Übungen zur Mechanik – Lösungen Serie 5

1. *Zentrifugentests für Kampfpiloten*

   (a) Der Astronaut wird von der Normalkraft F_N der äusseren Innenwand der Kapsel auf der Kreisbahn gehalten. D.h., diese Normalkraft macht gerade die Zentripetalkraft aus: $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z}$. Dafür berechnet man:

   $$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 8.5\,\mathrm{m}}{2.2\,\mathrm{s}} = 24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{75\,\mathrm{kg} \cdot (24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{8.5\,\mathrm{m}} = 5210\,\mathrm{N} \simeq \underline{\underline{5200\,\mathrm{N}}}$$

   (b) Wir spüren unsere eigene Schwerkraft F_G nicht direkt. Unser Schwereeindruck entsteht erst durch die Normalkraft F_N des Bodens, gegen den wir wegen der Schwerkraft gedrückt werden. Wir können daher stets schreiben: $F_\mathrm{N} = m \cdot g_\text{gefühlt}$. (Nur wenn $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$ ist, gilt auch: $g_\text{gefühlt} = g$!) Als Folge davon lässt sich (gefühlte) Gravitation künstlich erzeugen, indem wir durch Kreisbewegungen grössere Normalkräfte hervorrufen. Genau das passiert in der Zentrifuge. Der vom Astronauten registrierte Ortsfaktor $g_\text{gefühlt}$ entspricht in der Kräftesituation $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z}$ gerade der Zentripetalbeschleunigung a_Z:

   $$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot a_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad g_\text{gefühlt} = a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \frac{(24.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{8.5\,\mathrm{m}} = 69.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   Vergleich mit dem normalen Ortsfaktor: $\frac{g_\text{gefühlt}}{g} = \frac{69.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{7.1}} \Rightarrow$ Der Astronaut verspürt 7.1 g.

2. *Die Raumstation V in Stanley Kubricks "2001: A Space Odyssey"*

   Die Menschen stehen auf der Innenseite des äusseren Randes der Raumstation und werden alleine durch die Normalkraft dieses Randes auf der Kreisbahn gehalten. D.h., es gilt:

   $$F_\mathrm{N} = F_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot a_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad g_\text{gefühlt} = a_\mathrm{Z}$$

   Nun soll der gefühlte Ortsfaktor gerade dem Ortsfaktor $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ an der Erdoberfläche entsprechen. Daraus erhalten wir:

   $$a_\mathrm{Z} = g_\text{gefühlt} \stackrel{!}{=} 1\,g \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{r} = g$$

   Daraus folgt mit $v = \frac{2\pi r}{T}$ für den Durchmesser der Raumstation:

   $$\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = g \quad \Rightarrow \quad r = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot (28\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 195\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad d = 2r = \underline{\underline{390\,\mathrm{m}}}$$

3. *Gefühlte Schwerkraft auf der Achterbahn*

   (a) Im untersten Punkt des Achterbahntals gilt:

   $$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{N} - F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} + F_\mathrm{Z} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g_\text{gefühlt} = m \cdot g + m \cdot a_\mathrm{Z}$$

   $$g_\text{gefühlt} = g + a_\mathrm{Z} = g + \frac{v^2}{r} = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} + \frac{\left(\frac{126}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{45\,\mathrm{m}} = 37.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_\text{gefühlt}}{g} = \frac{37.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 3.8$$

   Man verspürt in diesem Achterbahntal also $\underline{\underline{3.8\,g}}$.

   (b) Analog findet man auf der Kuppe:

   $$g_\text{gefühlt} = g - a_\mathrm{Z} = g - \frac{v^2}{r} = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} - \frac{\left(\frac{49}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{17\,\mathrm{m}} = -1.09\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   $\Rightarrow$ **Ja, es braucht Gurte**, weil die Zentripetalkraft F_Z offenbar grösser als F_G sein muss!

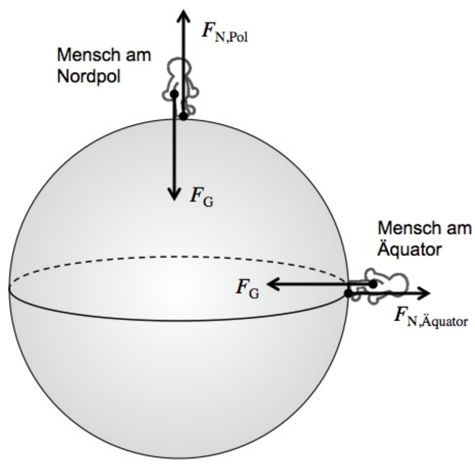
(c) Werden die Fahrgäste im obersten Punkt weder in die Gurte (nach unten) noch in die Sitzflächen (nach oben gedrückt, so fühlen Sie sich schwerelos und es muss gelten:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 12\,\mathrm{m}} = 10.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Ab $\underline{\underline{39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}}$ werden die Fahrgäste also nicht mehr in die Gurten gedrückt!

4. *Lebt es sich am Äquator "leichter"?* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

(a) Die Gewichtskräfte F_G, die der Mensch am Pol und sein identischer Zwilling am Äquator erfahren, sind bei genau gleich gross, wenn man annimmt, dass die Erde eine perfekte Kugel ist. Am Pol dreht sich der Mensch wegen der Erdrotation lediglich an Ort und Stelle. Er befindet sich dort also tatsächlich in einer Ruhesituation und es muss ein Kräftegleichgewicht zwischen der Normalkraft $F_\mathrm{N,Pol}$ und der Gewichtskraft F_G herrschen. Das gefühlte Gewicht, also seine Normalkraft $F_\mathrm{N,Pol} = m \cdot g_\mathrm{Pol}$, entspricht dort seiner tatsächlichen Gewichtskraft:



$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{N,Pol} = m \cdot g_\mathrm{Pol}$$

Anders sieht es am Äquator aus. Dort bewegt sich der Zwilling auf einer Kreisbahn gleichförmig um die Erdachse. Damit dies der Fall sein kann, muss er ständig eine Zentripetalkraft F_Z erfahren. D.h., am Äquator muss die Normalkraft $F_\mathrm{N,Äquator}$ kleiner sein als die Gewichtskraft F_G. Der Boden muss den Zwilling nicht ganz so stark stützen, wie am Äquator, da wegen der Kreisbewegung gar nicht die gesamte Gewichtskraft kompensiert werden muss:

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{N,Äquator} \quad \Rightarrow \quad m \cdot a_\mathrm{Z} = m \cdot g_\mathrm{Pol} - m \cdot g_\mathrm{Äquator} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{Z} = g_\mathrm{Pol} - g_\mathrm{Äquator}$$

Somit spürt der Mensch am Äquator eine kleinere Normalkraft $F_\mathrm{N,Äquator}$ resp. einen kleineren Ortsfaktor $g_\mathrm{Äquator}$ als am Pol.

(b) Die Bahngeschwindigkeit eines Menschen am Äquator beträgt:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6\,370\,000\,\mathrm{m}}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 463.24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Mit den Erkenntnissen aus (a) folgt:

$$g_\mathrm{Äquator} = g_\mathrm{Pol} - a_\mathrm{Z} = g_\mathrm{Pol} - \frac{v^2}{r} = 9.832\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} - 0.03379\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.798\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \underline{\underline{9.80\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}}$$

Der tatsächliche Wert des gefühlten Ortsfaktors am Äquator beträgt sogar nur $9.780\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Grund dafür ist, dass neben Gravitation und Rotation noch weitere Faktoren für den Wert des Ortsfaktors relevant sind, z.B., dass die Erde keine perfekte Kugel, sondern ganz leicht abgeplattet ist.

(c) Die Abnahme des gefühlten Gewichtes beträgt etwa $\frac{0.03379}{9.832} = 0.00344 = 0.344\,\%$. Daraus ergibt sich für die Abnahme der gefühlten Masse: $0.00344 \cdot 60\,\mathrm{kg} = 0.206\,\mathrm{kg} \approx \underline{\underline{200\,\mathrm{g}}}$.

Eine solche "Gewichtsabnahme" lässt sich kaum spüren. Sie entspricht der Massenzunahme beim Trinken eines Glases Wasser, bei dem sich allerdings die zusätzliche Masse völlig gleichmässig auf den gesamten Körper verteilt. Das wird man nicht bemerken.