrm{G}} \\ &= 32\,370\,000\,\mathrm{N} - 20\,022\,000\,\mathrm{N} = 12\,348\,000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich via Aktionsprinzip für die Beschleunigung:

$$a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{12\,348\,000\,\mathrm{N}}{2\,041\,000\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{6.05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

(b) Bew.: gmbBoA; geg.: $t = 8\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{s}$, $v = 7.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 7600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ges.: a.

$$v = a \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{v}{t} = \frac{7600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{480\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

(c)
- Während dem Aufstieg verliert das Space Shuttle wesentlich an Masse. Dementsprechend wird erstens seine Gewichtskraft kleiner und zweitens ist es dadurch weniger träge. Beides trägt zur Erhöhung der Beschleunigung bei.

  (Explizit: Der Orbiter sitzt auf dem grossen, raketenförmigen Treibstofftank, von welchem seine Triebwerke versorgt werden. Dieser hat eine Leermasse von $30\,\mathrm{t}$ und enthält beim Start $721\,\mathrm{t}$ Treibstoff. Die beiden Feststoffraketen auf der Seite enthalten ihren eigenen Treibstoff. Jede einzelne davon wiegt beim Start $586\,\mathrm{t}$. Während dem Aufstieg leert sich der Treibstofftank und die Feststoffraketen, wodurch das Shuttle erheblich an Masse verliert. Nach ca. $2\,\mathrm{min}$ sind die Feststoffraketen ausgebrannt und werden abgeworfen. Sie fallen an Fallschirmen auf die Erde zurück (ins Meer). Erst nach gut $8\,\mathrm{min}$ ist der grosse Treibstofftank leer und wird ebenfalls abgestossen. Nur der Orbiter begibt sich auf den eigentlichen Weltraumflug. Er hat dann eine Masse von "nur" noch: $2\,041\,\mathrm{t} - 751\,\mathrm{t} - 2 \cdot 586\,\mathrm{t} = 118\,\mathrm{t}$.)

- Das Shuttle entfernt sich von der Erde. Dabei nimmt der Ortsfaktor g und als Folge davon auch die Gewichtskraft ab. Auch dadurch wird die Beschleunigung erhöht.

  (Explizit: Das Space Shuttle erfüllt Missionen auf Flughöhen zwischen $310\,\mathrm{km}$ und $560\,\mathrm{km}$ über Meer. Der Ortsfaktor beträgt dort nur noch zwischen $8.3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ und $8.9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.)

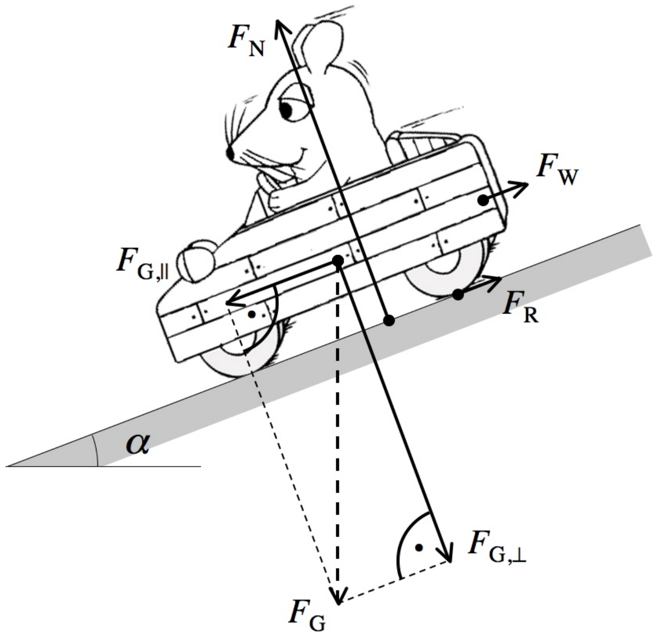
- Nur unmittelbar beim Abheben von der Startrampe wirkt die Gewichtskraft voll gegen die Schubkraft und es gilt: $F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{Schub}} - F_{\mathrm{G}}$. Bereits kurze Zeit danach beginnt das Shuttle in eine Erdumlaufbahn einzubiegen, in welcher es durch die Gewichtskraft andauernd "an der Erde vorbei fallen wird". Je weiter dieses Einbiegen in die Umlaufbahn fortgeschritten ist, umso weniger arbeitet F_{G} gegen die Schubkraft. Dies hat zur Folge, dass die Beschleunigung des Shuttles immer weniger durch F_{G} verringert wird.

  Auf dem Bild rechts sieht man die Abgasfahne des Space Shuttles nach einem Start. Man erkennt klar das stete Einbiegen in die Umlaufbahn.

- **Kein echter Grund** ist die Abnahme der Luftdichte und damit des Luftwiderstandes mit zunehmender Flughöhe, denn bei der Berechnung unter (a) ist dieser Reibungswiderstand mit der Luft ja ebenfalls vernachlässigt worden.

15. *Die Maus und ihre Seifenkiste*

   (a) Für die Kräfteskizze und die Kraftgleichungen ergibt sich:



$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp}$$
$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G},\parallel} - F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{W}}$$

   (b) Erstes Ziel ist die Berechnung der resultierenden Kraft, denn daraus wird sich die Beschleunigung ergeben. Dafür müssen wir alle Teilkräfte kennen:

$$F_{\mathrm{G}} = m \cdot g = 110\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1079\,\mathrm{N}$$
$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha = 1079\,\mathrm{N} \cdot \cos 7.3^\circ = 1070\,\mathrm{N}$$
$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = 1079\,\mathrm{N} \cdot \sin 7.3^\circ = 137\,\mathrm{N}$$
$$F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{N}} = 0.023 \cdot 1070\,\mathrm{N} = 24.6\,\mathrm{N}$$

   Daraus folgt für F_{res} und schliesslich mit dem Aktionsprinzip für die Beschleunigung:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G},\parallel} - F_{\mathrm{R}} - F_{\mathrm{W}} = 137\,\mathrm{N} - 24.6\,\mathrm{N} - 45\,\mathrm{N} = 67.4\,\mathrm{N}$$
$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{\mathrm{res}}}{m} = \frac{67.4\,\mathrm{N}}{110\,\mathrm{kg}} = 0.613\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   Nun sind wir bereit die Aufgabe mit einer kinematischen Berechnung abzuschliessen:

   Bew.: gmbBoA; geg.: $s = 99\,\mathrm{m}$, $a = 0.613\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; ges.: v.

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0.613\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 99\,\mathrm{m}} = 11.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \quad \left(= \underline{40}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)$$

16. *Weitere Aufgaben mit kinematischen Berechnungen*

(a) Die Rollreibungskraft des Smarts beträgt:

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g = 0.016 \cdot 540\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 84.8\,\mathrm{N}$$

Die zwei Anschieber entwickeln zusammen eine Schubkraft von $F_\mathrm{Schub} = 2 \cdot 220\,\mathrm{N} = 440\,\mathrm{N}$. Sie wirkt nach vorne, die Reibungskraft nach hinten. Zusammen ergibt sich eine resultierende Kraft von:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{Schub} - F_\mathrm{R} = 440\,\mathrm{N} - 84.8\,\mathrm{N} = 355.2\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_\mathrm{res}}{m} = \frac{355.2\,\mathrm{N}}{540\,\mathrm{kg}} = 0.658\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

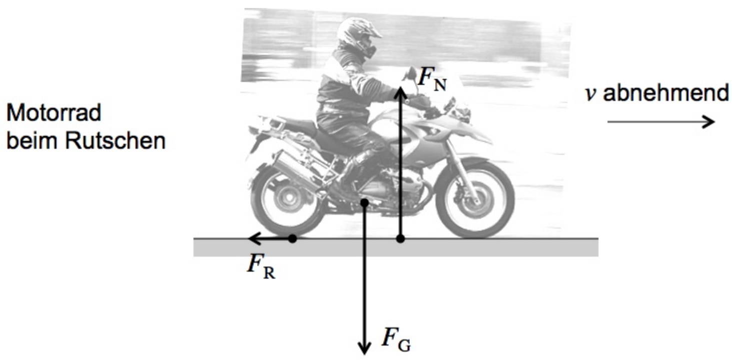
Die Zeit für eine Strecke von $10.0\,\mathrm{m}$ beträgt somit (gmbBoA):

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.0\,\mathrm{m}}{0.658\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \underline{\underline{5.5\,\mathrm{s}}}$$

(b) Wir wollen die Reibungszahl μ_G bestimmen. Diese ergibt sich aus dem Verhältnis zweier Kräfte: $\mu_\mathrm{G} = \frac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{N}}$.
Die Vorgaben v und s sind allerdings kinematisch, gehören also zur Bewegungsbeschreibung. Um daraus Informationen über die Kräfte zu erhalten, müssen wir zuerst die Beschleunigung bestimmen!
Bewegungstyp: gmbBoA. Gegeben: $v = 37\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 10.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $s = 11.5\,\mathrm{m}$. Gesucht: a.

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(10.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 11.5\,\mathrm{m}} = (-)\,4.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{res} = m \cdot a = 155\,\mathrm{kg} \cdot 4.61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 715\,\mathrm{N}$$

Um herauszufinden, wie sich F_res aus den auf das Motorrad wirkenden Kräften zusammensetzt, zeichnen wir eine Kräfteskizze:



Vertikal herrscht ein Kräftegleichgewicht und es sind:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} = m \cdot g = 155 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1521\,\mathrm{N}$$

Die einzige horizontal wirkende Kraft ist die Reibungskraft. Sie muss gerade die resultierende Kraft ausmachen, also: $F_\mathrm{R} = F_\mathrm{res} = 715\,\mathrm{N}$. Somit lässt sich nun tatsächlich die Reibungszahl μ_G bestimmen:

$$\mu_\mathrm{G} = \frac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{N}} = \frac{715\,\mathrm{N}}{1521\,\mathrm{N}} = 0.470 = \underline{\underline{0.47}}$$

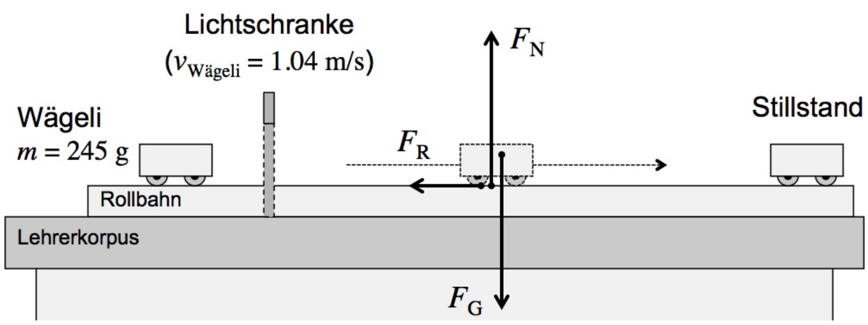
Das ist ein realistischer Wert für die Gleitreibungszahl zwischen Pneus und Asphalt.

17. *Ein Schulzimmerversuch*

Bewegungstyp: gmbBoA (Zeitumkehr), gegeben: $s = 2.45\,\mathrm{m}$, $v = 1.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gesucht: a. Es folgt:

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(1.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 2.45\,\mathrm{m}} = 0.2207\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Kräfteskizze während dem Ausrollen:



Aus der Kräfteskizze ergeben sich die folgenden Gleichungen für das Rollwägeli:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} \quad \text{und} \quad F_\mathrm{res} = F_\mathrm{R}$$

Somit finden wir für die Rollreibungskraft:

$$F_\mathrm{R} = F_\mathrm{res} = m \cdot a = 0.245\,\mathrm{kg} \cdot 0.2207\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.05407\,\mathrm{N} = 54.1\,\mathrm{mN}$$

Daraus folgt nun für die Rollreibungszahl:

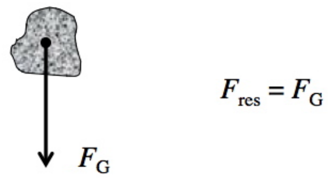
$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{R} = \frac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{N}} = \frac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{G}} = \frac{F_\mathrm{R}}{m \cdot g} = \frac{0.05407\,\mathrm{N}}{0.245\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 0.02250 = \underline{\underline{0.0225}}$$

18. *Eine vertikale Bewegung – Der freie Fall*

(a) Beide Körper erfahren die Fallbeschleunigung g. Für die Fallzeit ergibt sich deshalb in beiden Fällen:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.0\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \underline{\underline{0.64\,\mathrm{s}}}$$

(b) Der freie Fall wird gerade dadurch charakterisiert, dass keine Kraft ausser der Gewichtskraft auf den Körper wirkt. Dies trifft in einem Vakuum-Fallrohr ohne grossen Fehler zu. Stellvertretend für Feder und Kugel hier die Kräfteskizze für den freien Fall eines Steins:



Für die Beträge der resultierenden Kräfte ergibt sich:

Feder: $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{G} = m \cdot g = 0.0001\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0.000\,981\,\mathrm{N} = \underline{\underline{1\,\mathrm{mN}}}$

Metallkugel: $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{G} = m \cdot g = 0.01\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0.0981\,\mathrm{N} = \underline{\underline{100\,\mathrm{mN}}}$

(c) Obwohl die beiden Objekte unterschiedliche Gewichtskräfte erfahren, beschleunigen beide gleich stark und kommen zur selben Zeit am Boden an.

Begründung: Da die Gewichtskraft die einzige auf den Körper wirkende Kraft ist, muss sie gerade gleich der resultierenden Kraft sein. Daraus folgern wir:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad m \cdot a = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = g}}$$

Egal, welche Masse das Objekt besitzt: Im freien Fall erfährt es die durch den Ortsfaktor vorgegebene Beschleunigung g.

Weiterführende Erklärung: Masse besitzt in der Newton'schen Mechanik zwei Eigenschaften:

"Masse ist schwer": Massen ziehen sich gegenseitig an. Aus diesem Grund erfahren Körper an der Erdoberfläche eine Schwerkraft. Sie werden von der Erdmasse angezogen. Sie sind **schwer**.
In der Formel $F_\mathrm{G} = m \cdot g$ steht das m für die Schwere-Eigenschaft der Masse. Die Schwerkraft F_G ist proportional zur Körpermasse m.

"Masse ist träge": Masse steht für die Eigenschaft eines Körpers sich Beschleunigungen zu widersetzen, also nicht beliebig rasch schneller oder langsamer werden oder beliebig enge Kurven beschreiben zu können. Massen sind **träge**.
In der Formel $F_\mathrm{res} = m \cdot a$ steht das m für die Trägheits-Eigenschaft der Masse. Die resultierende Kraft F_res ist proportional zur Körpermasse m.

Kombination: Im freien Fall erfährt ein Körper mit viel Masse zwar eine grössere Gewichtskraft F_G als ein Körper mit weniger Masse. Gleichzeitig ist dieser massigere Körper aber eben auch träger, sodass die grössere Gewichtskraft nicht zu einer grösseren Beschleunigung führt.

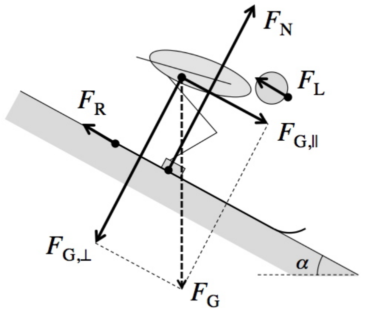
Schwere und Trägheit nehmen beide mit der Masse m zu, sodass sich die beiden Effekte aufheben und sich m bei der Berechnung der Beschleunigung herauskürzt.

Historisches: Newton selber konnte übrigens nicht richtig erklären, weshalb die beiden Masse-Eigenschaften "Trägheit" und "Schwere" genau gleich gross sind. Wir könnten uns innerhalb der Newton'schen Mechanik also durchaus einen schweren, aber nicht so trägen Körper, oder umgekehrt einen Körper mit grosser Trägheit, aber geringer Schwere vorstellen.

Erst Einstein hat 250 Jahre nach Newton die Lösung dieses Rätsels geliefert, indem er die Gleichheit von Schwere und Trägheit zum Prinzip erhob und daraus die **Allgemeine Relativitätstheorie (ART)** entwickelte.

19. *Newton'sche Mechanik beim Skisprunganlauf*

Mit der Kräfteskizze schliessen wir auf die Kraftgleichungen:



Senkrecht zur Anlaufsspur (Ruhe): $F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp}$

Parallel zur Anlaufsspur (gmbBoA): $F_\mathrm{res} = F_{\mathrm{G},\parallel} - F_\mathrm{R} - F_\mathrm{L}$

Winkelberechnung:

$\alpha = \arctan(0.726) = 35.98°$

Wir benutzen die üblichen Gleichungen für die Berechnung der einzelnen Kräfte:

Gewichtskraft: $F_\mathrm{G} = m \cdot g = 71\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 696.5\,\mathrm{N}$

Normalkraft: $F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp} = F_\mathrm{G} \cdot \cos\alpha = 696.5\,\mathrm{N} \cdot \cos 36.0° = 563.5\,\mathrm{N}$

Reibungskraft $F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{N} = 0.040 \cdot 563.5\,\mathrm{N} = 22.5\,\mathrm{N}$

Hangabtrieb: $F_{\mathrm{G},\parallel} = F_\mathrm{G} \cdot \sin\alpha = 696.5\,\mathrm{N} \cdot \sin 36.0° = 409.4\,\mathrm{N}$

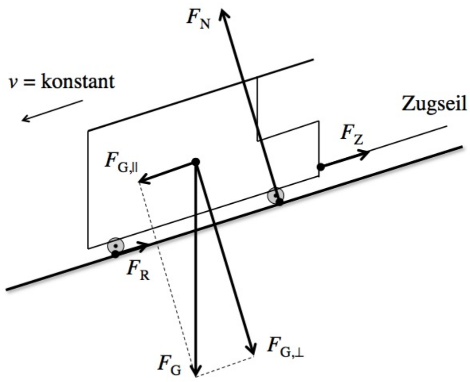
Luftwiderstand: $F_\mathrm{L} = 120\,\mathrm{N}$

Daraus folgt F_res und mit dem Aktionsprinzip schliesslich die Beschleunigung Schlierenzauers :

$$F_\mathrm{res} = F_{\mathrm{G},\parallel} - F_\mathrm{R} - F_\mathrm{L} = 409.4\,\mathrm{N} - 22.5\,\mathrm{N} - 120\,\mathrm{N} = 266.9\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_\mathrm{res}}{m} = \frac{266.9\,\mathrm{N}}{71\,\mathrm{kg}} = 3.76\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{3.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

20. *Die Polybahn*



Daraus ergeben sich bei gleichförmiger Bewegung (gfB) die folgenden beiden Kraftgleichungen:

$$F_\mathrm{Z} + F_\mathrm{R} = F_{\mathrm{G},\parallel} \qquad \text{und} \qquad F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp}$$

Für den Steigungswinkel α berechnen wir aus der Steigungsangabe:

$$\alpha = \tan^{-1}(0.232) = 13.06°$$

Damit lassen sich alle notwendigen Kraftbeträge berechnen:

$$F_\mathrm{G} = m \cdot g = 12\,400\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 121\,644\,\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_\mathrm{G} \cdot \sin\alpha = 121\,644\,\mathrm{N} \cdot \sin 13.06° = 27\,488\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp} = F_\mathrm{G} \cdot \cos\alpha = 121\,644\,\mathrm{N} \cdot \cos 13.06° = 118\,498\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = 0.011 \cdot 118\,498\,\mathrm{N} = 1303\,\mathrm{N}$$

Und schliesslich ergibt sich für die benötigte Zugkraft des Seils:

$$F_\mathrm{Z} = F_{\mathrm{G},\parallel} - F_\mathrm{R} = 27\,488\,\mathrm{N} - 1303\,\mathrm{N} = 26\,185\,\mathrm{N} = \underline{\underline{26\,\mathrm{kN}}}$$

21. *Gekoppelte Körper I – Die Rollbahn*

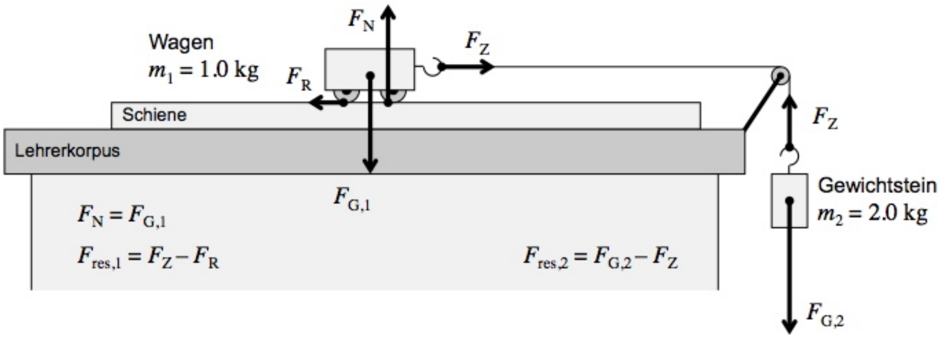
(a) Die Zugkraft des Fadens treibt den Wagen an, die Reibungskraft bremst ihn. Berechnen wir zuerst diese beiden Kräfte unter der falschen Annahme, dass die Zugkraft des Fadens gleich der Gewichtskraft des Gewichtsteins ist:

$$F_Z = F_{G,2} = m_2 \cdot g = 2.0\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 19.62\,\text{N}$$

$$F_R = \mu_R \cdot F_N = \mu_R \cdot F_{G,1} = \mu_R \cdot m_1 \cdot g = 0.035 \cdot 1.0\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0.34\,\text{N}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{res}} = F_Z - F_R = 19.62\,\text{N} - 0.34\,\text{N} = 19.3\,\text{N} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{19.3\,\text{N}}{1.0\,\text{kg}} = 19.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{19\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

(b) Diese Beschleunigung wäre grösser als die Fallbeschleunigung $g = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$! Der Wagen – und damit auch der hängende Gewichtstein! – würden gekoppelt also eine grössere Beschleunigung erfahren, als wenn der Klotz alleine fallen würde. Das wäre extrem unsinnig!



(c) Das gekoppelte System aus Wagen und Gewichtstein wird durch die Gewichtskraft angetrieben und durch die Reibungskraft gebremst: $F_{\text{res,total}} = F_{G,2} - F_R$. Soweit war Martins Idee richtig.
Diese resultierende Kraft muss allerdings beide Massen, also total $3.0\,\text{kg}$, beschleunigen! Es folgt:

$$a = \frac{F_{\text{res,total}}}{m_{\text{total}}} = \frac{F_{G,2} - F_R}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot g - \mu_R \cdot m_1 \cdot g}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{\frac{m_2 - \mu_R \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g}}$$

$$= \frac{2.0\,\text{kg} - 0.035 \cdot 1.0\,\text{kg}}{1.0\,\text{kg} + 2.0\,\text{kg}} \cdot 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{6.4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

(d) Die Zugkraft erhalten wir z.B. durch eine Betrachtung des Gewichtsteins:

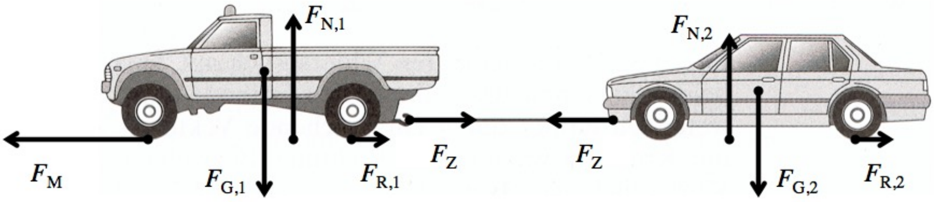
$$F_Z = F_{G,2} - F_{\text{res},2} = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g - a) = 2.0\,\text{kg} \cdot \left(9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 6.76\,\text{N} = \underline{\underline{6.8\,\text{N}}}$$

(e) Eine Verringerung der Beschleunigung um $25\,\%$ führt zu: $a = 75\,\% \cdot a_{\text{alt}} = \frac{3}{4} \cdot 6.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4.82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Die oben erhaltene Beschleunigungsgleichung muss nach m_2 aufgelöst werden. Dies erfordert die Lösung einer linearen Gleichung in der Unbekannten m_2:

$$\begin{aligned}
& \frac{m_2 - \mu_R \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = a && | \cdot (m_1 + m_2) \\
\Leftrightarrow\quad & (m_2 - \mu_R \cdot m_1) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a && |\,\text{ausmultiplizieren} \\
\Leftrightarrow\quad & m_2 \cdot g - \mu_R \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a && | + \mu_R \cdot m_1 \cdot g - m_2 \cdot a \\
\Leftrightarrow\quad & m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_1 \cdot a + \mu_R \cdot m_1 \cdot g && |\,\text{Massen ausklammern} \\
\Leftrightarrow\quad & m_2 \cdot (g - a) = m_1 \cdot (a + \mu_R \cdot g) && | : (g - a) \\
\Leftrightarrow\quad & m_2 = \frac{a + \mu_R \cdot g}{g - a} \cdot m_1 \\
& = \frac{4.82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0.035 \cdot 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4.82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 1.0\,\text{kg} \\
& = 1.03\,\text{kg} = \underline{\underline{1.0\,\text{kg}}}
\end{aligned}$$

22. *Gekoppelte Körper II – Pannenhilfe*

(a) Für die Kräfteskizze ergibt sich:



(b) Im folgenden benötigen wir die Beträge der beiden Reibungskräfte:

$$F_{R,1} = \mu_R \cdot m_1 \cdot g = 0.070 \cdot 1950\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1339\,\text{N}$$

$$F_{R,2} = \mu_R \cdot m_2 \cdot g = 0.070 \cdot 1350\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 927\,\text{N}$$

Für das gekoppelte System der beiden Autos gilt ebenfalls das 2. Newton'sche Axiom. Angetrieben wird es ausschliesslich durch die Motorenkraft F_M des Abschleppwagens. Gebremst wird es durch die beiden Rollreibungskräfte $F_{R,1}$ und $F_{R,2}$.
Diese Kraftkombination muss die Gesamtmasse $m_{\text{total}} = m_1 + m_2$ beschleunigen. Aus diesen überlegungen folgt:

$$a = \frac{F_{\text{res,total}}}{m_{\text{total}}} = \frac{F_M - F_{R,1} - F_{R,2}}{m_1 + m_2} = \frac{6130\,\text{N} - 1339\,\text{N} - 927\,\text{N}}{1950\,\text{kg} + 1350\,\text{kg}} = 1.17\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{1.2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

(c) Aus der Kinematik ergibt sich für die Beschleunigungsstrecke (gmbBoA mit Endgeschwindigkeit $v = 52\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 14.44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$):

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(14.44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 1.17\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 89.1\,\text{m} = \underline{\underline{89\,\text{m}}}$$

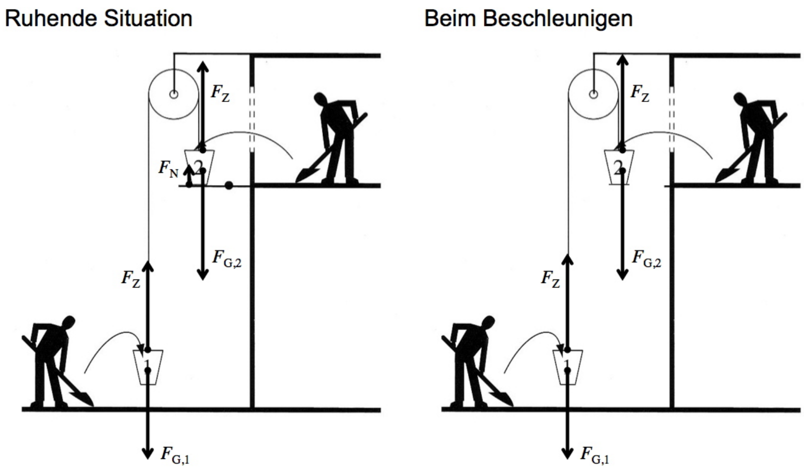
(d) Die auf das abgeschleppte Auto wirkende resultierende Kraft beträgt:

$$F_{\text{res},2} = m_2 \cdot a = 1350\,\text{kg} \cdot 1.17\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1580\,\text{N}$$

Andererseits kann man aus der Kräfteskizze ablesen:

$$F_{\text{res},2} = F_Z - F_{R,2} \quad \Rightarrow \quad F_Z = F_{\text{res},2} + F_{R,2} = 1580\,\text{N} + 927\,\text{N} = 2507\,\text{N} = \underline{\underline{2500\,\text{N}}}$$

23. *Gekoppelte Körper III – Bauarbeiter*



(a) Betrachten wir Eimer 1. In der Ruhesituation wird seine Gewichtskraft durch die Zugkraft des Seils kompensiert:

$$F_Z = F_{G,1} = m_1 \cdot g = 13.5\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 132.4\,\text{N} = \underline{\underline{132\,\text{N}}}$$

Bei Eimer 2 sind drei Kräfte am Gleichgewicht beteiligt. Die Gewichtskraft berechnet sich standardmässig wie folgt:

$$F_{G,2} = m_2 \cdot g = 14.0\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 137.3\,\text{N} = \underline{\underline{137\,\text{N}}}$$

Die Zugkraft ist dieselbe wie bei Eimer 1, also: $F_Z = \underline{\underline{132\,\mathrm{N}}}$. Und für die Normalkraft folgt aus dem Kräftegleichgewicht:

$$F_{G,2} = F_Z + F_N \qquad \Rightarrow \qquad F_N = F_G - F_Z = 137.3\,\mathrm{N} - 132.4\,\mathrm{N} = \underline{\underline{4.9\,\mathrm{N}}}$$

Dieses Resultat erstaunt nicht, wenn wir die Ruhesituation insgesamt anschauen. Eimer 2 ist um $0.5\,\mathrm{kg}$ massiger als Eimer 1. Diese überzählige Masse muss durch die Normalkraft der Klappe getragen werden:

$$F_N = (m_2 - m_1) \cdot g = 0.5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 4.9\,\mathrm{N}$$

(b) Die Gewichtskraft des Eimers 2 treibt an, jene von Eimer 1 bremst das gekoppelte System der beiden Eimer. Die total auf das Eimersystem wirkende resultierende Kraft ist die Differenz dieser beiden Kräfte, welche vorhin noch durch die Normalkraft der Klappe kompensiert wurde. Sie muss die Massen beider Eimer antreiben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{\mathrm{res,total}}}{m_{\mathrm{total}}} = \frac{F_{G,2} - F_{G,1}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot g - m_1 \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \\ &= \frac{14.0\,\mathrm{kg} - 13.5\,\mathrm{kg}}{13.5\,\mathrm{kg} + 14.0\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.1784\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Die Kinematik liefert:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,\mathrm{m}}{0.178\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \underline{\underline{7.5\,\mathrm{s}}}$$

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0.1784\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 1.336\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{1.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

(c) An den Gewichtskräften ändert sich nichts im Vergleich zu Aufgabe (a), also: $F_{G,1} = \underline{\underline{132\,\mathrm{N}}}$ und $F_{G,2} = \underline{\underline{137\,\mathrm{N}}}$. Die Zugkraft hingegen wird in der Bewegung etwas grösser. Um dies zu berechnen, benötigen wir die auf einen der beiden Eimer wirkende resultierende Kraft. Z.B. bei Eimer 1:

$$F_{\mathrm{res},1} = m_1 \cdot a = 13.5\,\mathrm{kg} \cdot 0.1784\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2.408\,\mathrm{N}$$

Damit ergibt sich für die Zugkraft:

$$F_{\mathrm{res},1} = F_Z - F_{G,1} \qquad \Rightarrow \qquad F_Z = F_{\mathrm{res}} + F_{G,1} = 2.408\,\mathrm{N} + 132.4\,\mathrm{N} = 134.8\,\mathrm{N} = \underline{\underline{135\,\mathrm{N}}}$$

24. *Kraftübertragung beim Schieben mehrerer Körper*

(a) Die drei Klötze besitzen dieselbe Masse $m = 1.00\,\mathrm{kg}$ und erfahren aufgrund des Anschiebens von links alle dieselbe Beschleunigung a. Somit muss jeder Klotz **dieselbe resultierende Kraft** F_{res} erfahren:

$$F_{\mathrm{res,I}} = F_{\mathrm{res,II}} = F_{\mathrm{res,III}} = m \cdot a$$

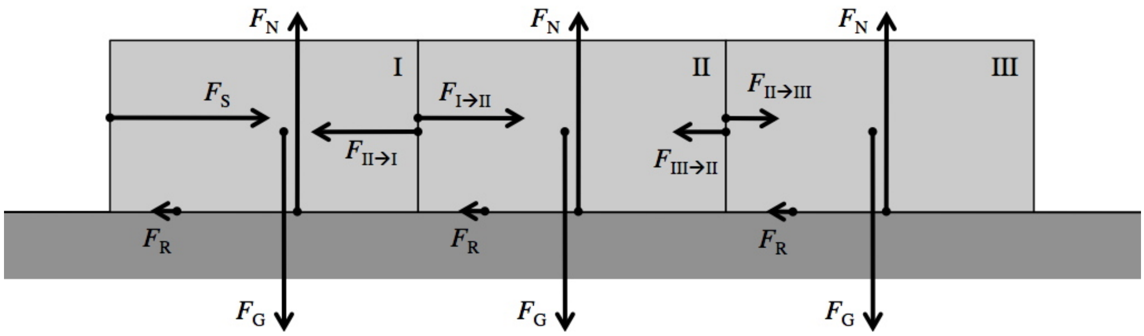
(b) Die Gleitreibungen eines einzelnen Klotzes und aller drei Klötze zusammen betragen:

$$F_R = \mu_G \cdot F_N = \mu_G \cdot F_G = \mu_G \cdot m \cdot g = 0.250 \cdot 1.00\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 2.453\,\mathrm{N} \qquad \Rightarrow \qquad F_{R,\mathrm{total}} = 3 \cdot F_R = 7.359\,\mathrm{N}$$

Somit folgt für die resultierende Kraft des ganzen Systems und für die Beschleunigung:

$$F_{\mathrm{res,total}} = F_S - F_{R,\mathrm{total}} = 10.0\,\mathrm{N} - 7.359\,\mathrm{N} = 2.641\,\mathrm{N} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F_{\mathrm{res,total}}}{m_{\mathrm{total}}} = \frac{2.641\,\mathrm{N}}{3.00\,\mathrm{kg}} = 0.8803\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{0.880\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

(c) Bei den Kräften zwischen den Klötzen handelt es sich um Normalkräfte! Sie rühren nämlich von der Stabilität der Klötze her. Im Detail sieht die Kräftesituation folgendermassen aus:



Legende:	F_G = Gewichtskraft auf einen Klotz	F_N = Normalkraft auf einen Klotz
	F_S = Schubkraft von links auf Klotz I	F_R = Reibungskraft auf einen Klotz
	$F_{I\to II}$ = Normalkraft von Klotz I auf Klotz II	$F_{II\to I}$ = Normalkraft von Klotz I auf Klotz II
	$F_{II\to III}$ = Normalkraft von Klotz II auf Klotz III	$F_{III\to II}$ = Normalkraft von Klotz III auf Klotz II

Klotz I kann keine Normalkraft auf Klotz II ausüben, ohne dass Klotz II auch eine genau gleich starke Normalkraft auf Klotz I ausübt! Dies ist die Aussage des 3. Newton'schen Axioms (*"actio = reactio"*). Es deckt sich mit unserer Alltagserfahrung: Drückst du z.B. mit der Handfläche gegen eine Wand, so erfährst du von dieser eine ebenso grosse Gegenkraft, was du deutlich spürst – deine Handfläche wird von der Wand gedrückt. Folglich gilt für die Normalkräfte zwischen den Klötzen:

$$F_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = F_{\mathrm{II}\to\mathrm{I}} \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} = F_{\mathrm{III}\to\mathrm{II}}$$

Alle drei Klötze sind vertikal in Ruhe, sodass für jeden Klotz gilt: $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$.

Wie wir unter (a) festgestellt hatten, sind die resultierenden Kräfte auf die drei Klötze alle gleich gross. Mit dem unter (b) bestimmten Beschleunigungswert erhalten wir dafür:

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a = 1.00\,\mathrm{kg} \cdot 0.8803\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.8803\,\mathrm{N}$$

Aufgrund der Kräfteskizze notieren wir nun zudem einzeln für diese drei gleich grossen resultierenden Kräfte:

für I: $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{S} - F_\mathrm{R} - F_{\mathrm{II}\to\mathrm{I}}$ für II: $F_\mathrm{res} = F_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} - F_\mathrm{R} - F_{\mathrm{III}\to\mathrm{II}}$ für III: $F_\mathrm{res} = F_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} - F_\mathrm{R}$

Mit der unter (b) berechneten Reibungskraft erhalten wir nun aus den Gleichungen für Klotz I und für Klotz III die gesuchten Normalkräfte zwischen den Klötzen:

$$F_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = F_{\mathrm{II}\to\mathrm{I}} = F_\mathrm{S} - F_\mathrm{res} - F_\mathrm{R} = 10.0\,\mathrm{N} - 0.8803\,\mathrm{N} - 2.453\,\mathrm{N} = 6.667\,\mathrm{N} = \underline{\underline{6.67\,\mathrm{N}}}$$

$$F_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{R} = 0.8803\,\mathrm{N} + 2.453\,\mathrm{N} = 3.333\,\mathrm{N} = \underline{\underline{3.33\,\mathrm{N}}}$$

Diese Resultate überraschen eigentlich nicht: Wenn die Schubkraft F_S links mit $10.0\,\mathrm{N}$ drei Klötze anschiebt und zu beschleunigen vermag, so schiebt die Kraft $F_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}}$ nur noch zwei und die Kraft $F_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}}$ nur noch einen Klotz an. Dafür ist nur noch $\frac{2}{3}$ resp. $\frac{1}{3}$ der Schubkraft links nötig, also eben $6.67\,\mathrm{N}$ und $3.33\,\mathrm{N}$.
In diesem Sinne hätte man die Resultate bereits problemlos voraussagen können. Es ist aber trotzdem eine gute Bestätigung, wenn sie eben so herauskommen bei einer genauen Analyse der Situation.

25. *Kraftübertragung bei Zügen*

Bei jedem Wagen beträgt die Rollreibung:

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{R} \cdot m \cdot g = 0.0050 \cdot 15\,500\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 760.3\,\mathrm{N}$$

Ausserdem wissen wir über die resultierende Kraft bei jedem Wagen:

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a = 15\,500\,\mathrm{kg} \cdot 0.32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4960\,\mathrm{N}$$

Die Zugkraft in der Kupplung zum letzten Wagen muss diesen Wagen beschleunigen ($\rightarrow F_\mathrm{res}$) und die Reibung kompensieren ($\rightarrow F_\mathrm{R}$). Sie beträgt somit:

$$F_{\mathrm{Z},34} = F_\mathrm{res} + F_\mathrm{R} = 4960\,\mathrm{N} + 760.3\,\mathrm{N} = 5720.3\,\mathrm{N} = \underline{\underline{5.7\,\mathrm{kN}}}$$

Die vorletzte Kupplung zieht zwei Wagen und muss diese beiden Wagen beschleunigen und ihre Reibungen kompensieren. Somit ergibt sich die doppelt so grosse Zugkraft wie in der Kupplung zum letzten Wagen, usw. Wir erhalten:

Kupplung Wagen 3 – Wagen 4:	$F_{\mathrm{Z},34} = 5720.3\,\mathrm{N} = \underline{\underline{5.7\,\mathrm{kN}}}$
Kupplung Wagen 2 – Wagen 3:	$F_{\mathrm{Z},23} = 11\,440.6\,\mathrm{N} = \underline{\underline{11\,\mathrm{kN}}}$
Kupplung Wagen 1 – Wagen 2:	$F_{\mathrm{Z},12} = 17\,160.9\,\mathrm{N} = \underline{\underline{17\,\mathrm{kN}}}$
Kupplung Lok – Wagen 1:	$F_{\mathrm{Z,L1}} = 22\,881.2\,\mathrm{N} = \underline{\underline{23\,\mathrm{kN}}}$

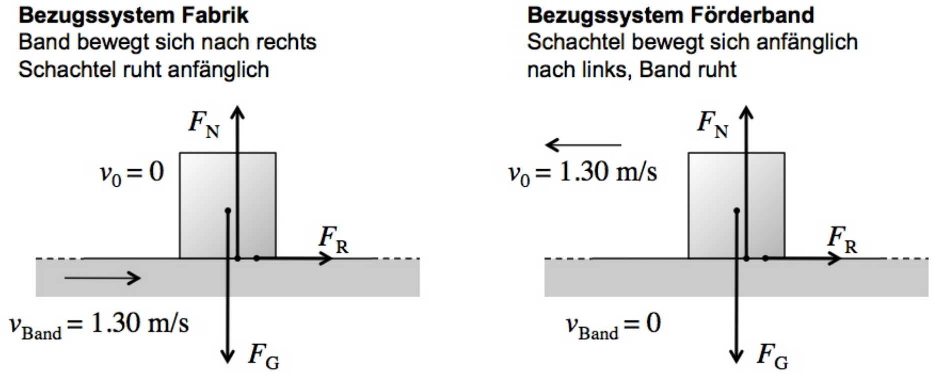
Natürlich liesse sich eine detaillierte Aufstellung analog zu Aufgabe 24 aufstellen. Für jeden Wagen gilt separat $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$ und für Wagen 2 liesse sich beispielsweise schreiben:

$$F_{\mathrm{res},2} = F_{\mathrm{Z},12} - F_{\mathrm{Z},23} - F_\mathrm{R}$$

26. *Schokolade auf dem Förderband*

(a) Angenommen, wir stellen zuerst eine Kamera neben das Förderband, so sehen wir in deren Bild das Band mit $1.30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ z.B. nach rechts fahren. Die Schokoladenschachtel fällt aus dieser Perspektive senkrecht auf das Band und dieses rutscht im ersten Moment unter der Schachtel durch.

Nun wechseln wir die Perspektive und setzen die Kamera auf das Band. Nun ist das Förderband im Kamerabild ruhend und die Schachtel fällt mit einer nach links gerichteten Geschwindigkeit von $1.30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf das Band:



Auch in dieser neuen Perspektive gilt das Newton'sche Aktionsprinzip und wir können die Kraftsituation analysieren. Die Gleitreibung F_R sorgt für die Bremsung der Schachtel. Sie macht alleine die resultierende Kraft aus!Da uns die Masse der Schachtel als Angabe fehlt, schreiben wir rein formal:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{G} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{G} \cdot m \cdot g$$

Aus der resultierenden Kraft bestimmen wir die Beschleunigung, wobei sich die fehlende Masse gerade wegkürzt:

$$a = \frac{F_\mathrm{res}}{m} = \frac{\mu_\mathrm{G} \cdot m \cdot g}{m} = \mu_\mathrm{G} \cdot g = 0.33 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3.24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Daraus schliessen wir auf die Bremszeit (gmbBoa mit Zeitumkehr):

$$v = a \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v}{a} = \frac{1.30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3.24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.401\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0.40\,\mathrm{s}}}$$

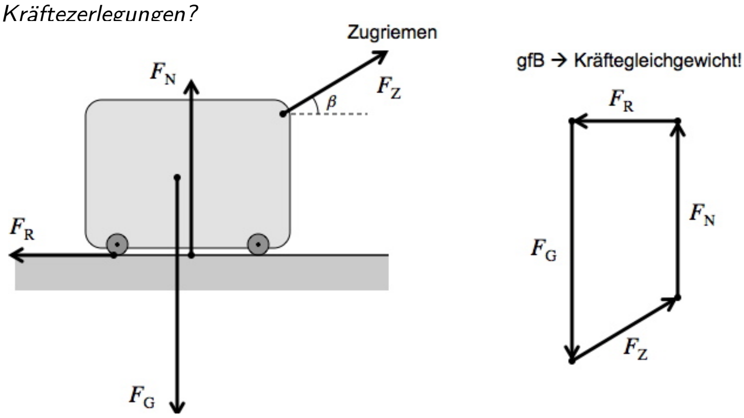
(b) Als Gleitstrecke ergibt sich:

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(1.30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 3.24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.261\,\mathrm{m} = \underline{\underline{26\,\mathrm{cm}}}$$

27. *Der Rollkoffer – oder: Hast du den Durchblick bei Kräftezerlegungen?*

(a) Rechts siehst du die Kräfteskizze.

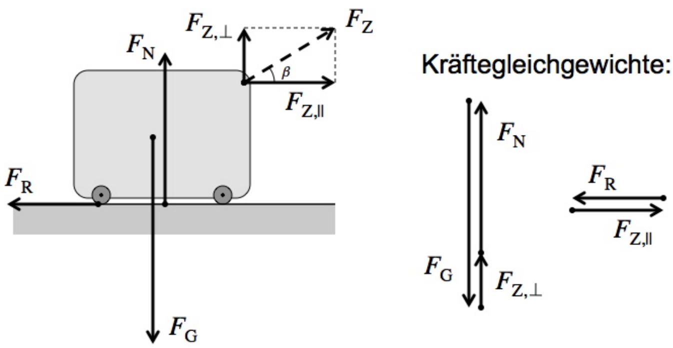
Da es sich um eine gleichförmige Bewegung (gfB) handelt, muss ein Kräftegleichgewicht vorhanden sein. Die Pfeilkette schliesst sich.
Bereits wird klar, dass hier für einmal $F_\mathrm{N} \neq F_\mathrm{G}$ ist. Die Zugkraft F_Z des Riemens hilft teilweise mit den Koffer zu tragen!



(b) Rechts unten siehst du die Kräftezerlegung und die daraus folgenden Kräftegleichgewichte in der Horizontalen und der Vertikalen.

Es ergeben sich die folgenden Kraftgleichungen:

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{N} + F_{\mathrm{Z},\perp} \quad \text{und} \quad F_{\mathrm{Z},\parallel} = F_\mathrm{R}$$



(c) Diese Antwort wurde bereits unter (a) angeschnitten und kann nun präzisiert werden: die Senkrecht-Komponente $F_{\mathrm{Z},\perp}$ der Zugkraft F_Z trägt den Koffer mit.
Die Normalkraft F_N muss die Gewichtskraft F_G nicht mehr alleine kompensieren.

(d) Aus den rechtwinkligen Dreiecken bei der Kräftezerlegung lesen wir ab:

$$\sin\beta = \frac{F_{\mathrm{Z},\perp}}{F_\mathrm{Z}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{Z},\perp} = F_\mathrm{Z}\cdot\sin\beta \qquad \text{und} \qquad \cos\beta = \frac{F_{\mathrm{Z},\parallel}}{F_\mathrm{Z}} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{Z},\parallel} = F_\mathrm{Z}\cdot\cos\beta$$

(e) Für die Gewichtskraft erhalten wir aus der Koffermasse:

$$F_\mathrm{G} = m\cdot g = 12.7\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 124.6\,\mathrm{N}$$

Des weiteren ergibt sich für die Komponenten von F_Z:

$$F_{\mathrm{Z},\perp} = F_\mathrm{Z}\cdot\sin\beta = 8.9\,\mathrm{N}\cdot\sin 36^\circ = 5.23\,\mathrm{N} \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{Z},\parallel} = F_\mathrm{Z}\cdot\cos\beta = 8.9\,\mathrm{N}\cdot\cos 36^\circ = 7.20\,\mathrm{N}$$

Damit ergibt sich aus der vertikalen Kraftgleichung für die Normalkraft:

$$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} - F_{\mathrm{Z},\perp} = 124.6\,\mathrm{N} - 5.23\,\mathrm{N} = 119.37\,\mathrm{N} = \underline{\underline{120\,\mathrm{N}}}$$

Die Reibungskraft ist gleich der Parallel-Komponente der Zugkraft, also: $F_\mathrm{R} = F_{\mathrm{Z},\parallel} = 7.20\,\mathrm{N} = \underline{\underline{7.2\,\mathrm{N}}}$.
Aus Reibungs- und Normalkraft lässt sich schliesslich auch die Rollreibungszahl bestimmen:

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R}\cdot F_\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{R} = \frac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{N}} = \frac{7.20\,\mathrm{N}}{119.37\,\mathrm{N}} = 0.0603 = \underline{\underline{0.060}}$$

Der Rollkoffer scheint gut geölt zu sein.

28. *Auf dem Skilift – die Master-Aufgabe zur Kräftezerlegung*

Wir gehen, was in der Aufgabenstellung leider nicht deutlich gesagt wird, von einer gleichförmigen Bewegung aus. D.h., es herrscht ein Kräftegleichgewicht.

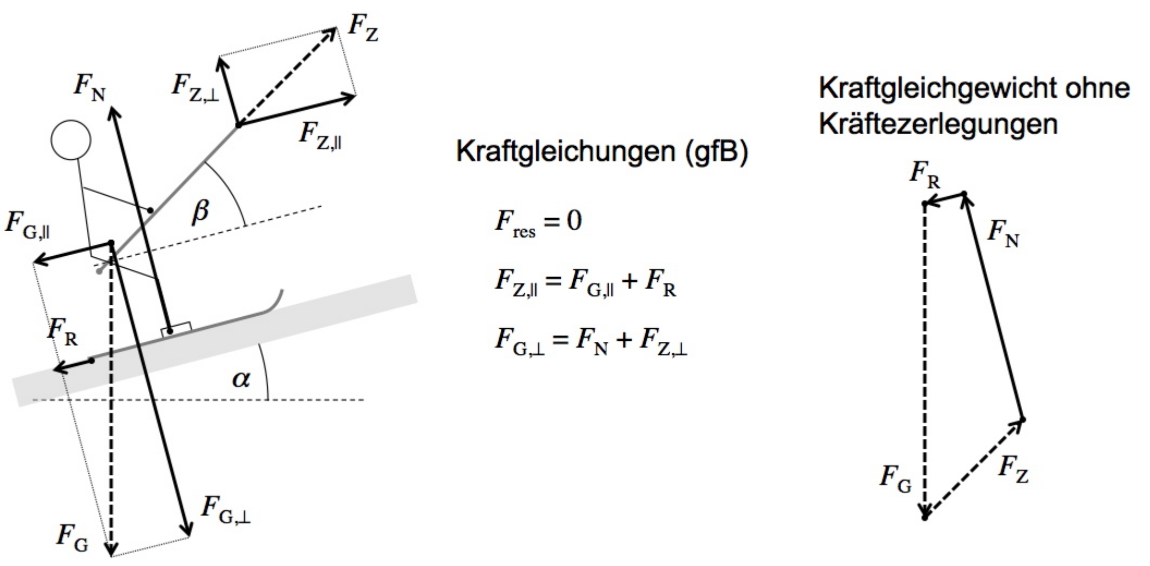
In der Kräfteskizze oben auf der nächsten Seite werden die Gewichtskraft und die Zugkraft auf den Bügel zerlegt und wir erhalten zwei Kraftgleichungen – eine parallel und eine senkrecht zum Hang.

Rein rechnerisch ist die Aufgabe damit schliesslich rasch gelöst. Für die Senkrecht-Komponenten von F_G und F_Z ergibt sich:

$$F_{\mathrm{G},\perp} = m\cdot g\cdot\cos\alpha = 92\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot\cos 13^\circ = 879\,\mathrm{N} \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{Z},\perp} = F_\mathrm{Z}\cdot\sin\beta = 520\,\mathrm{N}\cdot\sin 23^\circ = 203\,\mathrm{N}$$

Damit erhalten wir für die Normalkraft:

$$F_\mathrm{N} = F_{\mathrm{G},\perp} - F_{\mathrm{Z},\perp} = 879\,\mathrm{N} - 203\,\mathrm{N} = 676\,\mathrm{N} = \underline{\underline{680\,\mathrm{N}}}$$



29. *Gleichgewichtssuche*

(a) Bemerke: m_1 ist gerade doppelt so gross wie m_2!

i. Angetrieben resp. gebremst wird das System von den beiden Parallel-Komponenten der Gewichtskräfte. D.h., es kommt auf einen Vergleich dieser beiden Kraftkomponenten an, wenn beurteilt werden soll, in welche Richtung das System beschleunigt:

$$F_{\mathrm{G},\parallel,1} = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = 0.2500\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \sin 25.0^\circ = 1.0365\,\mathrm{N}$$

und $$F_{\mathrm{G},\parallel,2} = m_2 \cdot g \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 0.1250\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \sin(90^\circ - 25.0^\circ) = 1.111\,\mathrm{N}$$

Somit beschleunigen die Gewichtssteine **nach rechts**. m_1 wird nach oben gezogen und m_2 geht nach unten. Für die Beschleunigung ergibt sich:

$$F_{\mathrm{res,total}} = F_{\mathrm{G},\parallel,2} - F_{\mathrm{G},\parallel,1} = 1.1114\,\mathrm{N} - 1.0365\,\mathrm{N} = 0.0749\,\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F_{\mathrm{res,total}}}{m_{\mathrm{total}}} = \frac{0.0749\,\mathrm{N}}{0.2500\,\mathrm{kg} + 0.1250\,\mathrm{kg}} = 0.202\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{0.20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

ii. Wir betrachten die einzelnen resultierenden Kräfte auf die beiden Massen:

$$F_{\mathrm{res},1} = F_{\mathrm{Z}} - F_{\mathrm{G},\parallel,1} \quad \text{und} \quad F_{\mathrm{res},2} = F_{\mathrm{Z}} + F_{\mathrm{G},\parallel,2}$$

Für die Zugkraft ergibt sich beispielsweise aus der ersten Gleichung:

$$F_{\mathrm{Z}} = F_{\mathrm{res},1} + F_{\mathrm{G},\parallel,1} = m_1 \cdot a + F_{\mathrm{G},\parallel,1} = 0.2500\,\mathrm{kg} \cdot 0.202\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 1.0365\,\mathrm{N} = 1.087\,\mathrm{N} = \underline{\underline{1.1\,\mathrm{N}}}$$

(b) Es müsste gelten:

$$F_{\mathrm{G},\parallel,1} = F_{\mathrm{G},\parallel,2} \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot g \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

An dieser Stelle kommt man nun gar nicht mehr drum herum, die Umformungshinweise unter (c) anzuwenden. Man muss formal weiterrechnen:

$$m_1 \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = \arctan\left(\frac{0.1250\,\mathrm{kg}}{0.2500\,\mathrm{kg}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57^\circ = \underline{\underline{26.6^\circ}}$$

(c) Wie eben gezeigt gilt allgemein: $\underline{\underline{\alpha = \arctan\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}}$.

(d) Da $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, müsste gelten: $m_1 : m_2 = \underline{\underline{1 : \sqrt{3}}}$.