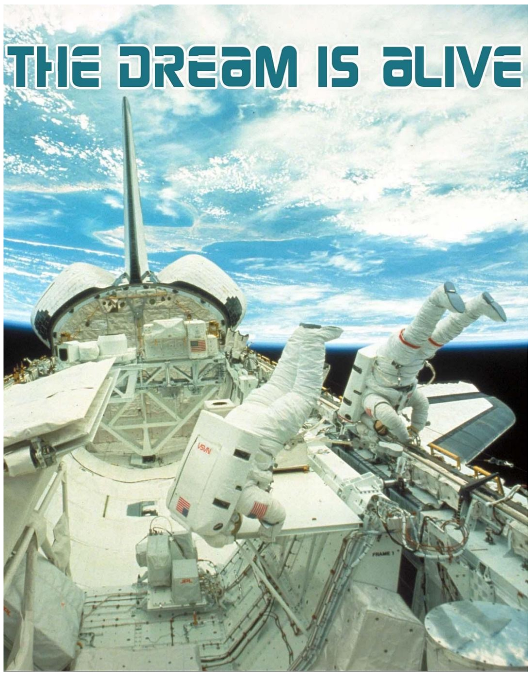
Übungen zur Mechanik

Serie 8: Gravitationsgesetz, Umlaufbahnen und Ortsfaktoren

1. *Erdumrundung im Space Shuttle*



   Im Imax-Film *The Dream is Alive* zum Amerikanischen Space Shuttle Programm wird gesagt: "Die Maschinen stehen jetzt still. Der Orbiter umrundet die Erde auf $450\,\mathrm{km}$ Höhe – einmal alle 90 Minuten."

   (a) **Welche Bahngeschwindigkeit hat der Orbiter folglich auf seiner Umlaufbahn?**
   Hinweis: Erdradius $R_\mathrm{E} = 6370\,\mathrm{km}$.

   (b) Passt die eben berechnete Geschwindigkeit zur angegebenen Flughöhe? Schliesslich muss dort oben die Gravitation immer noch genügend stark sein, um die notwendige Zentripetalkraft zu erzeugen...

   Berechne also die Bahngeschwindigkeit ein zweites Mal, diesmal unter Verwendung der Himmelsgleichung $F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G}$. Vergleiche anschliessend mit dem Resultat aus (a).

   Hinweis 1: Erdmasse $M_\mathrm{Erde} \approx 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

   Hinweis 2: Im Weltraum wirkt nur die Gravitation F_G der Erde auf den Orbiter. Sie macht somit alleine die auf den Orbiter wirkende resultierende Kraft resp. Zentripetalkraft F_Z aus: $\vec{F}_\mathrm{Z} = \vec{F}_\mathrm{G}$. Kurz: Die Gravitation hält den Orbiter auf seiner Umlaufbahn.

   Betrachten wir nur die Kraftbeträge, so setzen wir links die Formel für die Zentripetalkraft und rechts das Gravitationsgesetz ein:

   $$\textbf{Himmelsgleichung:} \qquad F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

   Dabei bezeichnet M die Masse des viel massigeren **Zentralkörpers**, um den der kleine Körper mit Masse m kreist. Dieses m kürzt sich jeweils direkt aus der Gleichung raus...

   (c) Überlege dir ausgehend von der berechneten Geschwindigkeit:
   - **Weshalb umkreisen wohl die meisten Satelliten die Erde in Richtung Osten?**
   - **Weshalb liegen Raumhäfen – also Abschussrampen für Raketen – in Äquatornähe?**

   Tipp: Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper am Äquator aufgrund der Erdrotation die Erdachse umrundet?

2. *Berechnung der Sonnenmasse*

   Die Erde umkreist die Sonne in einem Jahr einmal. Ihre Bahngeschwindigkeit beträgt dabei etwa $29.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ (vgl. Serie 5, Aufg. 2.(b)). Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt $1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.

   (a) **Bestimme aus diesen Angaben die Masse der Sonne.**
   Gib deine Antwort in Kilogramm unter Verwendung einer Zehnerpotenz.

   (b) Vergleiche das Resultat aus (a) mit der **Erdmasse** $M_\mathrm{Erde} \approx 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.
   Berechne den Faktor, um den die Sonnenmasse grösser ist als die Erdmasse.

3. *Der Ortsfaktor auf der Oberfläche des Planeten Mars*

   Der Mars ist mit einem Durchmesser von $D_{\text{Mars}} = 6800\,\text{km}$ deutlich kleiner als die Erde. Deshalb ist auch seine Masse geringer. Sie beträgt "lediglich" $M_{\text{Mars}} = 6.4 \cdot 10^{23}\,\text{kg}$.

   Bestimme den Ortsfaktor auf der Oberfläche des Planeten und vergleiche ihn mit demjenigen an der Erdoberfläche.

4. *Der Mond – alles über unseren Trabanten*

Mittlerer Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt:	$r = 380\,000\,\text{km}$
Masse des Mondes:	$M_{\text{Mond}} = 7.35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$
Mittlerer Radius des Mondes:	$R_{\text{Mond}} = 1740\,\text{km}$
Umlaufzeit des Mondes um die Erde:	$T = 27.3\,\text{Tage}$

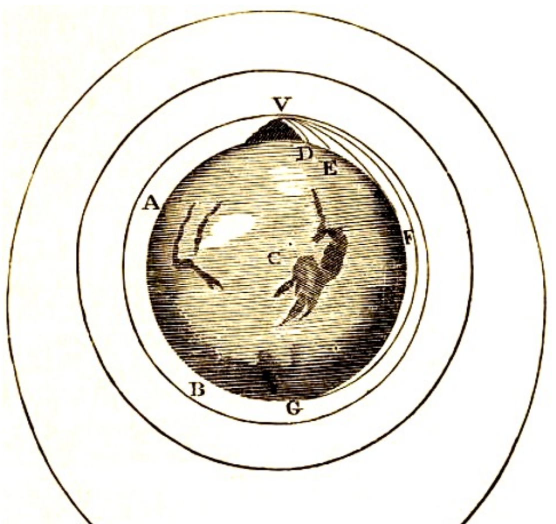
   (a) **Um welchen Faktor ist die Erde schwerer als der Mond?** ($M_{\text{Erde}} = 5.97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$.)

   (b) **Welche Bahngeschwindigkeit (in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$) weist der Mond auf seinem Weg um die Erde auf?**

   (c) **Wie gross ist die Anziehungskraft zwischen Erde und Mond?**
   Notiere das Resultat in Newton mit einer Zehnerpotenz.

   (d) **Welcher Ortsfaktor herrscht auf der Mondoberfläche?**
   Vergleiche dein Resultat mit dem Ortsfaktor auf der Erdoberfläche.

5. *Newtons Gedankenexperiment*



   Die Skizze rechts stammt aus Isaac Newtons Hauptwerk **Philosophiae naturalis principia mathematica** – kurz: die **Principia**. (Die ursprüngliche Ausgabe erschien 1687, die Zeichnung ist einer bearbeiteten Fassung von 1728 entnommen).

   Würde man auf einem hohen Berg stehen und Steine mit immer grösserer Geschwindigkeit horizontal wegwerfen, so würden diese immer weiter fliegen. Theoretisch könnte man einen Stein so schnell werfen, dass er gar nicht mehr auf den Boden fällt, weil die Erdoberfläche sich quasi vorher von der Flugbahn weg krümmt. Dazu dürfte allerdings keine Luft vorhanden sein, denn diese würde den Stein enorm abbremsen.

   Diese Überlegung funktioniert tatsächlich, wegen der Luft einfach nicht an der Erdoberfläche. Aber der Mond, jeder um die Erde fliegende Satellit und natürlich auch Raumstationen oder das Space Shuttle umrunden die Erde auf solchen **Umlaufbahnen**. Nur die Gewichtskraft wirkt jeweils auf das Objekt und zwingt es auf die Umlaufbahn! Einmal mit der richtigen Geschwindigkeit auf der zugehörigen Bahn, läuft die Bewegung von alleine ab. Der Körper fällt auf seiner Kreisbahn ständig "am Zentralkörper vorbei".

   Nehmen wir einmal an, es gäbe keine Erdatmosphäre, also keine Luft an der Erdoberfläche.

   Wie schnell müsste man dann den Stein vom Berggipfel aus werfen, damit er nicht mehr zu Boden fällt, sondern die Erde umkreist? Und wie lange würde ein Umlauf dauern?

   Hinweise: Erdradius: $R_{\text{Erde}} = 6370\,\text{km}$, Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$.

6. *GPS – Global Positioning System*

   Ich zitiere kurz Wikipedia: *Global Positioning System (GPS), offiziell NAVSTAR GPS, ist ein globales Navigationssatellitensystem zur Positionsbestimmung und Zeitmessung. Es wurde seit den 1970er-Jahren vom US-Verteidigungsministerium entwickelt.*

   D.h., die Erde wird von einer Vielzahl GPS-Satelliten umkreist. Die zeitliche Messung des Funkkontaktes zu mehrerer dieser Satelliten erlaubt eine sehr genaue Ortsbestimmung des Sende- und Empfangsgerätes auf der Erdoberfläche. Das ist übrigens Physik auf höchstem Niveau!

   Die GPS-Satelliten kreisen auf Umlaufbahnen mit Bahnradien von etwa $r = 26\,600\,\mathrm{km}$.

   Gib die Umlaufszeit eines GPS-Satelliten in einer passenden Zeiteinheit an.

   Hinweis: $M_{\mathrm{Erde}} = 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

7. *Die Vorbereitung der Formelsammlung*

   Aktuell verwenden wir lediglich eine Handvoll Gleichungen:

$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$	Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Kreisbewegung (gfK)
$F_{\mathrm{Z}} = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$	Zentripetalkraft = resultierende Kraft bei einer gfK
$F_{\mathrm{G}} = G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2}$	Newton'sches Gravitationsgesetz
$F_{\mathrm{G}} = m \cdot g$	Gewichtskraft bei vorgegebenem Ortsfaktor
$g = \dfrac{G \cdot M}{R^2}$	Ortsfaktor an der Oberfläche eines Himmelkörpers

   Es ist wichtig, dass dir diese Gleichungen etwas sagen. Notiere dir deshalb zu jeder einzelnen, wofür die jeweiligen Grössen stehen und mache dir klar, für welche Situation sie gebraucht wird.

8. *Erde vs. Jupiter*

   Jupiter ist der fünfte Planet im Sonnensystem. Hier ein paar planetarische Daten:

   Mittlerer Abstand Sonne–Jupiter:

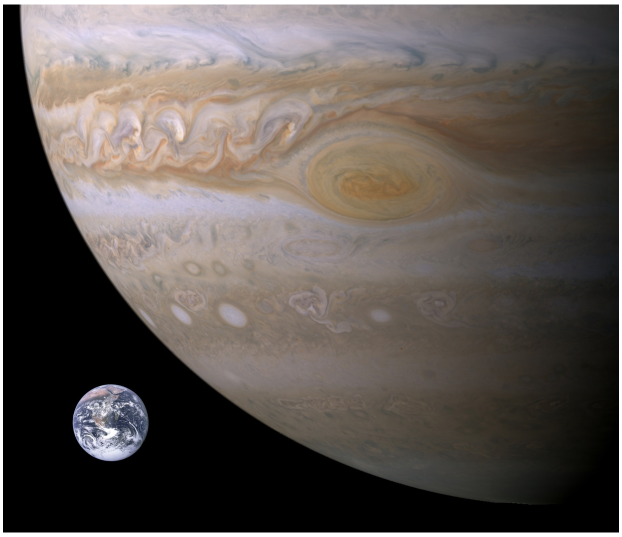
   $r = 7.42 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

   Mittlerer Planetenradius des Jupiter:

   $R_{\mathrm{J}} = 69\,500\,\mathrm{km}$

   Masse des Planeten Jupiter:

   $M_{\mathrm{J}} = 1.90 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$



   (a) **Bestimme den Ortsfaktor an der Jupiteroberfläche und vergleiche ihn mit demjenigen an der Erdoberfläche.**

   (b) Der Jupiter umrundet die Sonne auf einer einigermassen kreisförmigen Umlaufbahn.
   Wie lange dauert ein Jupiterjahr, also ein Umlauf des Jupiters um die Sonne?
   Gib das Resultat in Erdenjahren an (Sonnenmasse $M_{\mathrm{S}} = 1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$).

   (c) **Kallisto** ist der zweitgrösste Jupitermond. Er umkreist Jupiter mit einer Umlaufzeit von $16.69\,\mathrm{d}$.
   Wie gross sind der Bahnradius und die Bahngeschwindigkeit von Kallisto, wenn wir von einer kreisförmigen Umlaufbahn um Jupiter ausgehen?

9. *MTG-I1 – ein geostationärer Wettersatellit* **(Zwischenprüfungsaufgabe)**

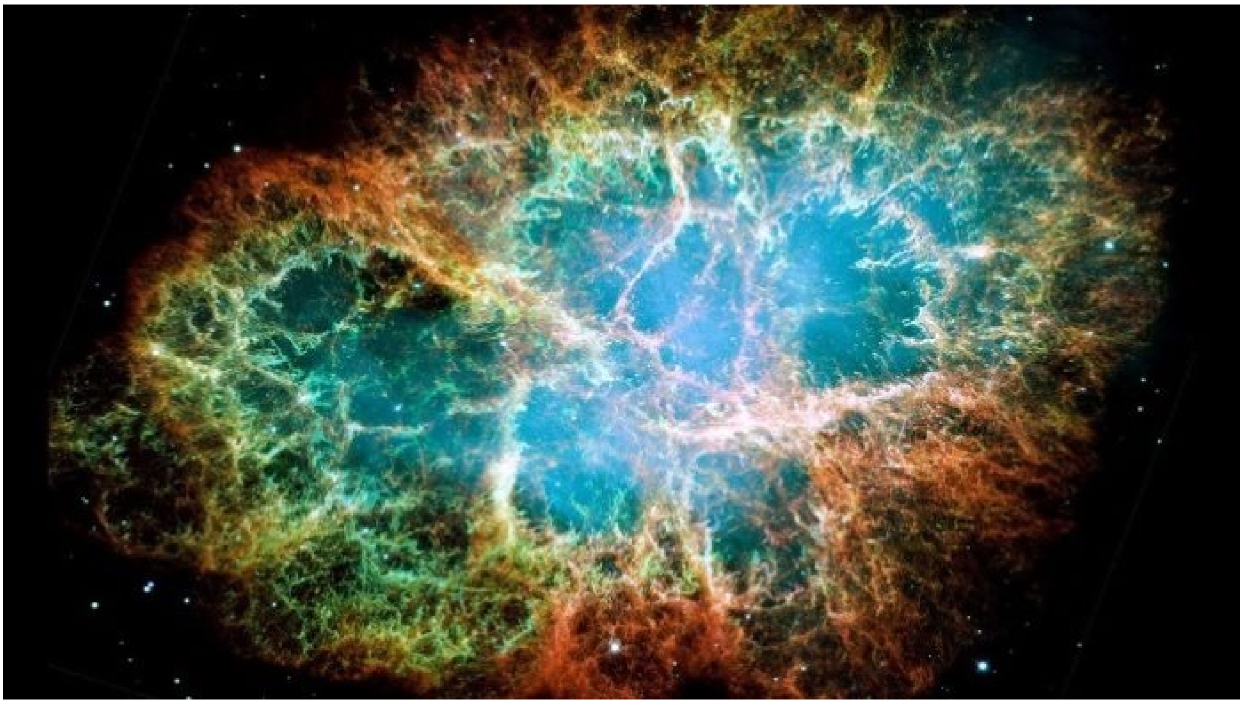
EUMETSAT (= European Organisation for the Exploitation of Meteorological Satellites) ist die europäische Organisation, die sich um den Betrieb von Wettersatelliten kümmert und den Wetterdiensten die Daten zur Verfügung stellt.

Derzeit befindet sich die neueste Generation ihrer **Meteosat-**Wettersatelliten im Aufbau. Inbetriebnahme des ersten Satelliten dieser Reihe – **MTG-I1** – ist auf 2023 geplant.

Derartige Wettersatelliten können ständig Bilder von Europa liefern, weil sie in **geostationären** Umlaufbahnen "parkiert" sind, also stets über derselben Stelle auf der Erdoberfläche stehen.

(a) Überlege dir zuerst genau, was **geostationär** bedeutet.
Über welchen Stellen auf der Erdoberfläche können geostationäre Satelliten überhaupt stehen?

(b) **Bestimme nun den Bahnradius, mit dem ein geostationärer Satellit um die Erde kreist.**
Vergleiche das Resultat mit dem Erdradius.
Ist die Umlaufbahn von MTG-I1 "weit oben"?
Hinweis: Die Erdmasse kennen wir aus früheren Aufgaben, ebenso den Erdradius. Die Umlaufszeit des Satelliten folgt aus der Bedingung "geostationär".



10. *Der Neutronenstern – ein absolut verrücktes Objekt*

Im Universum gibt es diverse Arten stellarer Objekte: rote Zwergsterne wie die Sonne, rote Riesen, weisse Zwerge, schwarze Löcher – und eben auch sogenannte **Neutronensterne**. Das sind relativ kleine, kugelförmige Objekte mit einem Radius von lediglich ein paar Kilometern. Gleichzeitig ist aber die Masse eines solchen Neutronensterns und somit auch seine Dichte gigantisch. So besitzt ein Teelöffel voll Neutronensternmaterie ähnlich viel Masse wie das ganze Matterhorn!

Beispiel: Der Neutronenstern im Zentrum des **Krebsnebels** hat einen Durchmesser von etwa $29\,\mathrm{km}$ und eine Masse von etwa $3.5 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Er ist so klein, dass man ihn im Bild unten auf Seite 4 nicht mehr sieht. Allerdings sendet er die Strahlung aus, die den Nebel derart faszinierend zum leuchten bringt.

(a) **Welcher Ortsfaktor herrscht $1000.0\,\mathrm{m}$ über der Neutronensternoberfläche?**

(b) **Und wie gross ist der Ortsfaktor auf einer Höhe von $1001.0\,\mathrm{m}$ über der Oberfläche?**

(c) Betrachte die noch ungerundeten Resultate aus (a) und (b).
Wie gross ist der Unterschied dieser Ortsfaktoren und was würde dies wohl für einen Menschen bedeuten, der (zunächst in einem Raumanzug) einen Kilometer über die Oberfläche des Neutronensterns gebeamt würde?

(d) Das besonders Verrückte am Neutronenstern ist, dass er mit einer irren Geschwindigkeit rotiert. Im Falle des Krebsnebel-Neutronensterns beträgt eine Umdrehung nur gerade $33\,\mathrm{ms}$ (Millisekunden!). Dass der Neutronenstern bei dieser Drehgeschwindigkeit nicht auseinanderbricht, verdankt er mitunter eben seiner gewaltigen Gravitation, die ihn zusammenhält.
Wie gross ist denn die Geschwindigkeit der Oberfläche am Äquator des Neutronensterns (verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$) und welche Zentripetalbeschleunigung muss ein Oberflächenstückchen dort demnach erfahren?

11. **Herausfordernd:** *Briefpost auf Utopia VII*

In den Tiefen des Weltraums besucht das **Raumschiff Enterprise** den neu entdeckten Planeten **Utopia VII**. Dieser relativ kleine Planet weist einen Radius von $R = 1640\,\mathrm{km}$ auf. Seine Oberfläche ist glatt (keine Hügel oder Gebirge) und er besitzt keine Atmosphäre.

(a) Mit abgeschaltetem Antrieb umkreist die Enterprise Utopia VII auf einer Höhe von $715\,\mathrm{km}$ über der Planetenoberfläche. Ein Umlauf dauert $2\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min}$.
Bestimme aus diesen Angaben die Masse von Utopia VII.

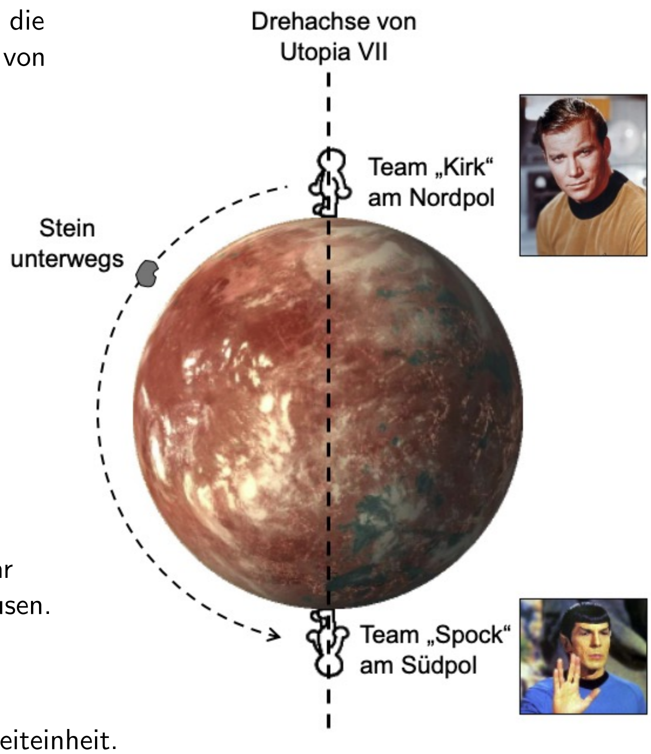
(b) Zwei Aussenteams landen auf Utopia VII, Team "Kirk" am Nordpol und Team "Spock" am Südpol.

Da die Kommunikation ausgefallen ist, kommt Team "Kirk" auf die Idee eine Mitteilung in Form eines Steins ans Team "Spock" zu senden.

Der Stein würde praktisch unmittelbar über der Planetenoberfläche dahinsausen.

Nach welcher Reisedauer würde der Stein den Südpol erreichen?

Gib die Antwort in einer passenden Zeiteinheit.

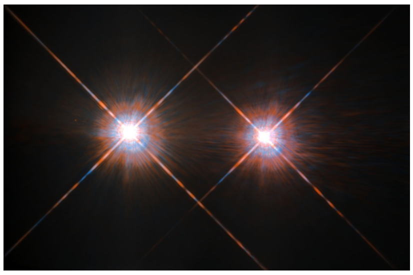


(c) Tatsächlich hängt die unter (b) berechnete Reisedauer t des Steins gar nicht von der Grösse des Planeten ab. D.h., die Planetenmasse M und der Planetenradius R sind nur scheinbar relevant. Bei genauerer Analyse stellt sich heraus, dass einzig die **Dichte ϱ** des Planeten diese Reisezeit bestimmt (sofern man davon ausgehen darf, dass der Planet überall etwa gleich dicht ist).
Zeige, dass für die Reisedauer t des Steins vom Nord- bis zum Südpol der folgende formale Zusammenhang mit der Planetendichte ϱ gilt:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$$

Hinweise: Dichte $\varrho := \frac{m}{V}$ = Masse m pro Volumen V; Kugelvolumen: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$.

12. **Herausfordernd:** *α Centauri – ein Doppelsternsystem*

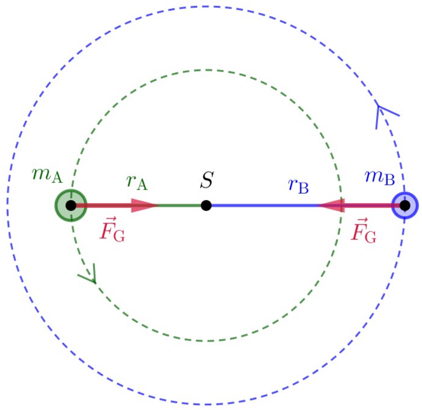


Ein naher Nachbarstern der Sonne ist **α Centauri** mit "nur" 4.34 Lichtjahren Entfernung.[1] α Centauri stellt sich bei näherer Betrachtung allerdings als **Doppelsternsystem** heraus. D.h., da umkreisen sich zwei Sterne gegenseitig und sind sich dabei so nahe, dass wir sie aus unserer Beobachtungsdistanz von Auge nicht voneinander unterscheiden können. Das Bild rechts wurde vom **Hubble Space Telescope (HST)** aufgenommen und zeigt die beiden Komponenten von α Centauri – man nennt sie α Centauri–A und α Centauri–B.

Solche Doppelsterne und Sternsysteme, bei denen sogar mehr als zwei Sterne gravitativ eng aneinander gebunden sind, gibt es im Universum zuhauf. Tatsächlich schätzt die heutige Astronomie, dass ca. 70 % aller Sterne Teil eines Mehrfachsternsystems sind!

Die beiden Komponenten (Sterne) von α Centauri sind nennt man α Centauri A, ein gelber Zwerg vom Spektraltyp G2 V und α Centauri B vom Spektraltyp K1 V.

Aber wie können sich zwei Sterne gegenseitig umkreisen? Wie funktioniert das gemäss den Gesetzen der Newton'schen Mechanik?



Es gibt verschiedene Antworten. Eine lautet: Beide Sterne kreisen mit derselben Umlaufszeit um den gemeinsamen Schwerpunkt S (siehe Grafik), der eine mit Bahnradius r_A, der andere mit r_B. Die Gravitation zwischen ihnen hält beide auf ihren Bahnen. Allerdings muss nun ins Gravitationsgesetz der Abstand zwischen den beiden Sternen, also $R = r_A + r_B$, eingesetzt werden.

(a) Zeige, dass die beiden Sterne tatsächlich um den Schwerpunkt S kreisen. Dazu muss gelten: $r_A : r_B = m_B : m_A$. (Der massigere Stern ist näher beim Schwerpunkt.)
Dieses Resultat ergibt sich direkt aus der Erkenntnis, dass gelten muss: $(F_G =)\, F_{Z,1} = F_{Z,2}$.

(b) Von einem solchen Doppelsternsystem kennen wir die Umlaufzeit $T = 79.9\,\mathrm{a}$ (Jahre), den Abstand $R = 23.5\,\mathrm{AE}$ und die Masse $m_A = 1.105\,M_\odot$ (Sonnenmasse) der schwereren Komponente.
Bestimme aus diesen Angaben die Bahnradien r_A und r_B beider Komponenten (in AE) sowie die Masse der B-Komponente (in $M_\odot$).

Anmerkung: Obige Daten gehören zwar zu α Centauri, in der Realität umkreisen sich die beiden Komponenten allerdings auf stark exzentrischen Ellipsenbahnen. (Für R habe ich deshalb einfach eine ungefähre mittlere Entfernung der beiden Sterne angegeben.)

[1] Wenn man bedenkt, dass die ganze Milchstrassenscheibe, also unsere Galaxie, einen Durchmesser von ca. 100 000 Lichtjahren aufweist, ist α Centauri effektiv nur einen Katzensprung von uns entfernt.