Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 6

1. *Die Kugel im Hula-Hoop-Reif*

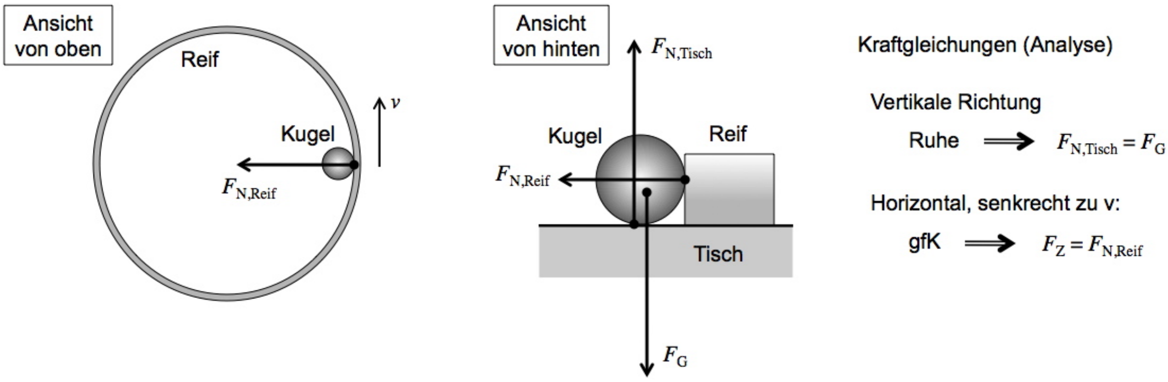
   (a) Für Messwerte erahalten wir z.B.: $r = 34\,\mathrm{cm} = 0.34\,\mathrm{m}$, $T = 2.5\,\mathrm{s}$ und $m = 54.8\,\mathrm{g} = 0.0548\,\mathrm{kg}$. Daraus ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.34\,\mathrm{m}}{2.5\,\mathrm{s}} = 0.8545\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(Zwischenresultat)}$$

   (b) Somit ergibt sich für die Zentripetalbeschleunigung:

   $$a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(0.8545\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.34\,\mathrm{m}} = 2.148\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(Zwischenresultat)}$$

   (c) Die Kugel wird durch die **Normalkraft der Reifeninnenwand** $F_\mathrm{N,Reif}$ auf der Kreisbahn gehalten, wie aus der Kräfteskizze klar wird:

   (In der Ansicht von hinten schaut man der rollenden Kugel nach. Sie rollt also "ins Blatt hinein".)

   (d) Da die Normalkraft $F_\mathrm{N,Reif}$ gerade die Zentripetalkraft ausmachen muss, folgt für ihren Betrag:

   $$F_\mathrm{N,Reif} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot a_\mathrm{Z} = 0.0548\,\mathrm{kg} \cdot 2.148\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.118\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{120\,\mathrm{mN}}}$$

   Die zwei Berechnungsschritte lassen sich formal auch zu einem einzigen zusammenfassen:

   $$F_\mathrm{N,Reif} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{m \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

   Damit wird klar, dass der Bahnradius nur als einfacher Faktor in die Berechnung mit einfliesst.

   (e) $1\,\mathrm{N}$ entspricht etwa der Gewichtskraft von $100\,\mathrm{g}$ Masse an der Erdoberfläche und ist somit eine nicht besonders grosse, aber doch anschauliche Einheit. 120 Millinewton ist demzufolge ein sehr kleiner Kraftbetrag. Er entspricht in etwa der Gewichtskraft von $12\,\mathrm{g}$ Masse.
   Der Reif ist durch die rollende Kugel also nur sehr wenig belastet!

2. *Alltägliche Bahngeschwindigkeiten im Sonnensystem*

   (a) Für die Bahngeschwindigkeit am Äquator ergibt sich:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6370\,\mathrm{km}}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{0.463\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(am besten merken!)}$$

   (b) Für die Bahngeschwindigkeit der Erde erhalten wir:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 149\,600\,000\,\mathrm{km}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{29.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}} \approx 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(ebenfalls merken!)}$$

(c) Mittels einer kleinen Umstellung erhalten wir für den Bahnradius:

$$r=\frac{v\cdot T}{2\pi}=\frac{7.65\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\cdot 93.2\cdot 60\,\mathrm{s}}{2\pi}=6808\,\mathrm{km}$$

Davon ist der Erdradius zu subtrahieren, um die Flughöhe zu erhalten:

$$h=r-R_{\mathrm{E}}=6808\,\mathrm{km}-6370\,\mathrm{km}\simeq\underline{\underline{438\,\mathrm{km}}}$$

3. *Hammerwerfen*

Der Werfer hält den Hammer mit der Zugkraft im Stahlseil auf seiner Kreisbahn. Diese Zugkraft ist gleich der Zentripetalkraft, die der Hammer für seine Kreisbewegung erfahren muss ($v=105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=29.17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$):

$$F_{\mathrm{Zug}}=F_{\mathrm{Z}}=\frac{m\cdot v^2}{r}=\frac{7.0\,\mathrm{kg}\cdot\left(29.17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1.7\,\mathrm{m}}\simeq\underline{\underline{3500\,\mathrm{N}}}$$

4. *Die Karussellfahrt*

(a) Für die Umlaufszeit ergibt sich:

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\cdot 5.25\,\mathrm{m}}{4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=8.046\,\mathrm{s}\simeq\underline{\underline{8.0\,\mathrm{s}}}$$

(b) Für die Zentripetalkraft erhalten wir:

$$F_{\mathrm{Z}}=\frac{mv^2}{r}=\frac{27\,\mathrm{kg}\cdot\left(4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5.25\,\mathrm{m}}=86.45\,\mathrm{N}\simeq\underline{\underline{86\,\mathrm{N}}}$$

(c) Das Kind erfährt vor allem Kräfte in vertikaler (v) und in radialer (r) Richtung:

Vertikal: Das Kind sitzt auf dem "Rössli". D.h., seine Gewichtskraft F_{G} wird durch die Normalkraft $F_{\mathrm{N,v}}$ des Sattels ausgeglichen: $F_{\mathrm{N,v}}=F_{\mathrm{G}}$.

Radial: Damit das Kind auf der Kreisbahn bleibt, muss es durch eine Kraft in Richtung Zentrum des Karussell gedrückt werden. Dies ist wiederum eine Normalkraft $F_{\mathrm{N,r}}$, die von der Stabilität des "Rösslis" herrührt. Es gilt: $F_{\mathrm{Z}}=F_{\mathrm{N,r}}$. Diese Normalkraft spürt das Kind vor allem an seinem inneren Oberschenkel. Dadurch, dass es sich ein wenig gegen das Karussell-Zentrum neigt, kann es den Druck dieser Normalkraft etwas mehr auf seinen "Hintern" verlagern.

5. *Die Formel für die Zentripetalkraft*

Die Geschwindigkeit v beschreibt, wie schnell die Masse in eine bestimmte Richtung unterwegs ist. Eine grosse Geschwindigkeit bedeutet auf einer Kreisbahn allerdings auch, dass sich die Bewegungsrichtung rasch verändert. Und dafür braucht es eben eine deutlich grössere Zentripetalkraft, weshalb v im Zähler von $F_{\mathrm{Z}}=\frac{m\cdot v^2}{r}$ und dort sogar quadratisch auftritt.

Der tiefere Grund hierfür liegt in der Trägheit der Masse, welche den Bewegungszustand und somit eben auch die Bewegungsrichtung ohne Kraftwirkung einfach aufrecht erhalten würde.

Der Bahnradius r gibt an, ob es sich um eine weite oder eine enge Kurve handelt. Bei kleinem Bahnradiusändert sich die Bewegungsrichtung viel rascher, als wenn sich die Masse bei gleicher Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit grossen Radius bewegt. Dementsprechend muss die Zentripetalkraft bei kleinerem Radius grösser sein und wir treffen r im Nenner von $F_{\mathrm{Z}}=\frac{m\cdot v^2}{2}$ an.

Erneut ist dies eine Auswirkung der Massenträgheit (vgl. oben).

6. *Der Gummiball an der Schnur*

   (a) Für die Bahngeschwindigkeit des Gummiballs ergibt sich:

   $$v = \frac{2\pi\, r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.55\,\mathrm{m}}{1.0\,\mathrm{s}} = 3.46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   Damit folgt für die Zentripetal- resp. Zugkraft:

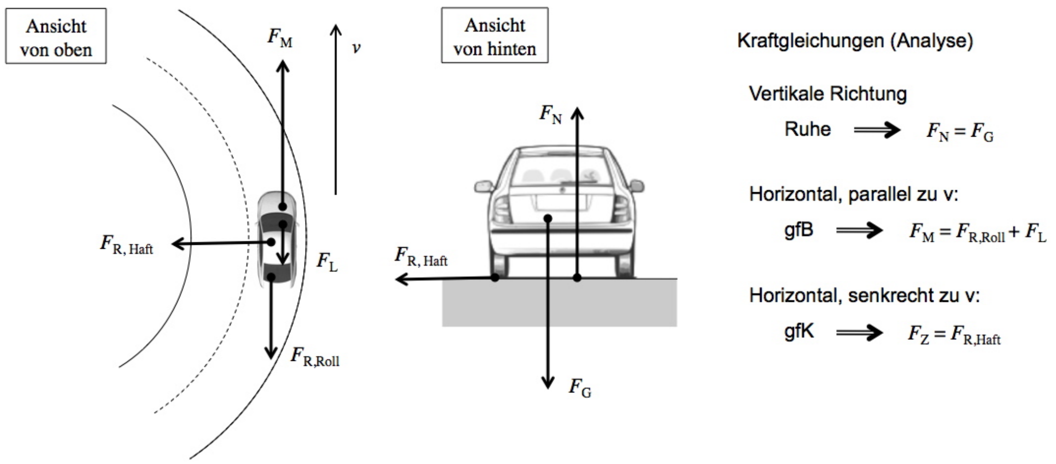
   $$F_{\mathrm{Zug}} \approx F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{0.082\,\mathrm{kg} \cdot \left(3.46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.55\,\mathrm{m}} = 1.78\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{1.8\,\mathrm{N}}}$$

   (b) Da die Geschwindigkeit in der Zentripetalkraftsformel im Quadrat vorkommt, ergibt sich bei ihrer Verdoppelung die vierfache und bei ihrer Verdreifachung die neunfache Zugkraft, d.h.:

   $$F_{\mathrm{Z,2v}} = 4 \cdot F_{\mathrm{Z,1v}} \simeq \underline{\underline{7.1\,\mathrm{N}}} \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{Z,3v}} = 9 \cdot F_{\mathrm{Z,1v}} \simeq \underline{\underline{16\,\mathrm{N}}}$$

7. *Kurvenfahrt im Auto* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

   Die Kraftanalyse ergibt drei Kraftgleichungen – für jede Raumdimension eine:



   Die Strasse zieht das Auto durch die seitliche Haftreibung $F_{\mathrm{R,Haft}}$ mit den Pneus nach links. Dies sieht man im Bild, welches ein Rad von hinten zeigt.

8. *Achtung nasse Strasse!*

   Für die maximale Haftreibungskraft $F_{\mathrm{R,Haft,max}}$ erhalten wir bei diesen Witterungsbedingungen:

   $$F_{\mathrm{R,Haft,max}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{G}} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g = 0.31 \cdot 1300\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 3950\,\mathrm{N}$$

   Die für die Kurvenfahrt benötigte Zentripetalkraft darf diesen Grenzbetrag nicht überschreiten, was eine Obergrenze für die Geschwindigkeit festlegt:

   $$F_{\mathrm{Z,max}} = \frac{m \cdot v_{\mathrm{max}}^2}{r} = F_{\mathrm{R,Haft,max}}$$

   $$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{R,Haft,max}} \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{3950\,\mathrm{N} \cdot 99\,\mathrm{m}}{1300\,\mathrm{kg}}} = 17.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{\underline{62\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} < 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

   Bei nassen Strassenverhältnissen muss man diese Kurve also deutlich langsamer als mit dem angegebenen Tempolimit fahren!

   Die Masse ist übrigens für v_{max} irrelevant, was aus einer rein formalen Rechnung folgt:

   $$F_{\mathrm{Z,max}} = \frac{m \cdot v_{\mathrm{max}}^2}{r} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot m \cdot g = F_{\mathrm{R,Haft,max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{max}}^2}{r} = \mu_{\mathrm{H}} \cdot g \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\mu_{\mathrm{H}} \cdot g \cdot r}$$

   Mit grösserer Automasse ist zwar die Trägheit des Autos grösser, aber durch das grössere Gewicht wird auch die Reibungskraft entsprechend vergrössert.

9. *Etwas ausführlichere Fahrphysik – der Kamm'sche Kreis*

Wir betrachten zunächst die Kraftgleichung längs $\vec{v}$, aus der wir auf die Motorenkraft resp. eben auf die Komponente der Haftreibung in Fahrtrichtung schliessen können:

$$F_{\text{Haft,vorwärts}} = F_{\parallel} = F_{\text{res}} + F_{\text{Roll}} + F_{\text{L}}$$

Resultierende Kraft und Rollreibung müssen vorab berechnet werden, während der aktuelle Luftwiderstand bereits gegeben ist:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a = 1250\,\text{kg} \cdot 2.7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3375\,\text{N}$$

$$F_{\text{Roll}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{R}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{R}} \cdot m \cdot g = 0.030 \cdot 1250\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 368\,\text{N}$$

Dabei haben wir das vertikale Kräftegleichgewicht $F_{\text{N}} = F_{\text{G}}$ verwendet.

Somit ergibt sich für die Haftreibungskomponente in Vorwärtsrichtung:

$$F_{\parallel} = F_{\text{res}} + F_{\text{Roll}} + F_{\text{L}} = 3375\,\text{N} + 368\,\text{N} + 350\,\text{N} = 4093\,\text{N}$$

Aus der angegebenen Haftreibungszahl lässt sich die maximal mögliche Haftreibung bestimmen:

$$F_{\text{Haft,max}} = \mu_{\text{H}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{H}} \cdot F_{\text{N}} = \mu_{\text{H}} \cdot m \cdot g = 0.74 \cdot 1250\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9074\,\text{N}$$

Nun verwenden wir den Kamm'schen Kreis resp. den Satz des Pythagoras, um aus der Vorwärtskomponente der Haftreibung und ihrem maximalen Betrag den maximalen Betrag der seitlichen Komponente der Haftreibung zu bestimmen:

$$F_{\perp,\text{max}} = \sqrt{F_{\text{Haft,max}}^2 - F_{\parallel}^2} = \sqrt{(9074\,\text{N})^2 - (4093\,\text{N})^2} = 8099\,\text{N}$$

Diese maximal mögliche seitliche Haftreibungskomponente gibt die maximal mögliche Zentripetalkraft vor, denn die seitliche Kraftgleichung während der Kurvenfahrt lautet nach wie vor $F_{\text{Z}} = F_{\text{Haft,seitwärts}} = F_{\perp}$, also auch $F_{\text{Z,max}} = F_{\text{perp,max}}$.

Aus diesem Zusammenhang schliessen wir nun auf die maximal mögliche Geschwindigkeit v_{max}:

$$F_{\text{Z,max}} = \frac{m \cdot v_{\text{max}}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{F_{\text{Z,max}} \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{8099\,\text{N} \cdot 41\,\text{N}}{1250\,\text{kg}}} = 16.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq \underline{\underline{59\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$