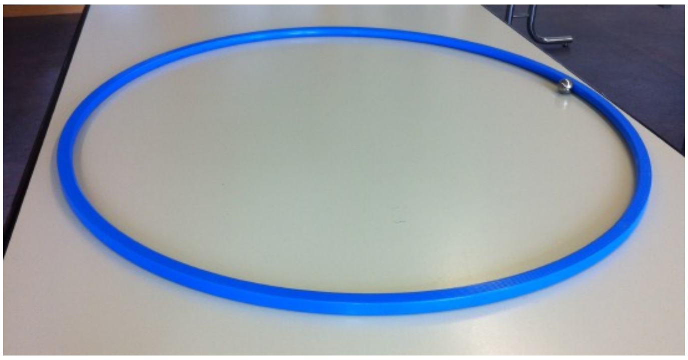
Übungen zur Mechanik

Serie 6: Kinematik und Dynamik bei Kreisbewegungen

1. *Die Kugel im Hula-Hoop-Reif*

   Du kennst den Hula-Hoop-Reif aus der Gymnastik. Legen wir diesen Reif horizontal auf einen Tisch, so können wir eine Stahlkugel darin kreisen lassen:

   Aufgrund der geringen Rollreibung bleibt die Kugel dabei lange Zeit etwa gleich schnell, weshalb wir näherungsweise von einer gleichförmigen Kreisbewegung (gfK) ausgehen dürfen.

   (a) Wir messen Radius, Umlaufszeit und Masse der Kugel im Hula-Hoop-Reif:

   $r =$ $\qquad\qquad$ $T =$ $\qquad\qquad$ $m =$

   Wie gross ist demnach die Bahngeschwindigkeit der Kugel im Reif?

   (b) Welche Zentripetalbeschleunigung erfährt die Kugel aufgrund der unter (a) erhobenen Messdaten?

   (c) Welche Kraft (Art?) hält die Kugel ganz konkret auf ihrer Kreisbahn? Anders gefragt: Wie setzt sich hier die Zentripetalkraft (= Name von F_{res} im Falle einer gfK) zusammen?
   Zeichne eine Kräfteskizze und lies daraus die Kraftgleichungen ab!

   (d) Wie stark wird der Innenrand des Reifs am aktuellen Ort der Kugel belastet?
   Vorüberlegung: Welche Grösse müssen wir zusätzlich zu den unter (a) ermittelten Messwerten zur Beantwortung dieser Frage noch kennen?

   (e) Zum Kraftbetrag $1\,\text{N}$ sollten Sie eine konkrete Vorstellung haben ("$1\,\text{N}$ entspricht in etwa...").
   Kommentiere die Antwort zu (d), indem du sie mit dieser Vorstellung vergleichst.

2. *Alltägliche Bahngeschwindigkeiten im Sonnensystem*

   (a) Die Erde dreht sich bekanntlich einmal pro Tag um ihre Rotationsachse. Wie gross ist demzufolge die Bahngeschwindigkeit eines Menschen am Äquator aufgrund der Erdrotation?
   Gib diese Geschwindigkeit einmal in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ und einmal in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

   (b) Den mittleren Abstand zwischen Sonnenmittelpunkt und Erdmittelpunkt bezeichnet man als **Astronomische Einheit** AE. Es gilt:

   $$1\,\text{AE} = 149\,600\,000\,\text{km}$$

   Wie gross ist somit die mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne?

   (c) Ein typischer Kommunikationssatellit umrundet die Erde mit einer Bahngeschwindigkeit von z.B. $7.65\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dafür braucht er $93.2\,\text{min}$.
   Wie viele Kilometer über der Erdoberfläche ist der Satellit unterwegs?
   Hinweis: Mittlerer Erdradius $R_{\text{E}} = 6370\,\text{km}$.

3. *Hammerwerfen*

Beim Abwurf erreicht ein Leichtathletik-Hammer bei Spitzenwerfern eine Geschwindigkeit von $105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Die Hammerkugel besitzt eine Masse von $7.0\,\mathrm{kg}$. Berechne, mit welcher Kraft der Werfer den Hammer kurz vor dem Abwurf halten muss, wenn dieser sich in diesem Moment auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $1.7\,\mathrm{m}$ befindet.

4. *Die Karussellfahrt*

Ein Kind mit einer Masse von $27\,\mathrm{kg}$ fährt ein paar Runden auf dem Rücken eines "Karussellrösslis". Der Durchmesser seiner Kreisbahn beträgt dabei $10.5\,\mathrm{m}$. Bei maximaler Fahrt ist das Kind mit einer Geschwindigkeit von $4.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unterwegs.

   (a) Wie lange dauert **eine Umdrehung** des Karussells?

   (b) Wie gross ist die **Zentripetalkraft**, die das Kind erfährt?

   (c) Welche **Kräfte** sind dafür verantwortlich, dass das Kind auf der Kreisbahn bleibt?
   Wie kommt also die auf das Kind wirkende Zentripetalkraft zustande?
   Nenne die Namen der entsprechenden Kräfte und schildere, was du damit meinst (Skizze!).

5. *Die Formel für die Zentripetalkraft*

Beschreibt ein Körper der Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung mit Geschwindigkeitsbetrag v und Bahnradius r, so muss auf ihn eine resultierende Kraft wirken, welche ins Zentrum der Kreisbahn zeigt. Wir bezeichnen F_{res} in diesem Fall als **Zentripetalkraft** F_{Z}. Es gilt:

$$F_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Erläutere den physikalischen Inhalt dieser Gleichung. Warum treten die drei Grössen m, v und r darin gerade so auf? Welche qualitativen Aussagen stecken dahinter?

Ein Beispiel: "Die Masse steht für die Trägheit des Körpers, also sein Bestreben, seinen aktuellen Bewegungszustand (Geschwindigkeitsbetrag und Bewegungsrichtung) aufrechtzuerhalten. Daraus folgt: Will ich den Körper von seiner Trägheitsbahn ablenken, so brauche ich dafür umso mehr Kraft, je grösser seine Masse ist. Darum muss die Zentripetalkraft umso grösser sein, je grösser die Masse des Körpers ist, und die Masse m taucht im Zähler der Formel für die Zentripetalkraft auf!"

Mache nun analoge Aussagen für den Bahnradius r und die Bahngeschwindigkeit v.

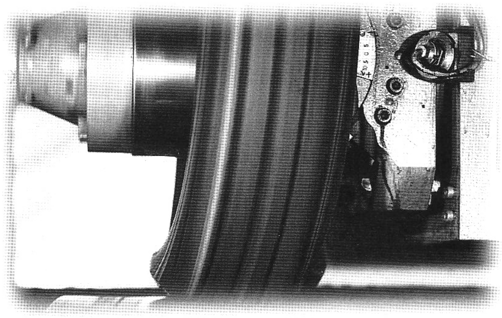
6. *Der Gummiball an der Schnur*

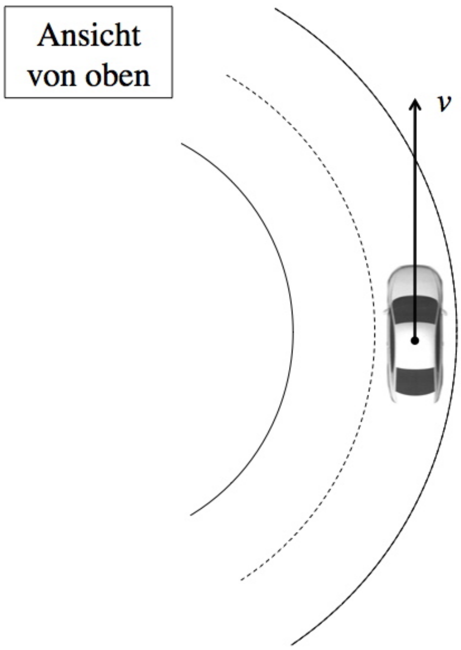
   (a) Du schwingst einen Gummiball von $82\,\mathrm{g}$ Masse an einem Faden von $55\,\mathrm{cm}$ Länge fast horizontal um Ihre Hand. Eine Runde soll $1.0\,\mathrm{s}$ dauern. In dieser Situation muss die von deiner Hand erzeugte Zugkraft im Faden gerade ungefähr gleich der Zentripetalkraft sein.
   (Dies stimmt nur ungefähr, weil der Gummiball gleichzeitig schwer ist und eine Gewichtskraft nach unten erfährt. Streng genommen muss deine Zugkraft also etwas grösser sein, weil du damit noch einen Teil der Gewichtskraft kompensieren musst.)
   Berechne, mit welcher Kraft du in der geschilderten Situation an der Schnur ziehst.

   (b) Wie gross wird die Zugkraft, wenn du den Ball doppelt oder dreimal so schnell kreisen lässt?

7. *Kurvenfahrt im Auto* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

   Das nebenstehende Bild zeigt einen Autopneu während einer Kurvenfahrt.
   Erläutere die Kräftesituation des Autos in der Kurve anhand der folgenden Skizzen. Überlege dir genau, welche Kräfte in welche Richtungen auf das Auto wirken müssen, damit es eine gfK ausführt. Damit erklärst du anschliessend, weshalb der Pneu auf dem Bild rechts auf diese Weise verformt wird und aus welcher Perspektive man ihn demzufolge sieht.





8. *Achtung nasse Strasse!* **(≈ Zwischenprüfungsaufgabe)**

   Dies ist die Fortsetzung von Aufgabe 7! Sie sollten die dortige Kräftesituation vor Augen haben.

   Ein Auto ($m = 1300\,\mathrm{kg}$) fährt bei strömendem Regen auf einer Überlandstrasse (Tempolimit 80 km/h). Das zahlreiche Wasser auf der Strasse verringert die seitliche Haftreibungszahl μ_H zwischen Strasse und Pneus auf einen Wert von lediglich 0.31 (vgl. ca. 0.7 bei trockener Strasse). Das Auto nähert sich einer Kurve, deren engster Radius gerade $99\,\mathrm{m}$ beträgt.

   Mit wie vielen $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ darf das Auto maximal durch die Kurve fahren, ohne ins Schleudern zu kommen?

   Hinweis: Die maximale Haftreibungskraft ist gegeben durch $F_\mathrm{R,max} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N}$.

   Hinweis: Wir wollen hier fälschlicherweise davon ausgehen, dass die gesamte Haftreibungskraft für die seitliche Haftung, also für die Kurvenfahrt verwendet werden kann. Das ist so nicht ganz richtig.

   In der nächsten Aufgabe schauen wir denselben Sachverhalt nochmals genauer an. Wir werden sehen, dass das Auto bei gleichförmiger Fahrt durch die Kurve auch Haftung in Fahrtrichtung benötigt. Dies vermindert die maximal mögliche seitliche Haftung. Aber eins nach dem anderen...

9. *Etwas ausführlichere Fahrphysik – der Kamm'sche Kreis*

Wir betrachten ein Auto bei bestimmten Strassenbedingungen, sodass die Haftreibungszahl μ_H und somit auch die maximal mögliche Haftreibungskraft $F_\mathrm{Haft,max}$ vorgegeben sind:

$$F_\mathrm{Haft,max} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{H} \cdot m \cdot g$$

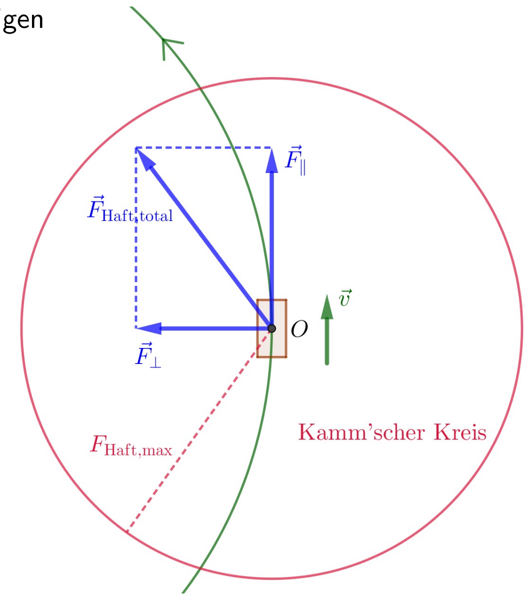
Dabei gehe ich vom Kräftegleichgewicht zwischen Gewichts- und Normalkraft aus, also davon, dass das Auto keinen zusätzlichen Abtrieb durch Spoiler o.Ä. erfährt ($\Rightarrow F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} = m \cdot g$).

Wofür wird die Haftreibungskraft F_Haft zwischen Pneus und Strasse benötigt? Für die verschiedenen "Fahraktionen"! Dabei lässt sich grundsätzlich zwischen zwei Richtungen unterscheiden:

Parallel zur Bewegungsrichtung: In dieser Richtung kennen wir die Haftreibung bis anhin unter anderen Namen. Wir haben sie als **Motorenkraft** oder auch als **Bremskraft** bezeichnet. Die Kraftübertragung zwischen Strasse und Auto erfolgt aber eben über die Haftung der Pneus auf dem Asphalt. Ein Auto beschleunigt im Normalfall aufgrund der Haftreibung, die es von der Strasse in Vorwärtsrichtung anstösst. Und beim Bremsen müssen die Pneus idealerweise ebenfalls haften, damit das Auto eine möglichst grosse Beschleunigung entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung erfahren kann. (Gleiten resp. Rutschen bremst zwar auch, ist aber weniger effektiv als Haften.)

Senkrecht zur Bewegungsrichtung: Wie wir mittlerweile herausgefunden haben, wird die seitliche Haftreibung für Kurvenfahrten benötigt, denn sie erzeugt die dafür notwendige Zentripetalkraft.

Wenn nun ein Auto während einer Kurvenfahrt beschleunigen soll, dann muss die Haftreibung dafür einerseits eine Komponente $\vec{F}_\parallel = \vec{F}_\mathrm{Haft,vorwärts}$ nach vorne, also parallel zur aktuellen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ aufweisen, aber eben auch eine Komponente senkrecht zu $\vec{v}$, also $\vec{F}_\perp = \vec{F}_\mathrm{Haft,seitwärts}$. Die Grafik rechts illustriert dies.



Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich für den Betrag der gesamten Haftreibungskraft $\vec{F}_\mathrm{Haft,total}$:

$$F_\mathrm{Haft,total} = \sqrt{F_\parallel^2 + F_\perp^2}$$

Solange dieser Betrag kleiner als der maximal mögliche Betrag der Haftreibung bleibt, ist alles in Ordnung. Die Haftung erlaubt dem Auto so zu fahren, wie die Lenkerin das beabsichtigt.

Das bedeutet grafisch, solange der vom Ursprung 0 ausgehende Vektorpfeil für $\vec{F}_\mathrm{Haft,total}$ innerhalb des sogenannten **Kamm'schen Kreises** mit Radius $F_\mathrm{Haft,max}$ endet, funktioniert die Kurvenfahrt wie gewünscht. Verlässt $\vec{F}_\mathrm{Haft,total}$ hingegen den Kamm'schen Kreis, so wird die maximal mögliche Haftreibung überschritten und die Pneus verlieren die Haftung. Daraus folgt sofort, dass ein beschleunigendes Auto keine ganz so engen Kurven fahren kann wie ein gleichförmig fahrendes, denn ein Teil der Haftung wird eben für das Beschleunigen benötigt.

Betrachten wir nun eine konkrete Situation mit einem Auto, das in einer Kurve von $41\,\mathrm{m}$ Radius in Vorwärtsrichtung mit $2.7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt. Wie schnell darf es in diesem Moment maximal sein, damit es noch nicht aus der Kurve fliegt?

Weitere Angaben: Automasse: $1250\,\mathrm{kg}$, aktueller Luftwiderstand: $F_\mathrm{L} = 350\,\mathrm{N}$, Haftreibungszahl zwischen Pneus und Strasse: $\mu_\mathrm{H} = 0.74$, Rollreibngszahl: $\mu_\mathrm{R} = 0.030$.

Hinweise: Die Kraftgleichung längs des $\vec{v}$-Vektors lautet $F_\mathrm{M} = F_\mathrm{Roll} + F_\mathrm{L} + F_\mathrm{res}$. Und darin ist nun eben die Motorenkraft $\vec{F}_\mathrm{M}$ nichts anderes als die Haftreibungskraft in Vorwärtsrichtung: $\vec{F}_\mathrm{M} = \vec{F}_\parallel = \vec{F}_\mathrm{Haft,vorwärts}$. Die Haftreibung in Vorwärtsrichtung muss die Rollreibung und den Luftwiderstand kompensieren und zusätzlich auch noch das Auto beschleunigen.