Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 1

1. *Drei Arten von A nach B zu gelangen*

   (a) Die drei "Spaziergänge" starten auf der Ortsache alle auf derselben Höhe, also in derselben Distanz vom Ultraschallsensor, und enden auch auf ein- und derselben Höhe, also gleich weit weg vom Sensor.

   (b) Die grösste Geschwindigkeit hatte ich während dem Lauf, bei dem ich am spätesten losgelaufen bin, dessen Kurve im Diagramm also am weitesten rechts nach oben geht. Am langsamsten war ich während dem Lauf, bei dem ich etwa 3.5 Sekunden nach dem Start der Messung losgelaufen bin.

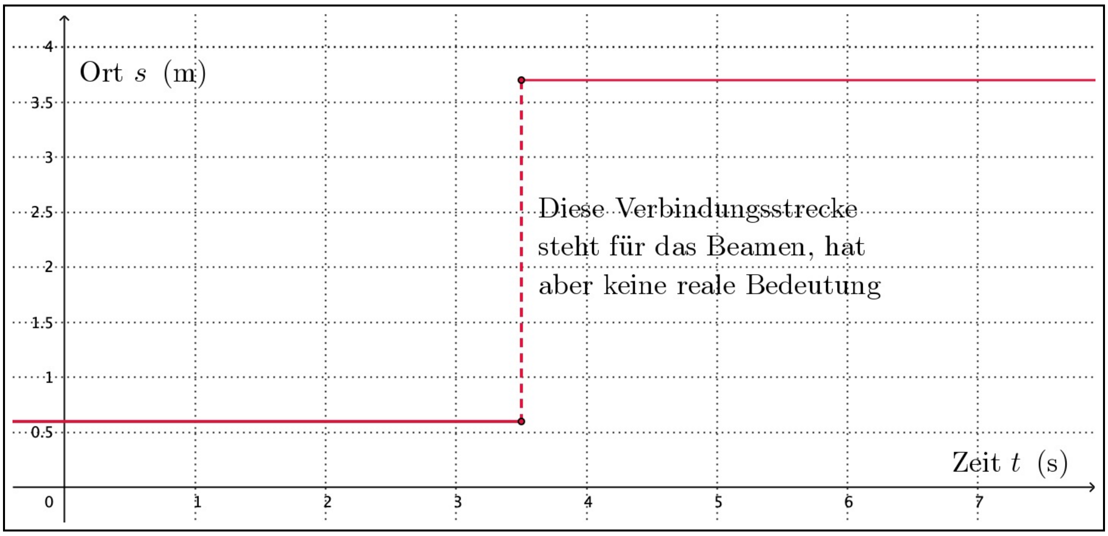
   Die Geschwindigkeit erkennt man offenbar an der Steilheit resp. Steigung der Graphen. Je steiler der Graph, desto grösser die Geschwindigkeit. Das ist ganz logisch: Bei allen drei Läufen habe ich ja dieselbe Strecke zurückgelegt. Brauchte es für den einen Lauf weniger Zeit, so muss der Graph in einer geringeren (horizontalen) Zeitspanne vom Ausgangs- zum Endpunkt auf der Ortsachse ansteigen, also eben steiler sein.

   (c) Während dem Loslaufen beschreibt der Graph eine Kurve, während der der Graph von einem horizontalen auf einen ansteigenden Abschnitt übergeht. Dabei nimmt die Steigung und somit die Geschwindigkeit zu.

   Umgekehrt geht der Graph während dem Abbremsen von einem ansteigenden in einen horizontalen Abschnitt über. Er wird also immer flacher – die Steigung resp. die Geschwindigkeit nimmt hier ab.

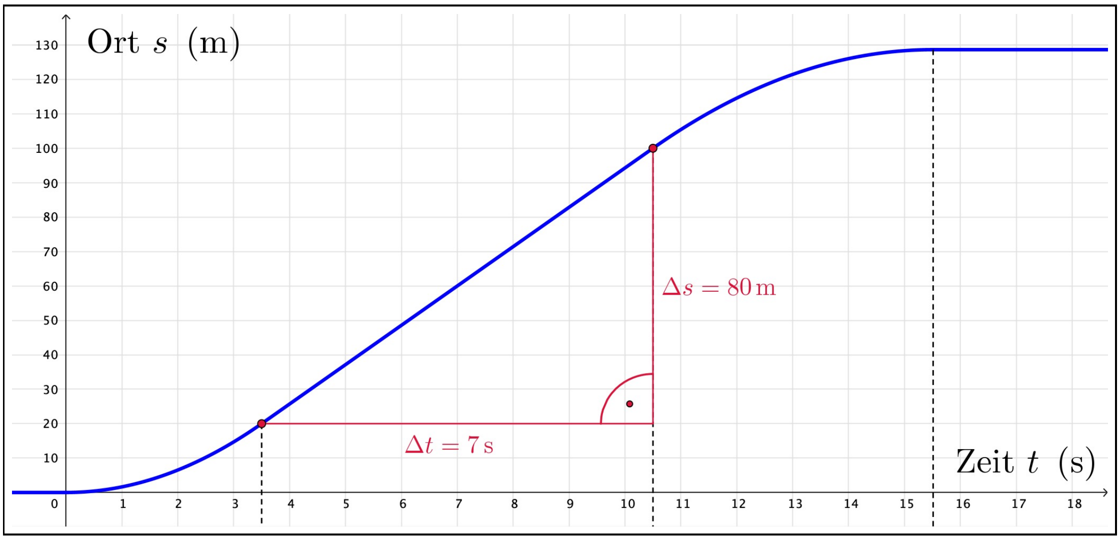
2. *Beamen*

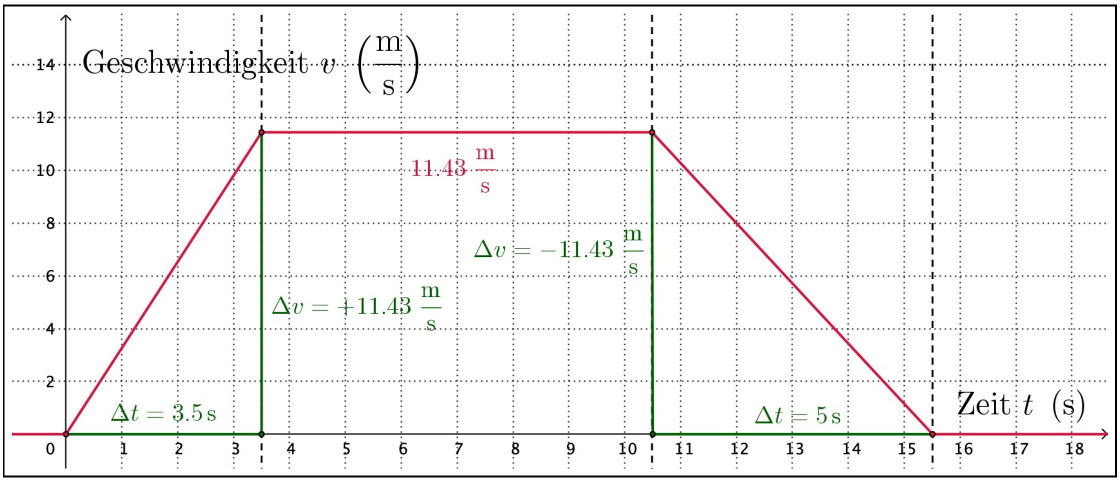
   Beim Beamen von A nach B ergäbe sich der folgende Graph im t-s-Diagramm:

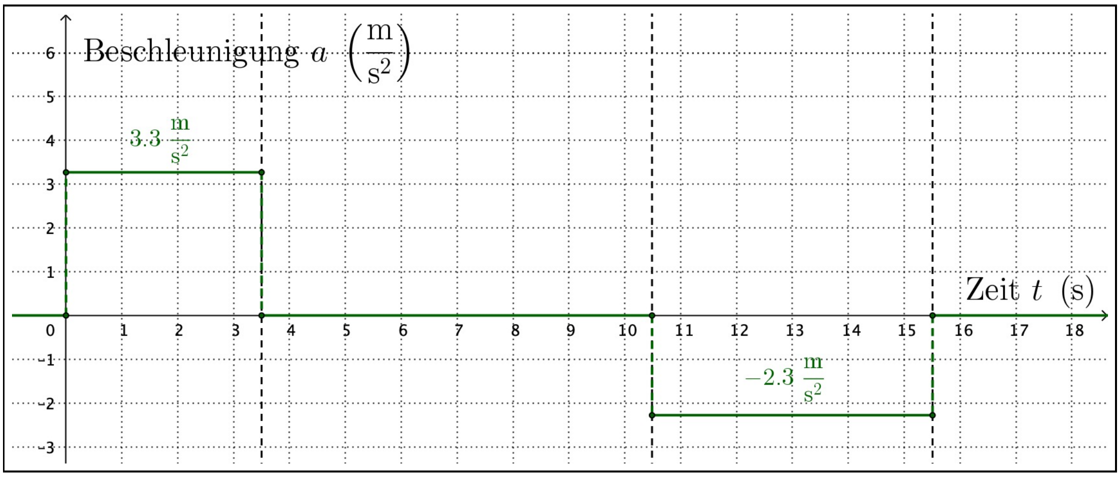


3. *Der 100 Meter-Lauf*

Es ergeben sich die folgenden Diagramme resp. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdaten:

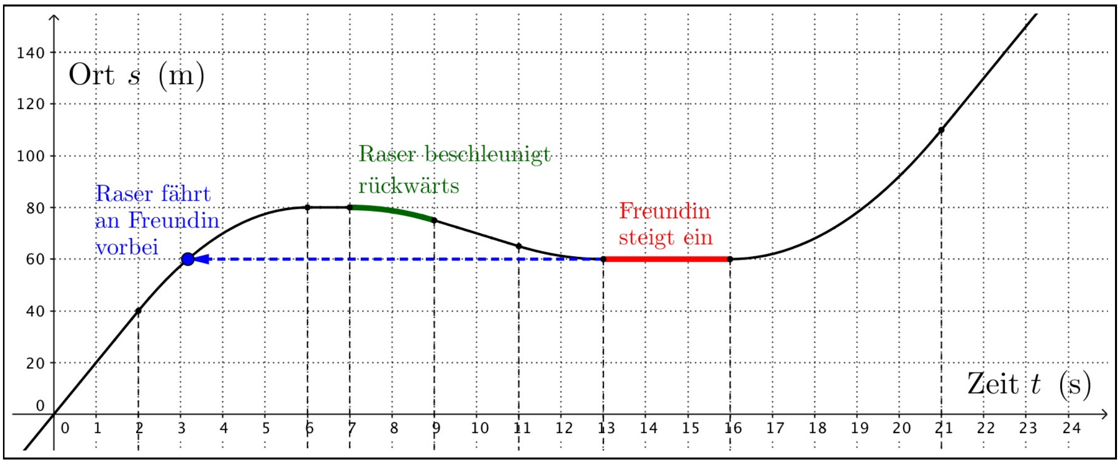


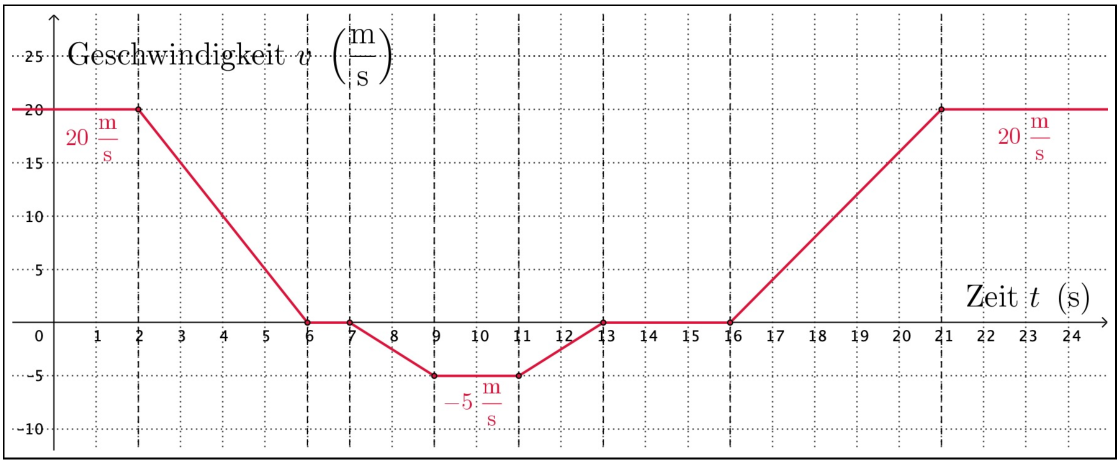


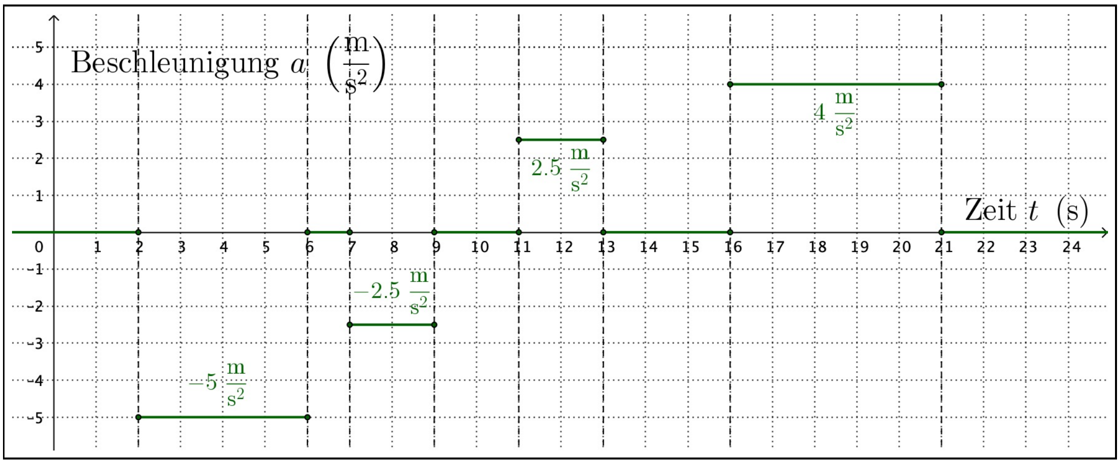


4. *Bitte einsteigen!*

Hier die drei Bewegungsdiagramme zum Raser, der an seiner Freundin vorbeigefahren ist:

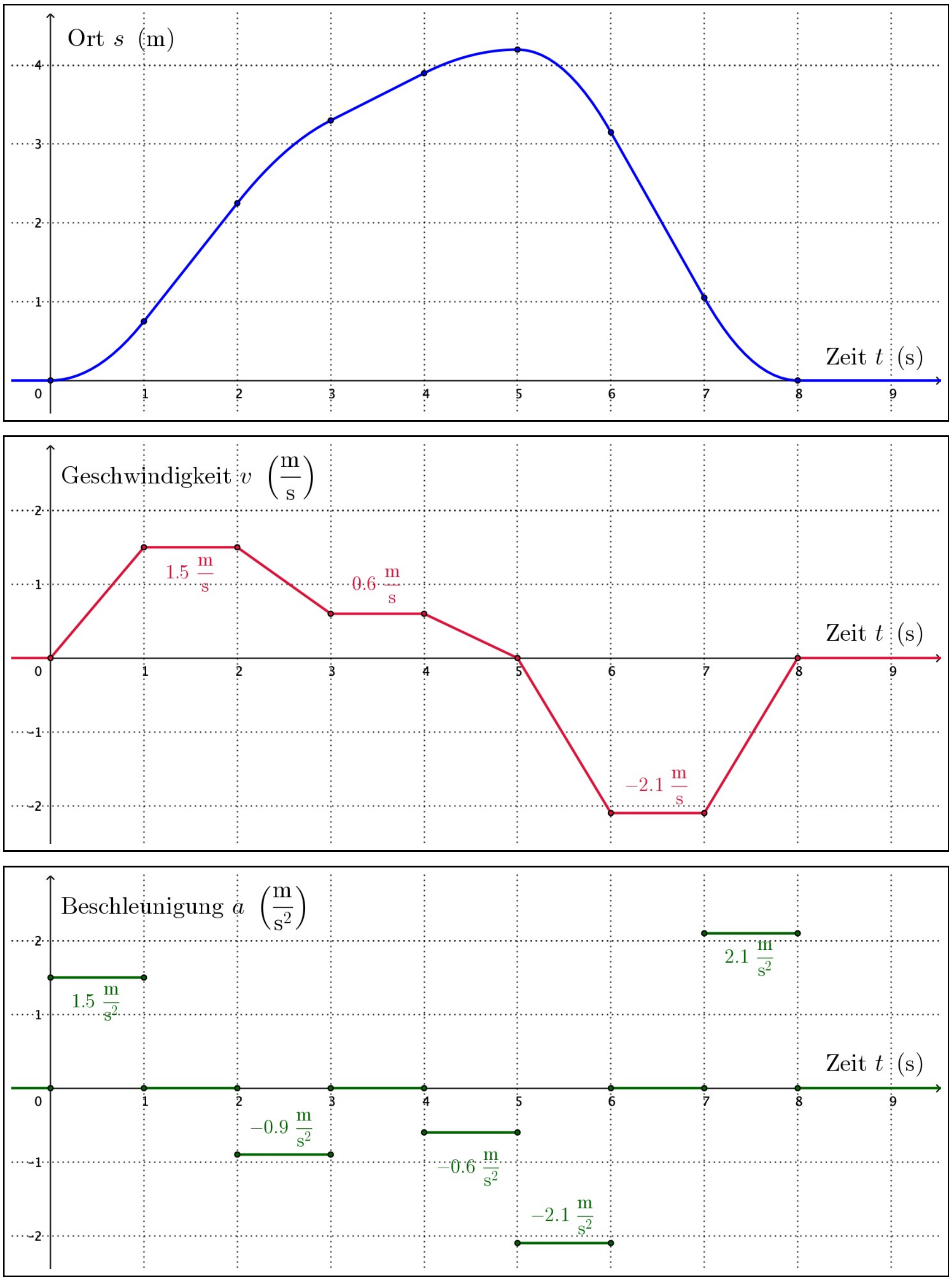






5. *Eine kompliziertere Bewegung*

   Da in der Aufgabenstellung gesagt wird, dass jeder Bewegungsabschnitt eine Sekunde lang ist, braucht man keine zusätzlichen vertikalen Linien einzutragen. Das Koordinatennetz gibt die Unterteilung bereits vor:



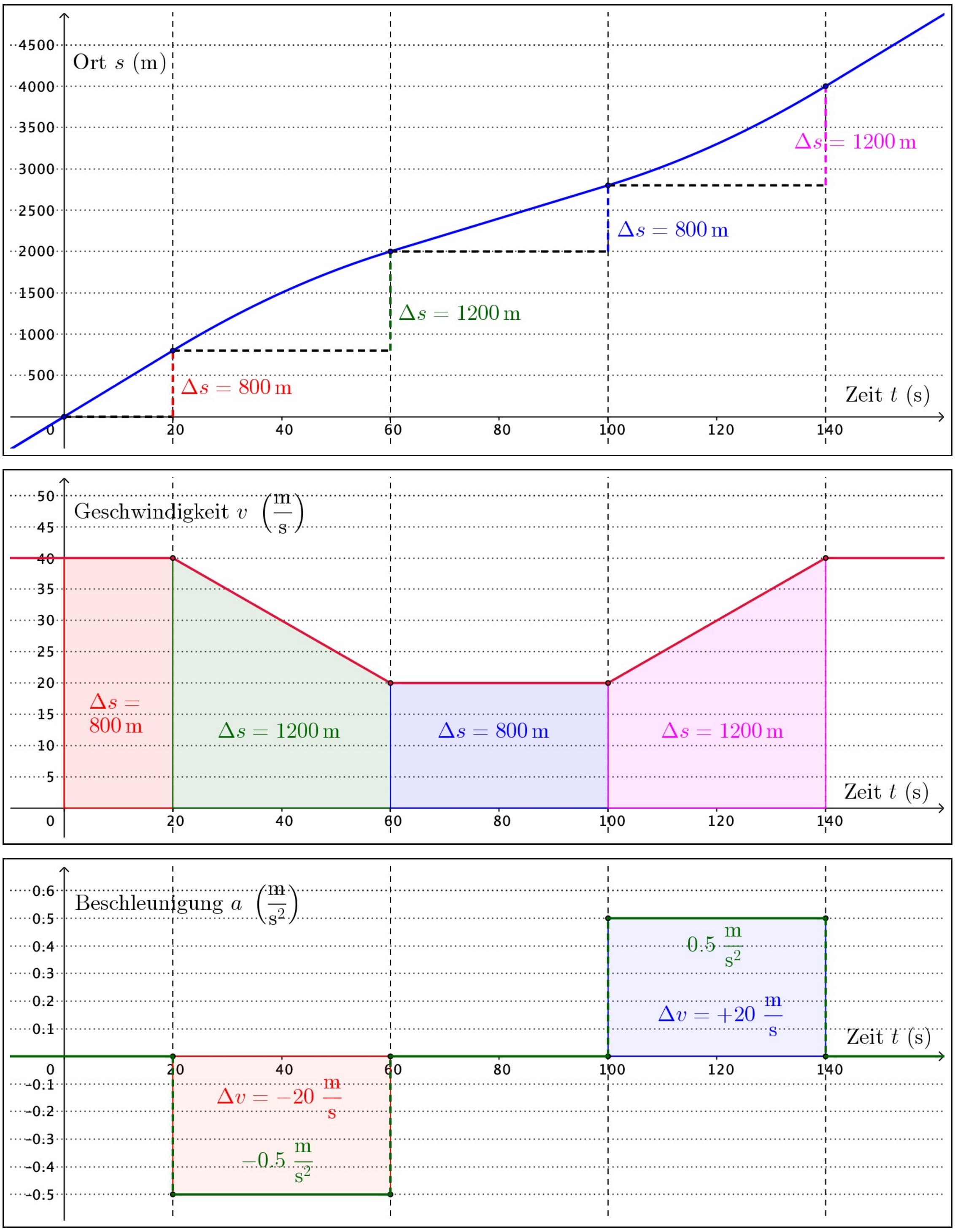
$t < 1\,\text{s}$: Ganz zu Beginn stehe ich noch. Dann beginne ich zum Zeitpunkt $t = 0$ loszulaufen. Ich beschleunige rasch auf ca. $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$1\,\text{s} < t < 3\,\text{s}$: Die Geschwindigkeit behalte ich eine Sekunde lange bei. Danach bremse ich auf eine etwas kleinere Geschwindigkeit ab.

$3\,\text{s} < t < 6\,\text{s}$: Mit dieser zweiten konstanten Geschwindigkeit bin ich nochmals eine Sekunde unterwegs, bevor ich anhalte und sogleich wieder in die Gegenrichtung loslaufe.

$6\,\text{s} < t < 8\,\text{s}$: Der Rückweg führt mich an meinen Startort zurück. Dabei bin ich rasch unterwegs – in der Spitze mit etwa $-2.1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

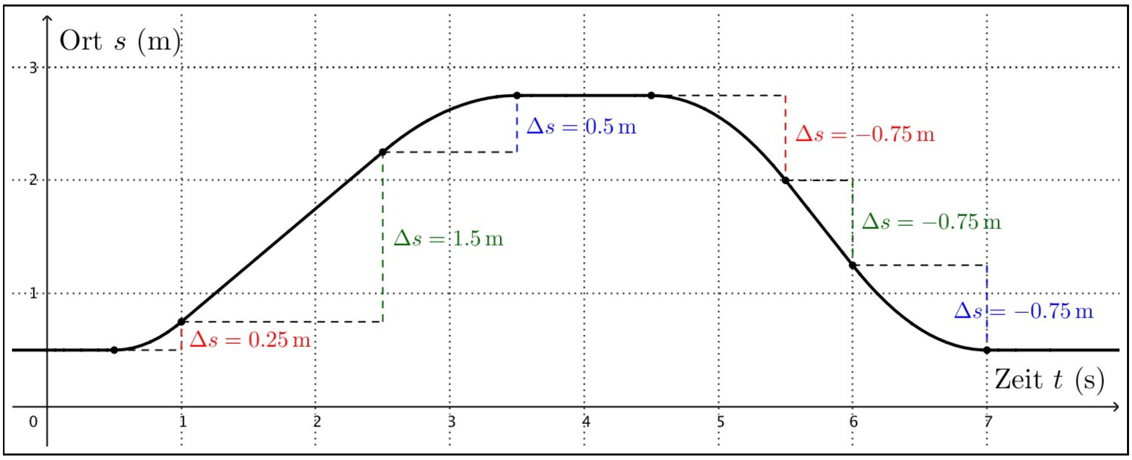
6. *Verlangsamung bei der Fahrt durch den Bahnhof Olten*

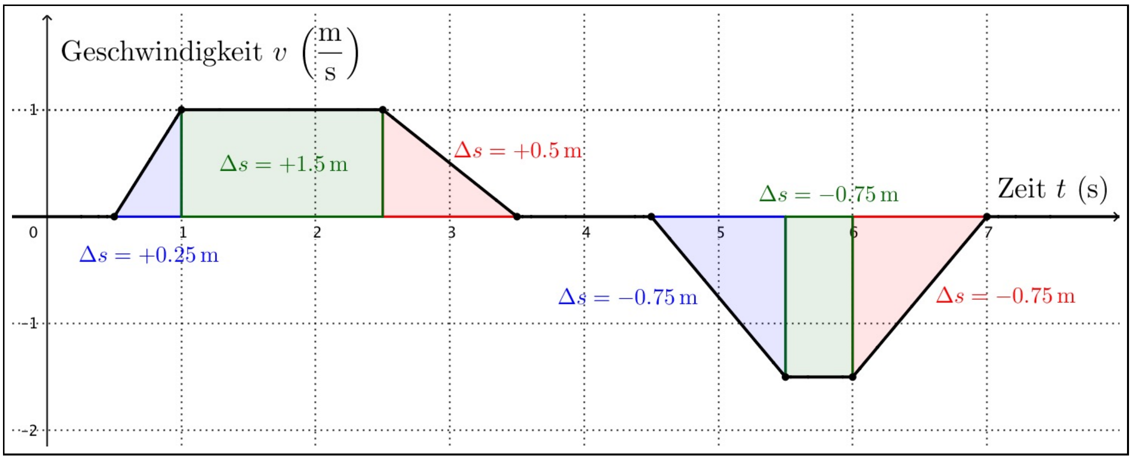


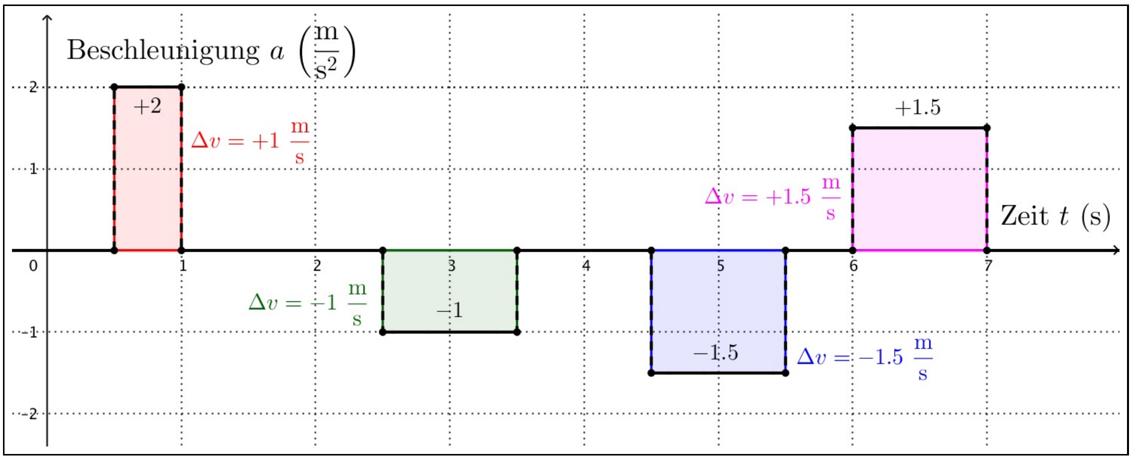
Was muss alles richtig sein?

- Richtig berechnete Strecken in den Abschnitten mit konstanter Geschwindigkeit: $\Delta s_1 = 800\,\mathrm{m}$ und $\Delta s_2 = 800\,\mathrm{m}$.
- Geraden in den Abschnitten mit konstanter Geschwindigkeit (inkl. korrekter Steigung, auch im letzten Abschnitt).
- Korrekte Kurvenformen und keine "Knicks" im t-s-Graphen.
- t-a-Graph ist Treppenfunktion.

7. *Noch einmal ein Gehversuch im Schulzimmer*







(a) Es gibt vier Beschleunigungsphasen mit unterschiedlichen Werten.

(b) Die zurückgelegten Wegstrecken Δs sind Dreiecks- und Rechtecksflächen. Die gefundenen Werte sind im t-v-Diagramm eingetragen. Achtung! Es gibt negative Wegstrecken, wenn ich in Richtung Sensor zurückgehe.

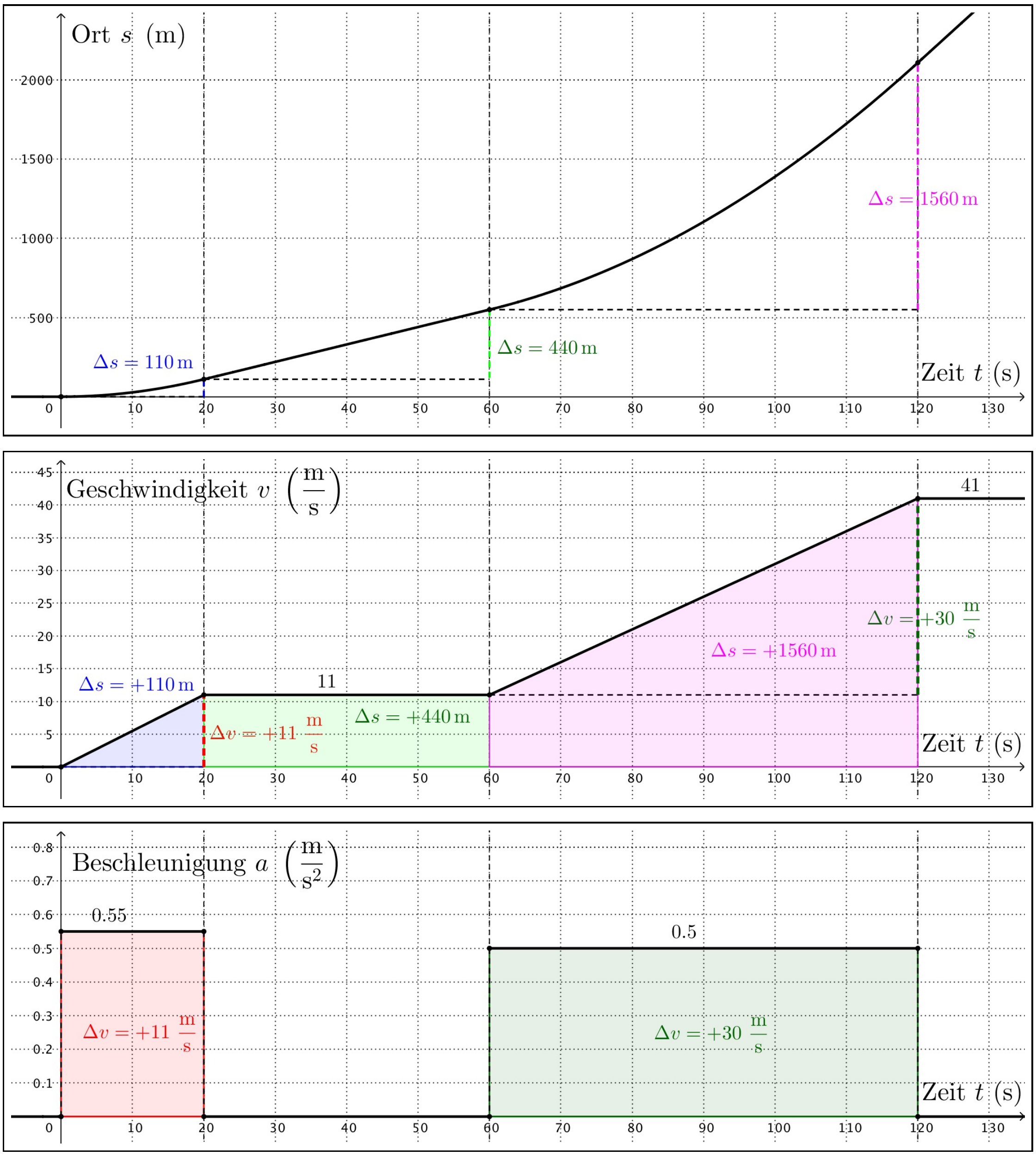
(c) Mit den Δs-Werten aus (b) kann das t-s-Diagramm gut skizziert werden. Man muss stets bedenken: Es setzt sich aus geraden und krummen Abschnitten zusammen und ist stetig und glatt (keine Sprungstellen, keine Knicke).

(d) Die beiden (dreifarbigen) Trapezflächen sind gleich gross, weil insgesamt gleich viel Strecke vorwärts wie rückwärts zurückgelegt wurde.

(e) Die Rechtecksflächen im t-a-Diagramm stehen für die Geschwindigkeitsveränderungen Δv. Sie betragen auf dem Hinweg $\pm 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und auf dem Rückweg $\pm 1.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, sodass ich zwischen den Bewegungen und am Ende eben wieder stehen bleibe.

8. *Zugsabfahrt im HB Zürich* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

Es ergeben sich die folgenden Diagramme:



9. *Ein simpler Fall*

(a) & (c) & (e) Siehe Diagramme unten.

(b) Solange der Klotz frei fällt, beträgt die Beschleunigung $a = -9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Das beudeutet, pro Sekunde verändert sich die Geschwindigkeit um $-9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Oder eben anders: Die Geschwindigkeitsveränderung Δ beläuft sich über die Zeitspanne Δt auf $\Delta v = a \cdot \Delta t$. Damit können die Tabellenwerte berechnet werden.

t (s)	0	0.250	0.500	0.750	0.795	0.800	0.805	0.810	0.808
v $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	0	-2.45	-4.91	-7.36	-7.80	-7.85	-7.90	-7.95	-7.93
s (m)	0	-0.307	-1.23	-2.76	-3.10	-3.14	-3.18	-3.22	-3.20

(c) Im t-v-Diagramm entspricht die Beschleunigung der Steigung. Z.B. kann man den Punkt $(0.5, -4.91)$ eintragen und dann vom Ursprung her eine Gerade durch diesen Punkt legen.

(d) Es müssen Dreiecksflächen im t-v-Diagramm berechnet werden. Unten ist ein Beispiel eingetragen. Die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke beträgt stets $s = \frac{v \cdot t}{2}$.

(e) Mit den berechneten Strecken lässt sich das t-s-Diagramm Punkt für Punkt zeichnen. Auch hier ist unten ein Beispiel zu sehen.

Achtung: Die Fallstrecke s ist ein negativer Wert, der jeweils mit der Starthöhe verrechnet werden muss, um die aktuelle Höhe zu erhalten:

$$h = 3.2\,\mathrm{m} + s$$

Die entstandene Kurve hat einen Namen: **Parabel**. So bezeichnen wir alle Graphen sogenannter **quadratischer Funktionen**. Mehr dazu später in der Mathematik.

(f) Bei $t = 0.805\,\mathrm{s}$ ist der Klotz schon fast am Boden: $h = 3.20\,\mathrm{m} - 3.18\,\mathrm{m} = 0.02\,\mathrm{m}$.

Bei $t = 0.810\,\mathrm{s}$ wäre er schon unterhalb des Bodens: $h = 3.20\,\mathrm{m} - 3.22\,\mathrm{m} = -0.02\,\mathrm{m}$.

Irgendwo zwischen $t = 0.805\,\mathrm{s}$ und $t = 0.810\,\mathrm{s}$ muss somit der Aufprall stattfinden. Aber bei welcher Zeit t ganz genau? Wie lässt sich das herausfinden?

Antwort: Durch geschicktes algebraisches Vorgehen, das wir in der Physik als **formales Rechnen** bezeichnen!

Für die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke haben wir vorhin geschrieben: $s = \frac{v \cdot t}{2}$. In diesem Ausdruck für die Strecke s kommt die bis zum Zeitpunkt t erreichte Geschwindigkeit v vor. Dafür gilt, wie wir ganz zu Beginn erkannt haben: $v = a \cdot t$.

Nun können wir diesen Ausdruck für v, also $a \cdot t$, anstelle von v in den Ausdruck für s einsetzen. So erhalten wir:

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{\overbrace{a \cdot t}^{=v} \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Die Fallstrecke s lässt sich also direkt aus der Beschleunigung a und der bis dahin verstrichenen Zeitspanne t berechnen. Und diese Beziehung können wir formal nach t auflösen:

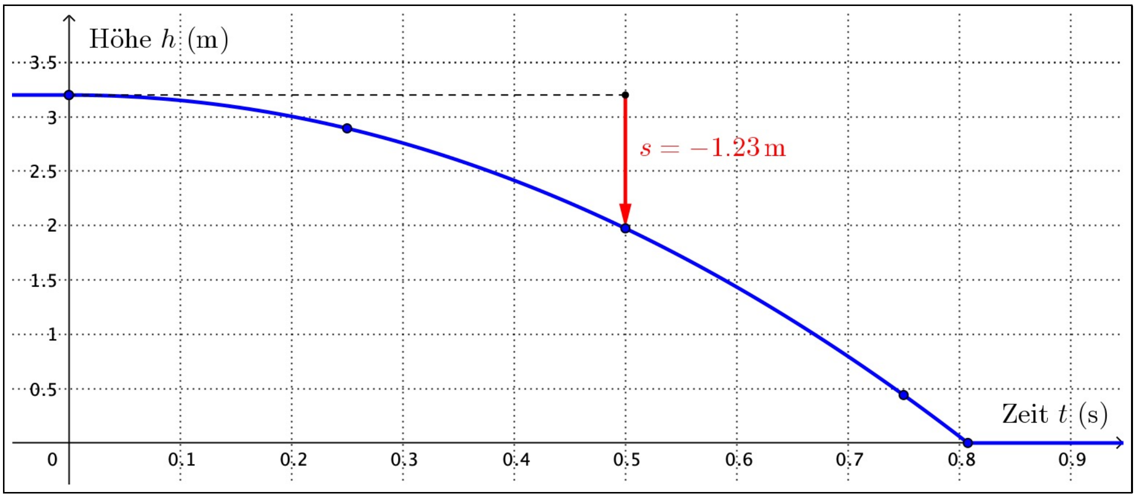
$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2s = a \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2s}{a} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

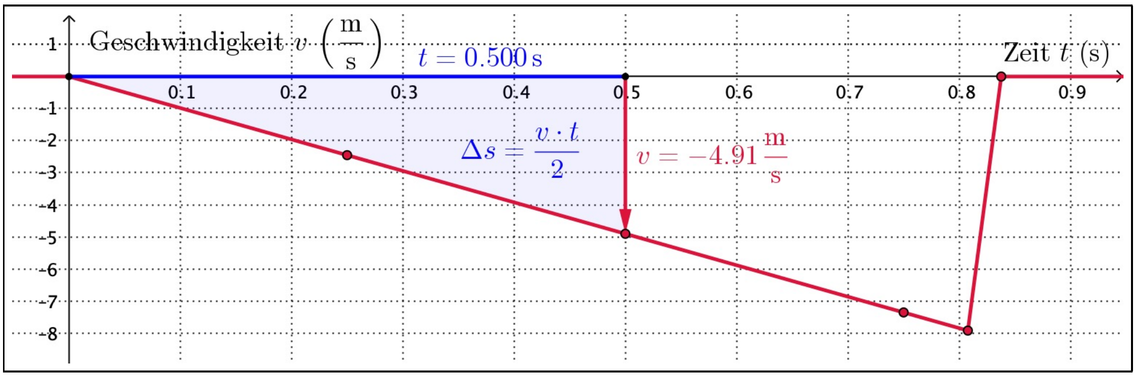
Setzen wir hier $s = -3.2\,\mathrm{m}$ und $a = -9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ein, so erhalten wir die Fallzeit bis zum Aufprall:

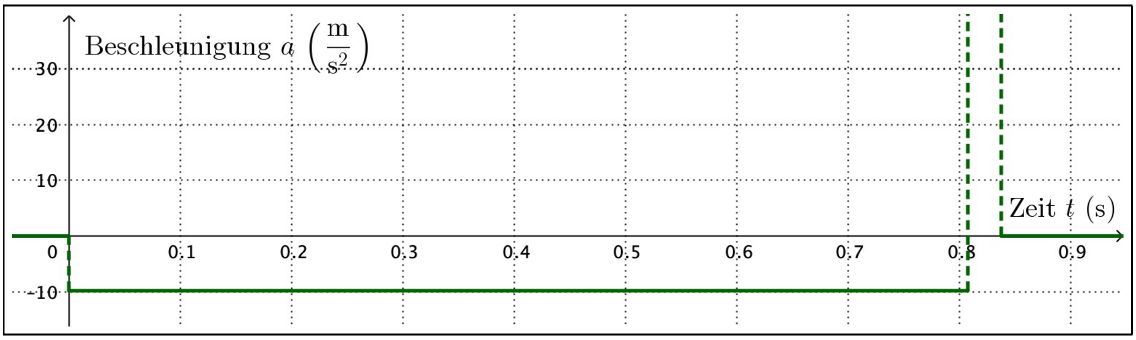
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-3.2\,\mathrm{m})}{-9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.8077\,\mathrm{s} \approx 0.808\,\mathrm{s}$$

Die Berechnung der Geschwindigkeit beim Aufprall ist damit nun ein Leichtes.

(g) Beim Aufprall muss die Beschleunigung kurzzeitig einen sehr grossen positiven Wert annehmen, damit die Geschwindigkeit in kürzester Zeit von $-7.93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf 0 zurückgehen kann. Tatsächlich ist der für das Abbremsen während lediglich $0.03\,\mathrm{s}$ benötigte Beschleunigungswert so gross, dass er im vorgegebenen Diagramm nicht eingezeichnet werden kann.







Anmerkung: Natürlich würde der Klotz während dem Abbremsen nochmals eines Strecke zurücklegen. Das t-s-Diagramm ist da nicht sonderlich präzise, aber das stört uns momentan nicht so sehr.

Wie gross müsste denn die Beschleunigung während dem Abbremsen sein? Das ist gar nicht so schwierig zu beantworten, wenn wir davon ausgehen, dass die Beschleunigung während diesem Abbremsen konstant ist. Dann müsste genau die negative Geschwindigkeit ($-7.95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$), die sich bis zum Zeitpunkt des Aufpralls angesammelt hat, in $0.03\,\mathrm{s}$ durch die positive Beschleunigung auf 0 gebracht werden. Das bedeutet:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{7.95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0.03\,\mathrm{s}} = 265\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Oder anders: Die Fläche des $0.03\,\mathrm{s}$ dünnen Rechtecks, dessen Sockel wir im t-a-Diagramm sehen, muss so gross sein wie die Fläche des breiten Rechtecks unterhalb der t-Achse von $t = 0$ bis $t = 0.808\,\mathrm{s}$ (Flächen im t-a-Diagramm entsprechen Geschwindigkeitsänderungen!).

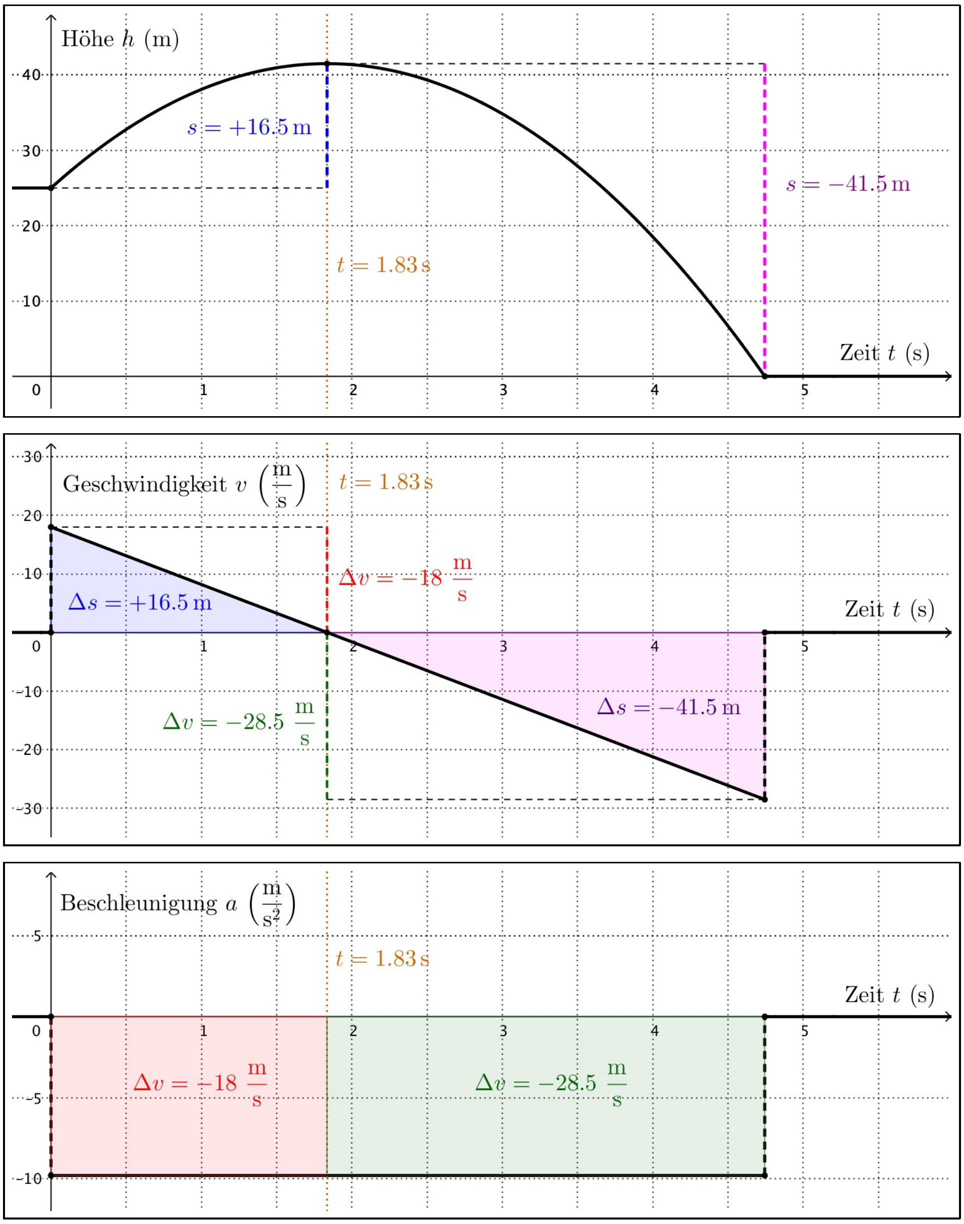
10. *Der senkrechte Wurf*

(a) Im toten Punkt ist $v = 0$. Die Fallbeschleunigung gibt an, wie rasch die Geschwindigkeit beim Aufstieg abnimmt und es folgt. Somit folgt für die Zeit, die es braucht, bis die $18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Aufwärtsgeschwindigkeit abgebaut sind: $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{-18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \underline{\underline{1.83\,\mathrm{s}}}$.

(b) Dreiecksfläche im t-v-Diagramm bis zum toten Punkt: $s = \frac{18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1.83\,\mathrm{s}}{2} = 16.5\,\mathrm{m}$. Der Stein erreicht also eine Maximalhöhe von $h = 25\,\mathrm{m} + 16.5\,\mathrm{m} = \underline{\underline{41.5\,\mathrm{m}}}$.

(c) Nach dem toten Punkt fällt der Stein von der Maximalhöhe aus auf den Boden. Gemäss Aufgabe 9 ergibt sich für die Fallzeit: $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 41.51\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2.91\,\mathrm{s}$. Daraus folgt für die Gesamtzeit von Abwurf bis Aufprall: $t = 1.83\,\mathrm{s} + 2.91\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4.74\,\mathrm{s}}}$.

(a) & (d) Es ergeben sich die folgenden Diagramme.



Die Diagramme sind "unphysikalisch": Abwurf und Landung können so real unmöglich stattfinden. Das sieht man bereits am Graphen im t-s-Diagramm, wo wir an diesen Stellen einen "Knick" antreffen. Im t-v-Diagramm werden daraus Sprünge. D.h., es sind Zeitpunkte, bei welchen sich die Geschwindigkeit scheinbar schlagartig verändert. Das kann so nicht sein. Tatsächlich bräuchte es an diesen Stellen kurze Beschleunigungs- resp. und Bremsphasen.