unterstrass.edu
WO WERTE SCHULE MACHEN

DIE KOMPLEXEN ZAHLEN $\mathbb{C}$ – eine Einführung

ein Mathematik-Skript für das EF Moderne Physik
Promotion 154

Alex Gertsch

Zürich im August 2025

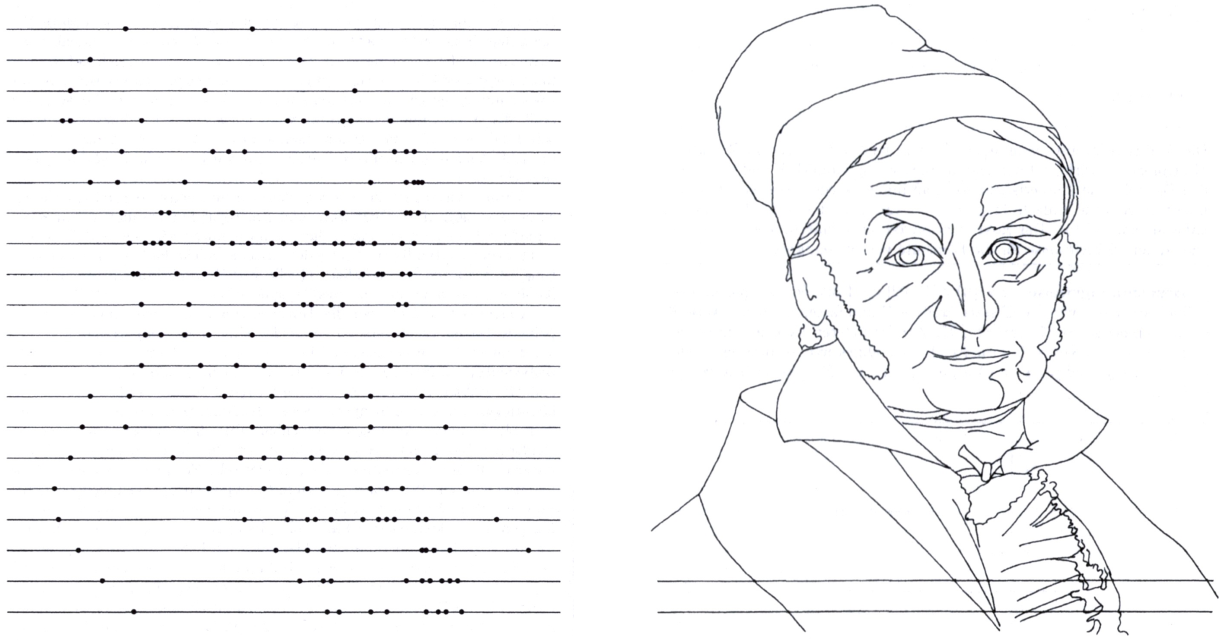

Abbildung 1: Aus dem Buch *Lineare Algebra* von K. Jänich, S. 26f: Bei vielen mathematischen Fragestellungen gleicht der nur mit reellen Zahlen Arbeitende einem, der Punkteverteilungen auf Linien studiert und kein System darin findet, während der mit *komplexen* Zahlen Arbeitende sofort sieht, worum es sich handelt. Die komplexen Zahlen ermöglichen oft entscheidende Einsichten in die Struktur und Wirkungsweise der "reellen" Mathematik.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlenmengen und Körper

Die sogenannten **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ sind eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einer zweidimensionalen Zahlenmenge. Hinter dem Wort **Erweiterung** steckt die Idee, dass zwar der Zahlenraum grösser gemacht wird, dass dabei aber die **Rechenregeln** gleich bleiben sollen! Umgekehrt lassen sich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als **Einschränkung** der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auf eine einzige Dimension auffassen, wobei ebenfalls die Rechenregeln erhalten bleiben.

Was mit dieser Zweidimensionalität und den Rechenregeln genau gemeint ist, wird in Kürze erläutert. Entscheidend ist, dass sich mit den komplexen Zahlen viele Problemstellungen und Rechnungen sehr elegant formulieren und lösen lassen. In der Mathematik erlauben sie oftmals eine einheitlichere Darstellung und führen zu vollständigeren Lösungsmengen, über die sich dann auch "schönere" Aussagen machen lassen als in der bisherigen Einschränkung auf reelle Zahlen.

1.1 Althergebrachte Zahlenmengen

Wir beginnen mit den **natürlichen Zahlen** und notieren sie in der aufzählenden Form:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.1}$$

Setzen wir die Einerschritte über 0 ins Negative fort, so erhalten wir die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.2}$$

Bereits $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ besitzen unendlich viele Elemente, decken aber noch lange nicht alle Punkte auf einem reellen **Zahlenstrahl** von $-\infty$ bis $+\infty$ ab (vgl. Abb. 1.1). Ganz offensichtlich gibt es zwischen den ganzen Zahlen noch jede Menge Platz für weitere sinnvoll definier- und verwendbare Zahlen, wie z.B. $\frac{1}{2}$.

Zunächst füllen wir diese Räume, indem wir Verhältnisse oder eben Brüche der ganzen Zahlen bilden. *Ratio* ist der lateinische Ausdruck für Verhältnis,[1] weshalb wir die neue Zahlenmenge als **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$ bezeichnen. Das "Q" steht für Quotient – nochmals ein Wort für einen Bruch. Wir definieren:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.3}$$

Diese **beschreibende Form** der Menge liest sich wie folgt: "$\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Zahlen der Form m geteilt durch n, wobei m eine ganze und n eine natürliche Zahl ist."

Auch $\mathbb{Q}$ deckt noch nicht den ganzen Zahlenstrahl ab. Es existieren nachweislich Punkte, die nicht durch einen Bruch ganzer Zahlen beschrieben werden können. Solche Zahlen nennen wir **irrational** (Menge $\mathbb{I}$).[2]

[1] Lat. *ratio* bedeutet aber auch noch Vernunft oder Verstand.

[2] Vielleicht erinnert man sich an den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Der reelle Zahlenstrahl

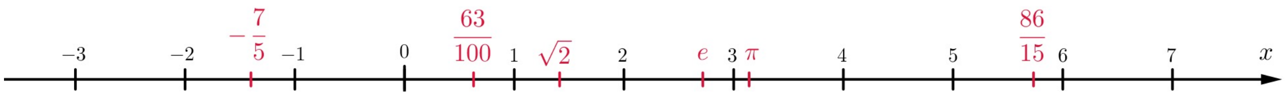

Abbildung 1.1: Jedem Punkt auf dem reellen Strahl kann eine reelle Zahl x zugeordnet werden.

In der Dezimalbruch-Schreibweise ist der Unterschied zwischen rationalen und irrationalen einfach zu benennen: Bei einer rationalen Zahl bricht der Dezimalbruch entweder irgendwo ab (nach irgendeiner Anzahl Stellen folgen nur noch Nullen) oder er wird periodisch (eine bestimmte Abfolge von Ziffern wiederholt sich unendlich oft), bei einer irrationalen Zahl hingegen gibt es keinerlei Periodizitäten, d.h., im Dezimalbruch lassen sich keine echten Regelmässigkeiten entdecken. Zu den berühmtesten irrationalen Zahlen gehören:

$$
\begin{array}{lrcr}
\text{Kreiszahl:} & \pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\ldots & \Rightarrow & \pi \approx 3.142 \\
\text{Euler'sche Zahl:} & e = 2.71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\ldots & \Rightarrow & e \approx 2.718 \\
\text{Wurzel aus 2:} & \sqrt{2} = 1.41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\ldots & \Rightarrow & \sqrt{2} \approx 1.414 \\
\text{Wurzel aus 3:} & \sqrt{3} = 1.73205\,08075\,68877\,29352\,74463\,41505\ldots & \Rightarrow & \sqrt{3} \approx 1.732
\end{array}
$$

Vereinigen wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, so erhalten wir die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Sie füllen den Zahlenstrahl in Abb. 1.1 nunmehr lückenlos, was man als **Vollständigkeit** der reellen Zahlen bezeichnet. Damit steht uns schliesslich eine Zahlenachse zur Verfügung, wie wir sie für eindimensionale physikalische Grössen, also **Skalare**, eben gerne haben möchten.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind *die* gebräuchliche Zahlenmenge schlechthin. In der Gymnasiumsmathematik gehen wir fast immer von dieser Grundmenge aus. Wichtig sind aber nicht nur die Zahlen an sich, sondern auch die verlässlichen Eigenschaften dieser Zahlenmenge, auf die wir uns in aller Mathematik und Naturwissenschaft stets abstützen. Darauf kommen wir im nächsten Abschnitt zu sprechen.

Abb. 1.2 zeigt die Teilmengenverhältnisse der Zahlenmengen. Bereits angedeutet wird, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nochmals eine Erweiterung der reellen Zahlen darstellen, so wie z.B. die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind.

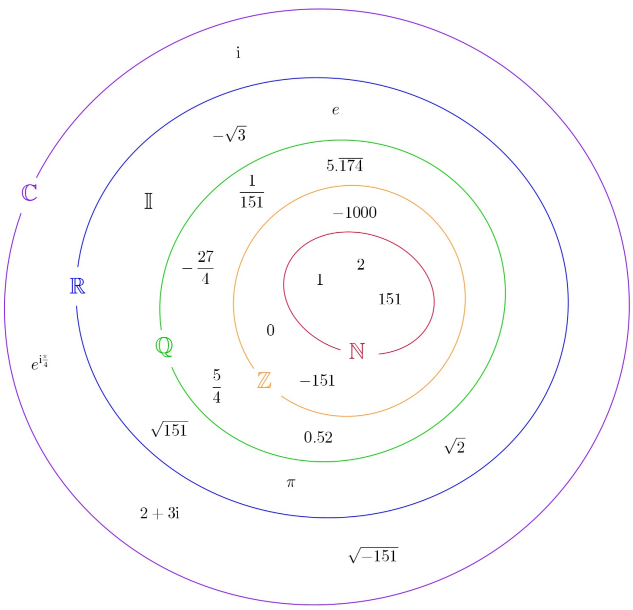

Abbildung 1.2: Darstellung der Teilmengenbeziehungen zwischen den verschiedenen Zahlenmengen.
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, sowie $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ resp. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ mit $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\}$.

1.2 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Körper

Im letzten Abschnitt haben wir beschrieben, welche Elemente die verschiedenen Zahlenmengen enthalten. Ebenso wichtig sind aber die **Rechenregeln**, denen diese Zahlen folgen. So fordern wir von einer vernünftigen Zahlenmenge $\mathbb{K}$, dass sie zusammen mit zwei Abbildungen "$+$" und "$\cdot$" einen sogenannten **Körper** bildet.

Definition eines Körpers

Ein **Körper** *ist ein Tripel* $(\mathbb{K}, +, \cdot\,)$, *bestehend aus einer Menge* $\mathbb{K}$ *und zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} \textit{Addition:} \quad & + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\,, \quad (a,b) \longmapsto a+b \\ \textit{und Multiplikation:} \quad & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\,, \quad (a,b) \longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

so dass die folgenden neun Axiome erfüllt sind:

Eigenschaften der Addition:

1. **Assoziativität:** *Für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
2. **Kommutativität:** *Für alle* $a, b \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a + b = b + a$$
3. **Nullelement:** *Es gibt ein Element* $0 \in \mathbb{K}$ *so, dass für alle* $a \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a + 0 = a$$
4. **Negatives Element:** *Zu jedem* $a \in \mathbb{K}$ *gibt es ein Element* $(-a) \in \mathbb{K}$ *so, dass gilt:*
$$a + (-a) = 0$$

Eigenschaften der Multiplikation:

5. **Assoziativität:** *Für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
6. **Kommutativität:** *Für alle* $a, b \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a \cdot b = b \cdot a$$
7. **Einselement:** *Es gibt ein Element* $1 \in \mathbb{K}$, $1 \neq 0$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a \cdot 1 = a$$
8. **Inverses Element:** *Zu jedem* $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ *gibt es ein Element* $a^{-1} \in \mathbb{K}$, *so dass gilt:*
$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Kombinierte Eigenschaft von Addition und Multiplikation:

9. **Distributivgesetz:** *Für alle* $a, b, c \in \mathbb{K}$ *gilt:*
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Die reellen Zahlen resp. das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bilden einen Körper. D.h., die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen zusammen mit der Addition "$+$" und Multiplikation "$\cdot$" die neun Körperaxiome. Letztere sind die uns längst vertrauten Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen.

Anmerkungen zu Körpern und zu den Körperaxiomen

- **Vielfalt mathematischer Körper:** Es gibt unzählige Körper im mathematischen Sinne. Dazu werden ja lediglich eine Menge $\mathbb{M}$ von Objekten und zwei Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" für die Elemente von $\mathbb{M}$ benötigt. Sobald nun die beiden Verknüpfungen die Körperaxiome erfüllen, sagen wir: "$\mathbb{M}$ bildet zusammen mit den Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" einen Körper."

  Bei der Menge $\mathbb{M}$ muss es sich also nicht unbedingt um die reellen Zahlen handeln. Es muss nicht einmal eine Zahlenmenge sein. Die unterschiedlichsten Objekte können zu Mengen zusammengefasst werden. Denke z.B. an die Menge aller Geraden in einem x-y-Koordinatensystem, die Menge aller Vektoren im dreidimensionalen Raum, die Menge aller Drehungen in der Ebene, die Menge aller Polynome mit Grad 5, etc. An den letzten beiden Beispielen sehen wir, dass man sogar Mengen von Abbildungen oder Funktionen definieren kann – was soll schon dagegen sprechen?

  Dem entsprechend muss aber für jede Menge $\mathbb{M}$ jeweils neu deklariert werden, was mit den beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation gemeint sein soll. Und so kommt es eben auch vor, dass man nicht aus jeder Menge einen Körper machen kann, weil einfach keine Addition oder keine Multiplikation definiert werden kann, welche die Körperaxiome erfüllt.[3]

  Die Zeichen "$+$" und "$\cdot$" für Addition und Multiplikation sind übrigens willkürlich. Manchmal werden für diese Verknüpfungen auch ganz andere Symbole verwendet, z.B. $*$, $\circ$, $\bullet$, $\diamond$ oder $\times$.

- **Bisherige Zahlenmengen:** Auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden – mit derselben Addition und Multiplikation wie bei $\mathbb{R}$ – einen Körper. Das lässt sich überprüfen, indem wir uns Punkt für Punkt von der Richtigkeit der Körperaxiome überzeugen und kurz überlegen, dass weder durch die Addition, noch durch die Multiplikation zweier Brüche die Menge $\mathbb{Q}$ verlassen werden kann.

  Im Gegensatz dazu bilden die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit der bekannten Addition und Multiplikation keinen Körper. Bei der Addition funktioniert es zwar noch, aber bei der Multiplikation scheitert es an der Existenz des inversen Elementes. Für eine ganze Zahl a liegt nämlich das inverse Element $a^{-1} = \frac{1}{a}$ bis auf die Ausnahmen $a = \pm 1$ nicht mehr in $\mathbb{Z}$.

- **Subtraktion und Division:** Braucht es nicht noch Körperaxiome für die **Subtraktion** "$-$" und die **Division** "$:$"? Die Antwort lautet: Nein, denn diese beiden Verknüpfungen sind durch zwei rein symbolische Festlegungen bereits in der Addition resp. in der Multiplikation enthalten:

  $$a - b := a + (-b) \qquad \text{und} \qquad a : b = \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$$

  Subtraktion und Division sind also durch Addition und Multiplikation und die zugehörigen negativen resp. inversen Elemente $(-b)$ und b^{-1} festgelegt und müssen nicht separat behandelt werden.

- **Der Nutzen von Körpern:** Was bringt es eigentlich, wenn man von einer Menge und den beiden darauf definierten Verknüpfungen weiss, dass es sich um einen Körper handelt?

  Ganz einfach gesagt verschafft dies die Sicherheit, dass darauf weiterführende Mathematik aufgebaut werden kann, weil ein Körper eben bestimmte Anforderungen erfüllt. Auf der Existenz von Addition und Multiplikation inkl. Nullelement, Einselement, negativen und inversen Elementen basieren zudem weitere Rechenmethoden, wie z.B. die Bildung von Potenzen und deren Gesetze.

[3] Nichts hindert uns daran auch gänzlich unmathematische Objekte zu Mengen zusammenzufassen, z.B. die Menge aller blauen Autos, die Menge aller Schweizerinnen und Schweizer oder die Menge aller Hauptreihensterne, etc. Die Bedingung für eine Menge ist einfach die Unterscheidbarkeit der einzelnen Elemente. Natürlich stellt sich dann die Frage, was man in einem solchen Fall unter der Addition oder der Multiplikation zweier Elemente verstehen soll...

Kapitel 2

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

2.1 Die Definition der komplexen Zahlen

Vorbereitung: Die Menge $\mathbb{R}^2$ besteht aus allen geordneten Paaren (x, y) zweier beliebiger Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. Dabei bedeutet das Wort "geordnet", dass z.B. $(1, 2)$ und $(2, 1)$ zwei verschiedene Elemente von $\mathbb{R}^2$ sein sollen – die Reihenfolge resp. Ordnung der beiden reellen Zahlen soll eine Rolle spielen!

Definition der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Unter den **komplexen Zahlen** *versteht man die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ zusammen mit den beiden Verknüpfungen "+" ("Addition") und "$\cdot$" ("Multiplikation") mit*

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \textit{und} \qquad \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die durch

$$u + v = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) := (x_u + x_v, y_u + y_v) \tag{2.1}$$

$$\textit{und} \qquad u \cdot v = (x_u, y_u) \cdot (x_v, y_v) := (x_u x_v - y_u y_v, x_u y_v + y_u x_v) \tag{2.2}$$

gegeben sind.

Zur Klärung der Notation: u und v sind zwei komplexe Zahlen, also je ein Paar aus zwei reellen Zahlen: $u, v \in \mathbb{C}$ mit $u = (x_u, y_u)$ und $v = (x_v, y_v)$, wobei $x_u, y_u, x_v, y_v \in \mathbb{R}$.

2.2 Erste Erläuterungen zur Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Die beiden Definitionen (2.1) und (2.2) von Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen erscheinen zunächst sehr willkürlich. Bevor wir im übernächsten Abschnitt 2.4 näher ergründen, weshalb die beiden Operationen gerade so definiert werden, wollen wir zuerst einfach je ein Beispiel anschauen, sodass wir hinreichend genau verstehen, was da wie gerechnet wird.

Die Addition (2.1) zweier komplexer Zahlen u und v erfolgt komponentenweise, d.h., die x-Komponente des Resultates ist die Summe der x-Komponenten von u und v. Analoges gilt für die y-Komponente:

$$x_{u+v} = x_u + x_v \qquad \text{und} \qquad y_{u+v} = y_u + y_v \qquad \text{also eben:} \quad u + v = (x_u + x_v, y_u + y_v)$$

Ein Beispiel:

$$u = (3, -1) \quad \text{und} \quad v = (1, 2) \quad \Rightarrow \quad u + v = (3 + 1, -1 + 2) = (4, 1)$$

Das ist nicht besonders schwierig. Dagegen wirkt die Vorschrift (2.2) für die Multiplikation wie eine von den Formeln, die man erfahrungsgemäss immer wieder vergisst:

$$x_{u\cdot v} = x_u x_v - y_u y_v \qquad \text{und} \qquad y_{u\cdot v} = x_u y_v + y_u x_v \qquad \text{also eben:} \quad u\cdot v = (x_u x_v - y_u y_v, x_u y_v + y_u x_v)$$

Auch hierzu das Beispiel mit denselben komplexen Zahlen u und v:

$$u = (3,-1) \quad \text{und} \quad v = (1,2) \quad \Rightarrow \quad u\cdot v = (3\cdot 1 - (-1)\cdot 2, 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1) = (5,5)$$

Wir werden in späteren Abschnitten noch besser verstehen, was bei dieser Multiplikation "gespielt" wird.

2.3 $z = x + y\mathrm{i}$ – eine neue Schreibweise für komplexe Zahlen

Anhand von Addition und Multiplikation kann ich nun drei spezielle Zahlen in $\mathbb{C}$ vorstellen:

Nullelement $\mathbf{0 = (0,0)}$: Das Nullelement 0 einer Zahlenmenge soll jeweils diejenige Zahl sein, die jede andere Zahl unverändert lässt, wenn man sie zu dieser Zahl hinzuaddiert. Offensichtlich übernimmt in $\mathbb{C}$ die Zahl $0 := (0,0)$ diese Rolle, denn mit (2.1) folgt:

$$u + 0 = (x_u, y_u) + (0,0) = (x_u + 0, y_u + 0) = (x_u, y_u) = u$$

Einselement resp. reelle Einheit $\mathbf{1 = (1,0)}$: Das Einselement 1 einer Zahlenmenge soll jede andere Zahl unverändert lassen, wenn man sie mit dieser Zahl multipliziert. In $\mathbb{C}$ muss folglich die Zahl $1 := (1,0)$ als Einselement definiert werden, denn aus (2.2) ergibt sich:

$$u\cdot 1 = (x_u, y_u)\cdot(1,0) = (x_u\cdot 1 - y_u\cdot 0, x_u\cdot 0 + y_u\cdot 1) = (x_u, y_u) = u$$

Alle komplexen Zahlen der Form $(x,0)$ sollen zusammen die Rolle der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ spielen. Deshalb schreiben wir kurz $x \in \mathbb{C}$ statt $(x,0) \in \mathbb{C}$ und fassen auf diese Weise $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. In diesem Sinne wird das Einselement $1 = (1,0)$ zur **reellen Einheit**, denn jede reelle Zahl $x = (x,0)$ ist das x-fache dieser reellen Einheit, z.B.: $5 = 5\cdot 1 = (5,0)\cdot(1,0) = (5,0)$.

Imaginäre Einheit $\mathbf{i = (0,1)}$: Umgekehrt bezeichnet man nun die Zahl $\mathrm{i} := (0,1)$ als **imaginäre Einheit**. Jede Zahl der Form $(0,y)$ ist ein Vielfaches dieser imaginären Einheit, z.B.: $4\mathrm{i} = 4\cdot(0,1) = (0,4)$.

Wir sagen: Alle Zahlen der Form $(0,y) = y\mathrm{i}$ haben keinen reellen Anteil. Sie sind **rein imaginär** und bilden zusammen die Menge der **imaginären Zahlen** $\mathbb{I} = \{y\mathrm{i}\,|\,y \in \mathbb{R}\}$. Auch diese Menge fassen wir als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf: $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$.

Jede beliebige komplexe Zahl $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ kann nun als **Linearkombination** der reellen Einheit 1 und der imaginären Einheit i geschrieben werden:

$$z = (x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1) = x\cdot 1 + y\cdot \mathrm{i}$$

In dieser Notationsweise lässt man typischerweise die reelle Einheit 1 weg. Wir halten fest:

Die Summenschreibweise für komplexe Zahlen

Jede komplexe Zahl $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben in der Form:

$$z = x + y\mathrm{i} \tag{2.3}$$

Dabei ist i die imaginäre Einheit. $x \in \mathbb{R}$ wird als **Realteil** $\mathrm{Re}(z)$*, $y \in \mathbb{R}$ als* **Imaginärteil** $\mathrm{Im}(z)$ *von z bezeichnet.*

2.4 Anforderungen an die Addition und die Multiplikation

Wir wollen anhand von ein paar Überlegungen nachvollziehen, weshalb Addition und Multiplikation für die komplexen Zahlen gerade gemäss (2.1) und (2.2) festgelegt wurden.

1. Wir möchten mit den komplexen Zahlen so rechnen, wie wir uns das von den reellen Zahlen gewohnt sind. D.h., wir fordern, dass auch die komplexen einen Körper bilden, dass also gilt:

   Die komplexen Zahlen bilden einen Körper!

   Zusammen mit den Definitionen für die Addition (2.1) und die Multiplikation (2.2) bilden die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ einen Körper, d.h., sie erfüllen die neun Körperaxiome:

   1. *Für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad (u + v) + w = u + (v + w)$
   2. *Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad u + v = v + u$
   3. *Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{C}$, so dass für alle $u \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad u + 0 = u$
   4. *Zu jedem $u \in \mathbb{C}$ gibt es ein $-u \in \mathbb{C}$ mit:* $\quad r + (-r) = 0$
   5. *Für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$
   6. *Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad u \cdot v = v \cdot u$
   7. *Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{C}, 1 \neq 0$, so dass für alle $u \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad 1 \cdot u = u$
   8. *Zu jedem $u \in \mathbb{C}, u \neq 0$, gibt es ein Element $u^{-1} \in \mathbb{C}$, so dass gilt:* $\quad u \cdot u^{-1} = 1$
   9. *Für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ gilt:* $\quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

   Die komponentenweise Addition (2.1) ist naheliegend und garantiert bereits die Erfüllung der Axiome 1. bis 4. Die Kommutativität und die Assoziativität der Addition in $\mathbb{C}$ werden so direkt auf dieselben Eigenschaften der Addition in $\mathbb{R}$ zurückgeführt. Wir haben schon gesehen, dass das Nullelement durch $0 = (0, 0)$ gegeben ist. Weiter folgern wir für das Negative $(-u)$ zu einer komplexen Zahl $u = (x, y)$, dass $(-u) = (-x_u, -y_u)$, denn so ist:

   $$u + (-u) = x_u + y_u \mathrm{i} + x_{(-u)} + y_{(-u)} \mathrm{i} = x_u + y_u \mathrm{i} - x_u - y_u \mathrm{i} = 0$$

   Während sich diese komponentenweise Addition durch (2.1) quasi intuitiv aufdrängt, sieht das bei der Multiplikation etwas anders aus.

   Warum definiert man für die Multiplikation nicht einfach $u \cdot v = (x_u, y_u) \cdot (x_v, y_v) := (x_u \cdot x_v, y_u \cdot y_v)$, das wäre doch am naheliegendsten? Auch diese Multiplikation würde zusammen mit der Addition die weiteren Körperaxiome 5. bis 9. erfüllen. (Das Einselement wäre so die komplexe Zahl $1 = (1, 1)$.)

   Der Grund dafür liegt in zwei weiteren Forderungen, die wir an die Multiplikation stellen wollen...

2. Die Multiplikation mit einer reellen Zahl $k \in \mathbb{R}$ resp. $(k, 0) \in \mathbb{C}$ soll gerade die "skalare Multiplikation" im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sein. Es soll also gelten:

   $$k \cdot (x, y) = (k, 0) \cdot (x, y) \overset{!}{=} (k \cdot x, k \cdot y)$$

   Das erfüllt $(x_u, y_u) \cdot (x_v, y_v) = (x_u \cdot u_v, y_u \cdot y_v)$ bereits nicht mehr, denn es wäre

   $$k \cdot (x, y) = (k, 0) \cdot (x, y) = (k \cdot x, 0 \cdot y) = (kx, 0) = kx$$

   Es braucht also eine alternative Multiplikation, von der wir ausserdem noch etwas weiteres haben möchten...

3. Historisch war das eigentliche Motiv für die Einführung der komplexen Zahlen die Idee, dass die imaginären Zahlen $y\mathrm{i}$ als *Quadratwurzeln der negativen reellen Zahlen* dienen sollen, d.h., ihre Quadrate sollen negative Zahlen sein! Das erreicht man durch die Forderung:

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{2.4}$$

Wenn es überhaupt eine Multiplikation in $\mathbb{C}$ gibt, die diese Eigenschaft hat und zusammen mit der Addition distributiv ist, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} u \cdot v = (x_u, y_u) \cdot (x_v, y_v) &= (x_u + y_u i) \cdot (x_v + y_v \mathrm{i}) \\ &= x_u x_v + x_u y_v \mathrm{i} + y_u \mathrm{i} x_v + y_u \mathrm{i} y_v \mathrm{i} \\ &= x_u x_v + x_u y_v \mathrm{i} + y_u \mathrm{i} x_v + y_u y_v \mathrm{i}^2 \\ &= x_u x_v + x_u y_v \mathrm{i} + y_u \mathrm{i} x_v - y_u y_v \\ &= \underbrace{x_u x_v - y_u y_v}_{= x_{u \cdot v}} + \underbrace{(x_u y_v + y_u x_v)}_{= y_{u \cdot v}} \mathrm{i} \end{aligned}$$

gelten, und so ergibt sich die Formel (2.2) für die Multiplikation.

Wir überprüfen noch rasch, dass damit auch die **skalare Multiplikation** mit einer Zahl $k \in \mathbb{R}$ wie gewünscht funktioniert:

$$k \cdot (x, y) = (k, 0) \cdot (x, y) = (k \cdot x - 0 \cdot y, k \cdot y + 0 \cdot x) = (k \cdot x, k \cdot y) \quad \checkmark$$

Beispiel zur Multiplikation: Wir wollen die beiden komplexen Zahlen $(3, -5)$ und $(2, 4)$ miteinander multiplizieren. Dazu notieren wir sie in der Summenschreibweise und multiplizieren einfach distributiv aus, wobei $\mathrm{i}^2 = -1$ ist:

$$(3, -5) \cdot (2, 4) = (3 - 5\mathrm{i}) \cdot (2 + 4\mathrm{i}) = 6 + 12\mathrm{i} - 10\mathrm{i} - 20\mathrm{i}^2 = 6 + 2\mathrm{i} + 20 = 26 + 2\mathrm{i}$$

Zum Ende dieses Abschnittes wollen wir die bisherigen Erkenntnisse nochmals festhalten.

Bisherige Erkenntnisse zu komplexen Zahlen

- *Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist ein geordnetes reelles Zahlenpaar $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dabei bezeichnen wir $x = \mathrm{Re}(z)$ als Realteil und $y = \mathrm{Im}(z)$ als Imaginärteil von z.*
- *Auf den komplexen Zahlen sind eine Addition (2.1) und eine Multiplikation (2.2) definiert, die diese Zahlenmenge zu einem Körper machen:*

  (2.1): $\quad u + v = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v)$

  (2.2): $\quad u \cdot v = (x_u, y_u) \cdot (x_v, y_v) = (x_u \cdot x_v - y_u \cdot y_v, x_u \cdot y_v + y_u \cdot x_v)$

  Dabei sorgt (2.2) dafür, dass für das Quadrat der komplexen Einheit $\mathrm{i} = (0, 1)$ gilt:

  (2.4): $\quad \mathrm{i}^2 = -1$
- *Zum Rechnen mit komplexen Zahlen empfiehlt sich anstelle von $z = (x, y)$ die Summenschreibweise $z = x + y\mathrm{i}$. Sobald wir komplexe Zahlen in dieser Form aufschreiben, brauchen wir uns die komplizierte Multiplikationsvorschrift (2.2) nicht mehr zu merken. Vielmehr arbeiten wir bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen nur noch distributiv und verwenden dabei, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.*

  Anders gesagt: Mit komplexen Zahlen in der Form $x + y\mathrm{i}$ rechnet man "genau so" wie mit reellen Zahlen. Man muss sich nur merken, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.

Kapitel 3

Die Gauss'sche Zahlenebene

3.1 Komplexe Zahlen als Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene

Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf dem reellen Zahlenstrahl (vgl. Abb. 1.1 auf Seite 4). Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h., sie füllen diesen Zahlenstrahl lückenlos aus – von $-\infty$ bis $+\infty$.

Analog dazu kann jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ als Punkt in einem zweidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem (x-y-Koordinatensystem) aufgefasst werden. Letzteres bezeichnen wir als **komplexe** oder **Gauss'sche Zahlenebene**[1] (vgl. Abb. 3.1).

Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vollständig sind und sich jede komplexe Zahl (x, y) als Summe $z = x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben lässt, sind auch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eine **vollständige** Zahlenmenge. In der Gauss'schen Zahlenebene gibt es somit keine Lücken, also keinen Punkt, der nicht durch eine komplexe Zahl $z = (x, y)$ abgedeckt wäre.

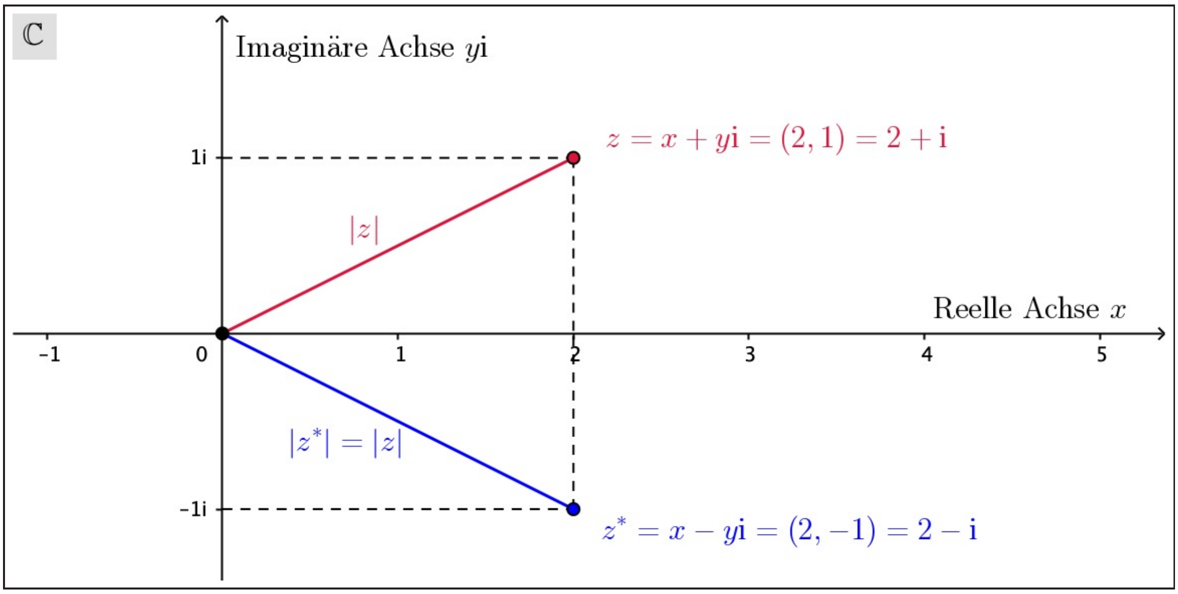

Abbildung 3.1: Die Gauss'sche Zahlenebene: Jeder komplexen Zahl $(x, y) = z = x + y\mathrm{i}$ entspricht ein Punkt mit den entsprechenden Koordinaten (x, y). Auf der horizontalen Achse sitzen die reellen, auf der vertikalen Achse die rein imaginären Zahlen. Durch Spiegelung von z an der x-Achse erhält man die konjugiert komplexe Zahl $z^* = x - y\mathrm{i}$. Der Betrag der komplexen Zahl $|z|$ ist ihr Abstand zum Ursprung 0. Folglich haben die Zahl z und ihr Konjugiertes $\bar{z}$ denselben Betrag.

[1] Ein Miterfinder dieser Darstellung war der berühmte deutsche Mathematiker **Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855).

3.2 Das Konjugierte z^* einer komplexen Zahl

Das **komplex Konjugierte** oder einfach das **Konjugierte** z^* einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ erhält man, indem man ihren Imaginärteil y durch sein Negatives, also $-y$ ersetzt:

$$z = x + y\mathrm{i} \quad \rightarrow \quad z^* = x - y\mathrm{i} \qquad \text{daraus folgt:} \quad (z^*)^* = z$$

Anschaulich entspricht das komplex Konjugierte z^* in der komplexen Ebene einer Spiegelung des zu z gehörenden Punktes an der reellen Achse (vgl. Abb. 3.1).

3.3 Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl

- **Beträge reeller Zahlen:** Unter dem **Betrag** $|a|$ einer reellen Zahl a verstehen wir ihren positiven Zahlenwert ohne Vorzeichen:

  $$|3| = 3 \qquad |-6| = 6 \qquad |0| = 0 \qquad \left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} \qquad \left|-\frac{35}{13}\right| = \frac{35}{13}$$

  Auf dem reellen Zahlenstrahl (vgl. Abb. 1.1 auf Seite 4) kann man $|a|$ als Abstand zum Nullpunkt 0 interpretieren – und Abstände sind per Definition immer positiv.

  Häufig wird dieser Betrag einer Zahl auch **Absolutbetrag** genannt.[2]

- **Beträge komplexer Zahlen:** Auch bei komplexen Zahlen soll der Betrag $|z|$ für den Abstand zum Nullpunkt 0 stehen (vgl. Abb. 3.1). Folgende Definition erfüllt diese Anforderung:

  Absolutbetrag einer komplexen Zahl z

  Der **Absolutbetrag** *oder einfach der* **Betrag** $|z|$ *einer komplexen Zahl* $z = x + y\mathrm{i}$ *ist der Abstand des zu* z *gehörenden Punktes zum Ursprung* 0 *der Gaussch'schen Zahlenebene.*

  Rechnerisch ist der Betrag durch die (positive) Wurzel des Produktes aus dem konjugiert Komplexen z^* *und* z *selber gegeben:*

  $$|z| := \sqrt{z^* \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.1}$$

  Betrachten wir eine beliebige komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i}$, so erhalten wir für ihren Betrag:

  $$|z| = \sqrt{z^* \cdot z} = \sqrt{(x - y\mathrm{i})(x + y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2 + xy\mathrm{i} - yix - y^2\mathrm{i}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  Wir bemerken, wie $-\mathrm{i}^2 = -(-1)$ schliesslich ein positives Vorzeichen von y^2 ergibt.

  Der Ausdruck $x^2 + y^2$ erklärt sich mittels des **Satzes von Pythagoras** fast von alleine. Die beiden Quadrate der Koordinaten (x, y) des zu z gehörenden Punktes ergeben zusammen das Quadrat des Abstandes zum Ursprung.

  N.B.: Das komplex Konjugierte z^* hat wegen $(z^*)^* = z$ denselben Betrag wie z selber:

  $$|z^*| = \sqrt{(z^*)^* \cdot z^*} = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{z^* \cdot z} = |z|$$

[2] Mit dieser Namensgebung wird klar, weshalb in manchen Rechenprogrammen der Betrag mit dem Kürzel `abs()` aufgerufen werden kann. So z.B. auch in `GeoGebra`.

3.4 Die Addition komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene

Veranschaulichung in der Gauss'schen Zahlenebene (vgl. Abb. 3.2): Die Addition zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 erfolgt komponentenweise. In der komplexen Zahlenebene entspricht sie folglich der **Vektoraddition** der beiden Ortsvektoren von 0 nach z_1 resp. z_2.

Ort des negativen Elementes: Das Element $-z$ entspricht in der Gauss'schen Zahlenebene einfach der **Spiegelung** von z am Ursprung 0 (vgl. Abb. 3.2).

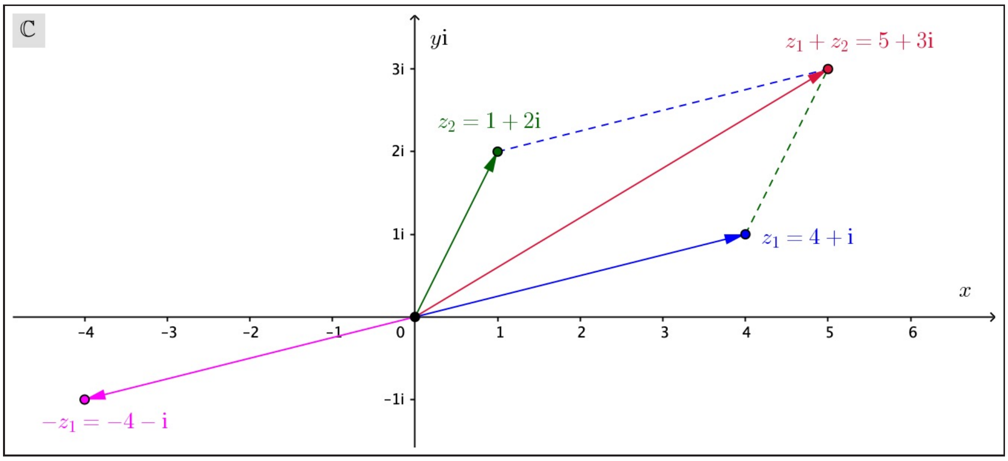

Abbildung 3.2: Die Addition zweier Zahlen entspricht einer Vektoraddition: Die Ortsvektoren von 0 nach z_1 und z_2 werden aneinander gehängt. Das Negative $-z_1$ entspricht der Spiegelung von z_1 an 0.

3.5 Die Multiplikation komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene

Beispiel zur Multiplikation: Es seien $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$. Für ihr Produkt ergibt sich:

$$z_1 z_2 = (1 + 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -1 - \mathrm{i} - 2 = -3 - \mathrm{i}$$

Abb. 3.3 zeigt, wo sich dieses Resultat in der Gauss'schen Zahlenebene befindet. Tatsächlich gibt es einen geometrischen Zusammenhang zwischen z_1, z_2 und $z_1 z_2$. Den werden wir aber erst im Abschnitt 4.4 aufdecken und dann auf dieses Beispiel zurückschauen.

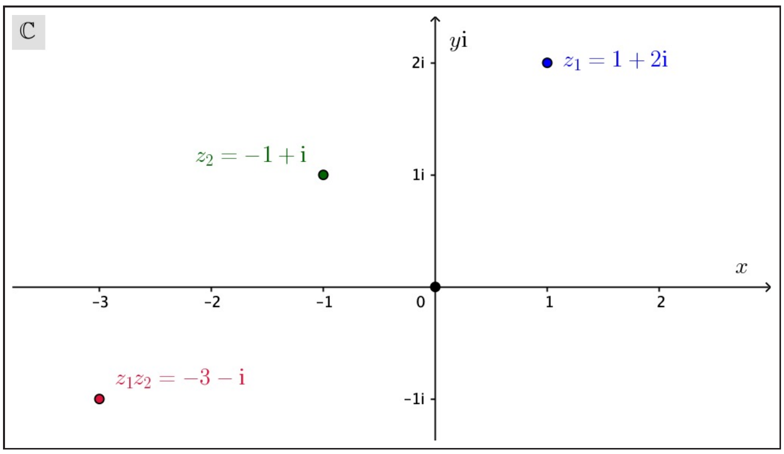

Abbildung 3.3: Im Moment ist noch unklar, welche geometrische Bedeutung die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 hat. Die Auflösung folgt im Abschnitt 4.

3.6 Division: Bruchrechnen mit komplexen Zahlen

Division komplexer Zahlen und "Identifikationstrick": $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ soll durch $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i} \neq 0$ geteilt werden, wodurch die Zahl $z_3 = x_3 + y_3\mathrm{i}$ entsteht:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_1 = z_2 \cdot z_3$$

Stimmt die Division links, so muss auch die Multiplikation rechts richtig sein und umgekehrt, sofern $z_2 \neq 0$ ist. Daraus erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen den Real- und Imaginärteilen der drei Zahlen:

$$z_2 \cdot z_3 = z_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{(x_2 + y_2\mathrm{i})}_{=z_2} \cdot \underbrace{(x_3 + y_3\mathrm{i})}_{=z_3} = \underbrace{x_2x_3 - y_2y_3}_{\overset{!}{=}x_1} + \underbrace{(x_3y_2 + x_2y_3)}_{\overset{!}{=}y_1}\mathrm{i}$$

Da Real- und Imaginärteil der Zahl $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ eindeutig sind, können wir die Terme $x_2x_3 - y_2y_3$ und $x_3y_2 + x_2y_3$ ganz rechts mit x_1 resp. y_1 **identifizieren**. Es ergibt sich ein ohne Weiteres lösbares lineares Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten x_3 und y_3:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_2x_3 - y_2y_3 \\ y_1 = x_3y_2 + x_2y_3 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_2}x_3 - y_3 \\ \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_2}x_3 + y_3 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{y_2} + \frac{y_1}{x_2} = \left(\frac{x_2}{y_2} + \frac{y_2}{x_2}\right)x_3$$

$$\Rightarrow \quad x_1x_2 + y_1y_2 = \left(x_2^2 + y_2^2\right)x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

In der Fortsetzung lässt sich auch y_3 bestimmen – das kann man selber überprüfen. Wir erhalten:

$$y_3 = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Dieser Weg ist wegen des Identifikationstricks zwar lehrreich, aber nicht besonders elegant. Es folgt nun eine zweite Berechnung von $\frac{z_1}{z_2}$, die ebenso neue Aufschlüsse und Erkenntnisse mit sich bringt.

Erweiterungstrick: Die bessere Vorgehensweise für die Division zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 besteht in der Erweiterung des Bruchs $\frac{z_1}{z_2}$ mit dem konjugiert Komplexen des Nenners, also mit z_2^*:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2 + y_2^2} \overset{!}{=} x_3 + y_3\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{und} \quad y_3 = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Das entspricht der Lösung von vorhin. Der Trick der Erweiterung mit z_2^* macht den Nenner reell. Dort entsteht nämlich einfach das Betragsquadrat des Divisors: $z_2 \cdot z_2^* = |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Ein konkretes Beispiel: Mittels Erweiterungstrick berechne ich das Resultat der Division von $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ geteilt durch $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ (vgl. Abb. 3.4 oben auf der nächsten Seite):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{1 + 2\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}} \cdot \frac{-1 - \mathrm{i}}{-1 - \mathrm{i}} = \frac{-1 - \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2}{1 + \mathrm{i} - \mathrm{i} + 1} = \frac{1 - 3\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$$

Wie schon bei der Multiplikation haben wir derzeit noch keine gute geometrische Interpretation für dieses Resultat. Das werden wir erst in Abschnitt 4.4 besser verstehen.

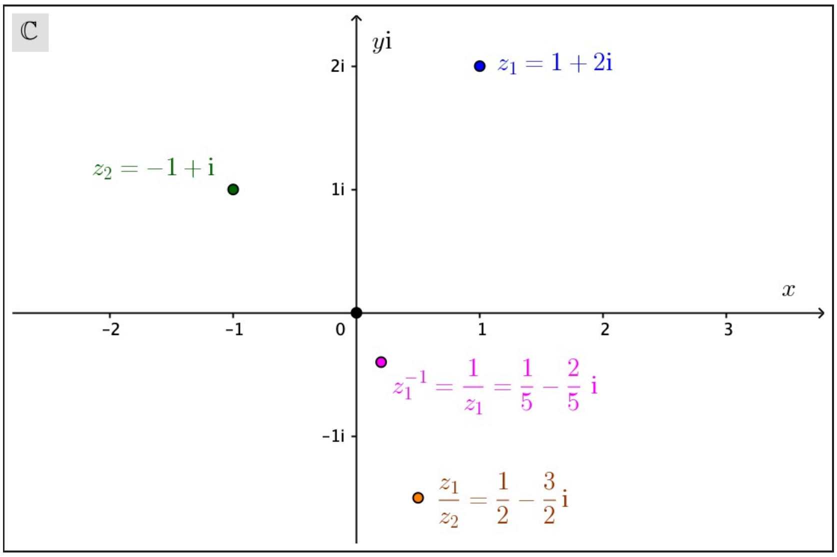

Abbildung 3.4: Die Lage des Resultates einer Division $\frac{z_1}{z_2}$ verstehen wir aktuell noch nicht so recht, obwohl wir sie berechnen können. Die Lage des multiplikativ Inversen z^{-1} lässt sich aber gut nachvollziehen. Vgl. dazu Abb. 3.5.

Berechnung des multiplikativ inversen Elementes: Bereits der Bruch $\frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}$ kann als Resultat der Division aufgefasst werden, einfach ohne Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Setzen wir $z_1 = 1$ und $z_2 = z$, so können wir damit ermitteln, wie denn das multiplikativ inverse Element $z^{-1} = \frac{1}{z}$ zu einer komplexen Zahl z gegeben sein muss:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z^*}{|z|} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z^*}{|z^*|}$$

Zuletzt habe ich benutzt, dass $|z^*| = |z|$ ist.

Die Faktorisierung in zwei Brüche am Ende dieser Rechnung hilft uns zu verstehen, wo z^{-1} in der Gauss'schen Zahlenebene zu liegen kommt (vgl. Abb. 3.5):

i. Im Bruch $\frac{z^*}{|z^*|}$ wird die Zahl z^* durch ihren eigenen Betrag geteilt. Das ergibt eine komplexe Zahl mit Betrag 1. $\frac{z^*}{|z^*|}$ liegt also auf dem **Einheitskreis** der komplexen Ebene, und zwar von 0 aus gesehen in Richtung von z^*.

ii. Auf diese Zahl $\frac{z^*}{|z^*|}$ wird nun in $z^{-1} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z^*}{|z^*|}$ der Faktor $\frac{1}{|z|}$ angewendet. Das bedeutet, z^{-1} liegt von 0 aus gesehen in Richtung des komplex Konjugierten z^* und weist den Betrag $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ auf, hat also vom Ursprung den Abstand $\frac{1}{|z|}$.

   Ist $|z| > 1$, so ist $|z^{-1}| < 1$ et vice versa. In der komplexen Ebene liegt das multiplikativ inverse Element z^{-1} innerhalb des Einheitskreises, wenn die Zahl z selber ausserhalb desselben liegt – und umgekehrt. Dies wird in Abb. 3.5 explizit veranschaulicht.

Damit verstehen wir auch die Lage des multiplikativ Inversen von $z = 1 + 2\mathrm{i}$ in Abb. 3.4 oben:

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{1^2 + 2^2} = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5}\,(1 - 2\mathrm{i})$$

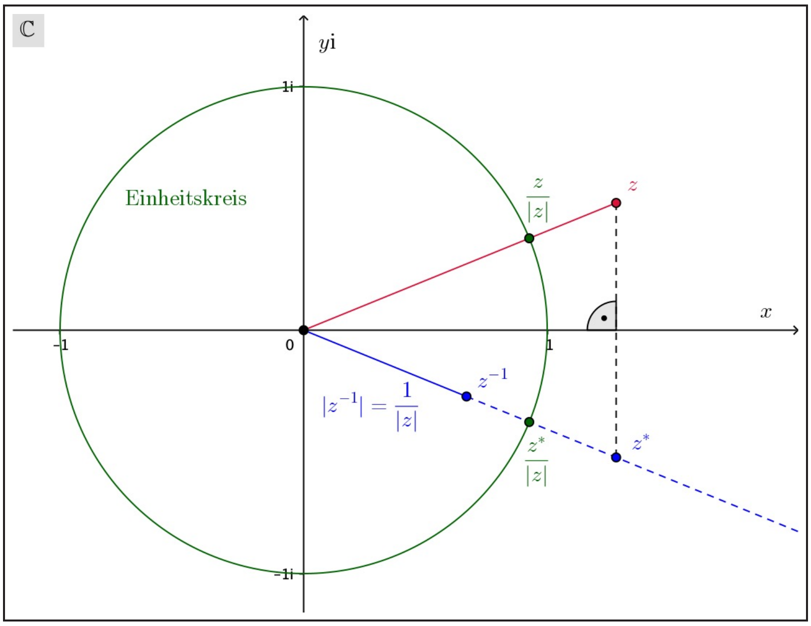

Abbildung 3.5: Das multiplikativ inverse Element z^{-1} liegt von 0 aus gesehen in Richtung des konjugiert Komplexen z^*. Sein Betrag $|z^{-1}|$ ist gleich dem Kehrwert von $|z|$.

3.7 Die imaginäre Einheit i und ihre Potenzen

Kurz wollen uns noch überlegen:

$$\mathrm{i}^0 = 1 \qquad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^2 = -1 \qquad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^4 = 1$$

Ebenso:

$$\mathrm{i}^0 = 1 \qquad \mathrm{i}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{i}^2} = -1 \qquad \mathrm{i}^{-3} = \frac{1}{\mathrm{i}^3} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^4} = \mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^{-4} = \frac{1}{\mathrm{i}^4} = 1$$

Ab der vierten Potenz von i wiederholen sich die Werte. Also merken wir uns:

$$\mathrm{i}^{4n} = 1 \qquad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i} \qquad \mathrm{i}^{4n+2} = -1 \qquad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i} \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

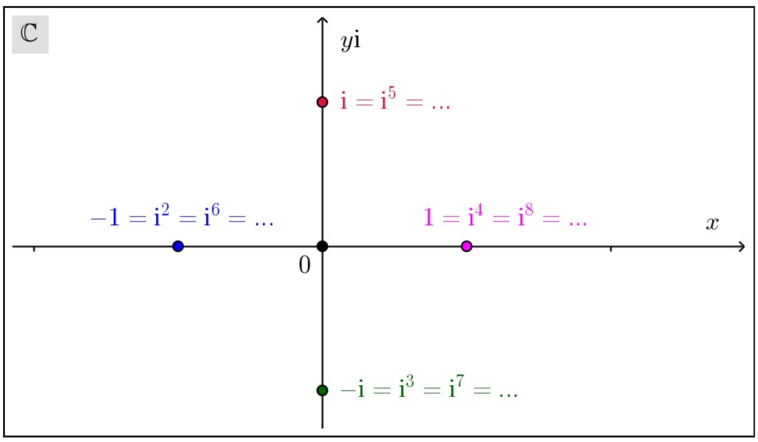

Abbildung 3.6: Die imaginäre Einheit i und ihre Potenzen in der komplexen Ebene.

Kapitel 4

Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten und Euler'sche Formel

4.1 Polarkoordinaten in der komplexen Ebene

Wir betrachten zunächst eine komplexe Zahl z_1 mit Betrag $|z_1| = 1$. D.h., die Zahl z_1 liegt in der Gauss'schen Ebene auf dem **Einheitskreis** rund um den Ursprung 0 (vgl. Abb. 4.1). Wegen der Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis muss dann gerade gelten:

$$z_1 = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi \tag{4.1}$$

Dabei ist φ der von der reellen Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel. Wir wollen dafür von Anfang an und ausschliesslich das **Bogenmass** verwenden.[1]

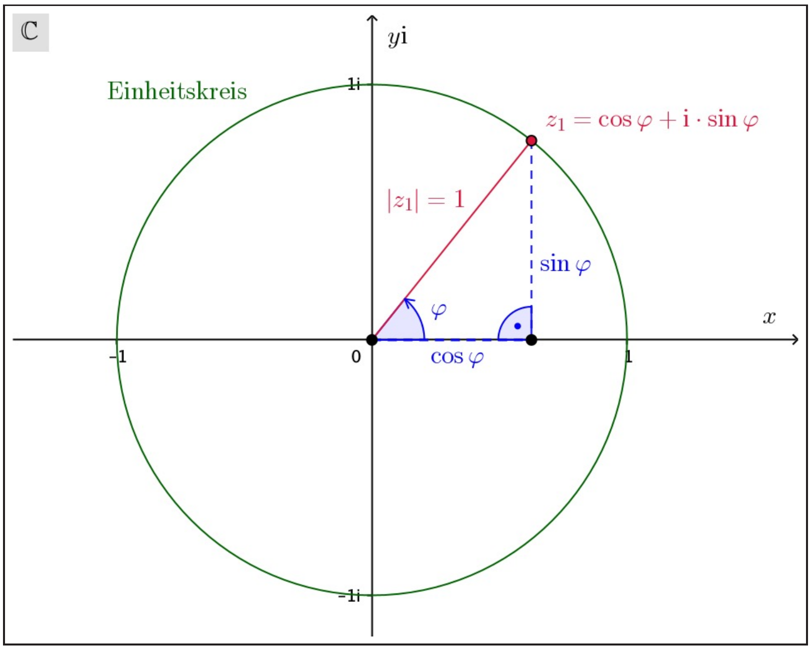

Abbildung 4.1: Zu jedem von der reellen Achse im Gegenuhrzeigersinn abgetragenen Winkel φ gehört genau ein Punkt auf dem Einheitskreis resp. eben eine komplexe Zahl z_1 mit Betrag $|z_1| = 1$. Wegen den bekannten Definitionen von Sinus und Cosinus am Einheitskreis gilt: $z_1 = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi$.

[1] Zur Erinnerung: Für die Umrechnung zwischen Bogenmass und Gradmass muss man sich merken, dass: $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180^\circ$.

Jede komplexe Zahl auf dem Einheitskreis lässt sich also ganz anschaulich mit nur einem Winkel resp. einer **Winkelkoordinate** φ beschreiben. Dabei gilt stets der "trigonometrische Satz des Pythagoras":[2]

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{4.2}$$

Multiplizieren wir nun unser $z_1 = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ mit einer reellen Zahl $r \geq 0$, so erhalten wir eine neue komplexe Zahl z:

$$z = r\cdot z_1 = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{r\sin\varphi}_{=y}$$

z_1 wird um den Faktor r vom Ursprung weggestreckt. Da $|z_1| = 1$ war, hat z nun den Betrag $|z| = r$, also den Abstand r vom Ursprung, wovon man sich leicht überzeugen kann:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{r^2} = r$$

Abb. 4.2 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen z_1 und $z = r\cdot z_1$.

Jede komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ lässt sich also statt durch den Realteil x und den Imaginärteil y ebenso gut durch ein Paar (r,φ) aus einem Betrag r und einer Winkelkoordinate φ beschreiben. r und φ nennt man die **Polarkoordinaten** von z. Es gilt: $z = r\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot r\sin\varphi$.

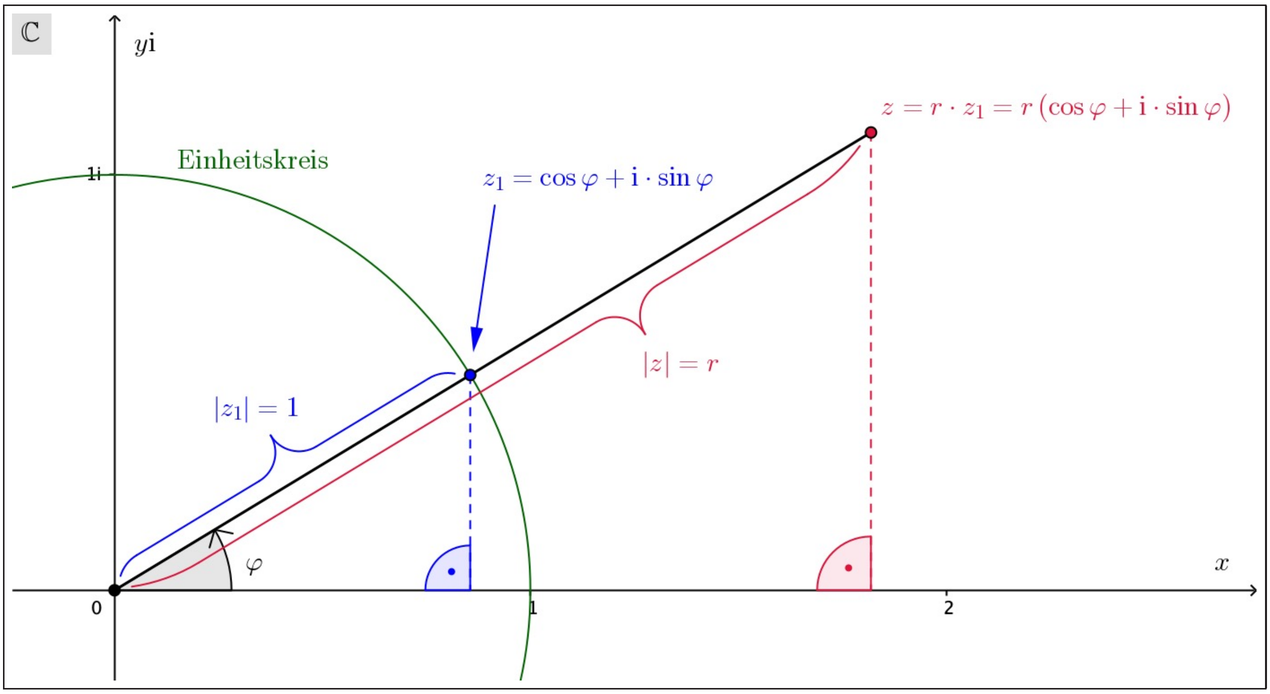

Abbildung 4.2: Nimmt man den Ursprung 0 als Streckzentrum und streckt die auf dem Einheitskreis liegende Zahl z_1 mit dem Faktor r, so resultiert die Zahl $z = r\cdot z_1$. Zu ihr gehört nach wie vor die Winkelkoordinate φ, aber ihr Betrag ist nun $|z| = r$.

[2] Zur Klärung: $\cos^2\varphi \equiv (\cos\varphi)^2$ und $\sin^2\varphi \equiv (\sin\varphi)^2$.

4.2 Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Polarkoordinaten → kartesische Koordinaten

Die kartesischen Koordinaten x und y lassen sich leicht durch die Polarkoordinaten r und φ ausdrücken, wie wir bereits gesehen haben:

$$x = r\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r\sin\varphi$$

Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

In die Gegenrichtung ergibt sich für den Betrag r sofort:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Und was ist mit der Winkelkoordinate φ? Zunächst stellen wir fest, dass zu einem bestimmten z beliebig viele korrekte Werte für φ existieren. Wenn wir nämlich einen zu z passenden Winkel φ_0 um 2π, also um eine ganze Umdrehung vergrössern oder verkleinern, so schauen wir ja wieder in dieselbe Richtung. Alle Winkel der Form

$$\varphi = \varphi_0 + n \cdot 2\pi \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

gehören also bei vorgegebenem r zur selben Zahl z.

Wenn wir aber effektiv mal die Winkelkoordinate zu einer komplexen Zahl anzugeben haben, dann soll ihr Wert möglichst nahe bei 0 liegen. Wir bevorzugen somit:

$$-\pi < \varphi \leq \pi$$

Blicken wir kurz auf Abb. 4.2. Dort besitzt die Zahl z den Realteil $x = r\cos\varphi$ und den Imaginärteil $y = r\sin\varphi$. Der Bruch $\frac{y}{x}$ ergibt gerade $\tan\varphi$, denn im grossen rechtwinkligen Dreieck ist dies genau das Verhältnis der Gegenkathete von φ zur Ankathete. Daraus folgern wir:

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Allerdings kann dies noch nicht die letzte Wahrheit sein, denn so ergäbe sich z.B. für $z = 3 + 2\mathrm{i}$ und $z = -3 - 2\mathrm{i}$ derselbe Winkelwert, weil:

$$\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}$$

Wir müssen eine Fallunterscheidung machen. Je nachdem, in welchem Quadranten der komplexen Ebene die Zahl z liegt, muss φ leicht anders berechnet werden. Wissend, dass der Arcustangens per Definition Winkelwerte $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ liefert (vgl. Abb. 4.3), notieren wir:

$$\begin{array}{lllll}
\text{1. Quadrant:} & x > 0 & \text{und} & y > 0 & \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \\[2ex]
\text{2. Quadrant:} & x < 0 & \text{und} & y > 0 & \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi \\[2ex]
\text{3. Quadrant:} & x < 0 & \text{und} & y < 0 & \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} - \pi \\[2ex]
\text{4. Quadrant:} & x > 0 & \text{und} & y < 0 & \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}
\end{array}$$

Auf diese Weise entstehen, wie weiter oben gefordert, die Winkelwerte mit möglichst kleinem Betrag, also $-\pi < \varphi \leq \pi$.

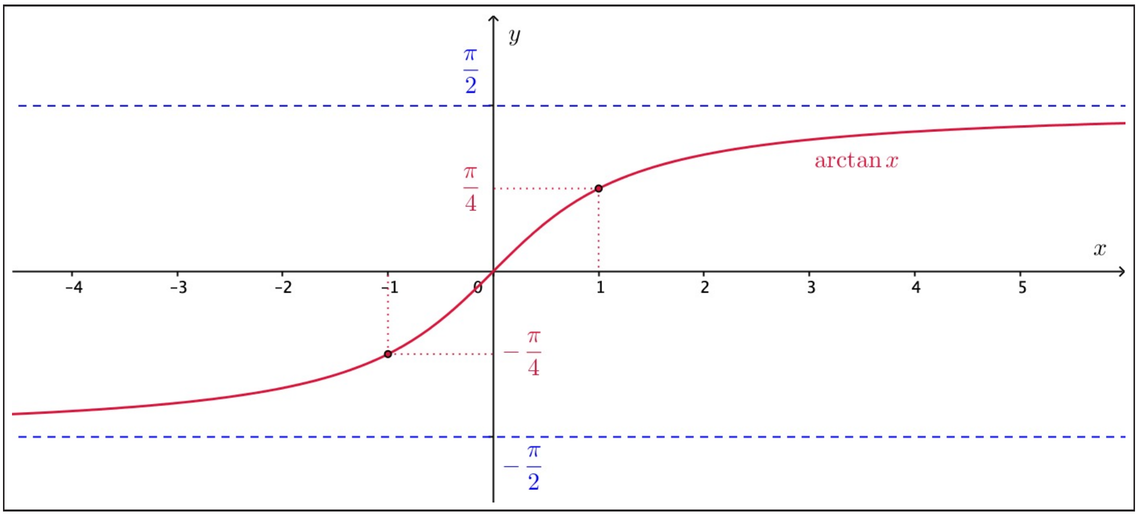

Abbildung 4.3: Der Graph der Arcustangensfunktion.

Halten wir nochmals fest, was wir in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitel Neues gesehen haben:

Koordinaten komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl z wird einerseits durch ihre beiden **kartesischen Koordinaten**, *d.h. durch den Realteil x und den Imaginärteil y, beschrieben. Damit notieren wir z entweder als geordnetes Paar oder in der Summenschreibweise:*

$$z = (x, y) = x + y\mathrm{i}$$

Andererseits gehören zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ zwei **Polarkoordinaten** *r und φ. $r = |z|$ ist der* **Betrag** *und φ die* **Winkelkoordinate** *von z. Auch mit den Winkelkoordinaten können wir z entweder als Paar oder unter Verwendung von Cosinus und Sinus als Summe notieren:*

$$z = (r, \varphi) = r\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot r\sin\varphi = r\cdot(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) \tag{4.3}$$

Für die Umrechnung von Polar- zu kartesischen Koordinaten gilt:

$$x = r\cos\varphi \qquad \textit{und} \qquad y = r\sin\varphi \tag{4.4}$$

Umgekehrt ergibt sich für die Umrechnung von kartesischen zu Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textit{und} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x} + k\pi \tag{4.5}$$

Für z im 2. Quadranten der komplexen Ebene ist $k = +1$, für den 3. Quadranten ist $k = -1$ und für den 1. und 4. Quadranten ist $k = 0$.

4.3 Euler'sche Formel und Euler-Darstellung komplexer Zahlen

Wir kommen nun zum eigentlichen Grund, weshalb sich das Rechnen mit komplexen Zahlen so dermassen durchgesetzt hat. Es ist eine Art mathematisches Wunder und heisst **Euler'sche Formel**. Dabei handelt es sich um eine Beziehung zwischen den fundamentalen Zahlenkonstanten e, i und π sowie den Neutralelementen 0 und 1 von Addition und Multiplikation:

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0 \tag{4.6}$$

Diese Gleichung wird von vielen Mathematiker*innen als etwas vom Fundamentalsten und Schönsten überhaupt angesehen... Sie entspringt dem folgenden Zusammenhang:

Euler'sche Formel und Euler-Darstellung

Für die Euler'sche Zahl $e\,(\approx 2.718)$ und die beiden Winkelfunktionen Cosinus und Sinus gilt die **Euler'sche Formel***:*

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi \tag{4.7}$$

$e^{\mathrm{i}\varphi}$ ist somit die praktische Kurzschreibweise für eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis der Gauss'schen Zahlenebene, denn genau dafür steht $\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ ja. Mit (4.3) lässt sich folglich jede komplexe Zahl z mit Polarkoordinaten r und φ in der sogenannten **Euler-Darstellung** *notieren:*

$$z = r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{4.8}$$

Damit darf man wie gewohnt rechnen! Insbesondere gelten für $e^{\mathrm{i}\varphi}$ die üblichen **Potenzgesetze***, was uns zahlreiche neue Rechenwege eröffnet.*

Die Euler'sche Formel ist gar nicht so schwierig zu beweisen. Allerdings braucht man dazu tiefere Kenntnisse aus anderen Bereichen der analytischen Mathematik, insbesondere sogenannte **Potenzreihenentwicklungen** von Funktionen. Wir verzichten an dieser Stelle auf diesen Beweis. Ich habe ihn im Anhang A angefügt.

Zunächst ein paar unmittelbare Konsequenzen aus der Euler'sche Formel (4.7) und der Euler-Darstellung (4.8):

- Das konjugiert Komplexe einer Zahl z lässt sich auch in der Euler-Darstellung rasch notieren:

  $$z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi} \qquad\Rightarrow\qquad z^* = r\,e^{-\mathrm{i}\varphi} = r\cdot\big(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(-\varphi)\big)$$

  Von der reellen Achse aus wird statt um φ im Gegenuhrzeigersinn eben um $-\varphi$ im Uhrzeigersinn gedreht, um zu z^* zu gelangen.

- Da die Cosinus- und die Sinusfunktion 2π-periodisch sind, gilt dies nun auch für die Exponentialfunktion $e^{\mathrm{i}\varphi}$. Das bedeutet:

  $$e^{\mathrm{i}(\varphi\pm 2\pi)} = e^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{für jede beliebige Winkelkoordinate } \varphi$$

  Das ist klar, denn $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ steht für die zur Winkelkoordinate φ gehörende komplexe Zahl z auf dem Einheitskreis. Die Subtraktion oder Addition von 2π erzeugt eine ganze Umdrehung im oder gegen den Uhrzeigersinn und führt somit wieder auf dasselbe z.

- Besonders wichtig, da häufig vorkommend, sind die speziellen Werte von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ bei Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$:

  $$e^0 = 1 \qquad e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i} \qquad e^{\mathrm{i}\pi} = -1 \qquad e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i} \qquad e^{\mathrm{i}2\pi} = 1 \qquad \text{etc.}$$

  Hierin steckt auch die "besonders schöne" Gleichung (4.6) von oben:

  $$e^{\mathrm{i}\pi} = -1 \qquad\Leftrightarrow\qquad e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

4.4 Das Verständnis der komplexen Multiplikation (und Division)

Im Abschnitt 3.5 war das graphische Verständnis für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen noch nicht so richtig greifbar (vgl. Abb. 3.3). Das Produkt zweier Zahlen liess sich zwar ohne Probleme berechnen, wie wir im damaligen Beispiel mit $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ (vgl. Seite 13) gesehen hatten:

$$z_3 = z_1 z_2 = (1 + 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -1 - \mathrm{i} - 2 = -3 - \mathrm{i}$$

Mit der Euler-Darstellung wird nun aber viel klarer, was die grafische Bedeutung dieser Multiplikation ist.

Betrachten wir ganz allgemein zwei komplexe Zahlen in ihren Euler-Darstellungen $z_1 = r_1\, e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{\mathrm{i}\varphi_2}$, so ergibt sich für ihr Produkt:

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1\, e^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\, e^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = r_3\, e^{\mathrm{i}\varphi_3}$$

D.h., die neue Zahl z_3 besitzt als Betrag das Produkt der Beträge der beiden ursprünglichen Zahlen und die Winkelkoordinaten werden einfach addiert:

$$r_3 = r_1 r_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Abb. 4.4 zeigt erneut das Beispiel aus Abschnitt 3.5. Wir erkennen daran das geometrische Prinzip hinter der Multiplikation zweier komplexer Zahlen. Die Multiplikation von z_1 mit z_2 lässt sich als **Drehstreckung** des zu z_1 gehörenden Punktes mit Drehwinkel φ_2 und Streckfaktor r_2 von 0 weg interpretieren.

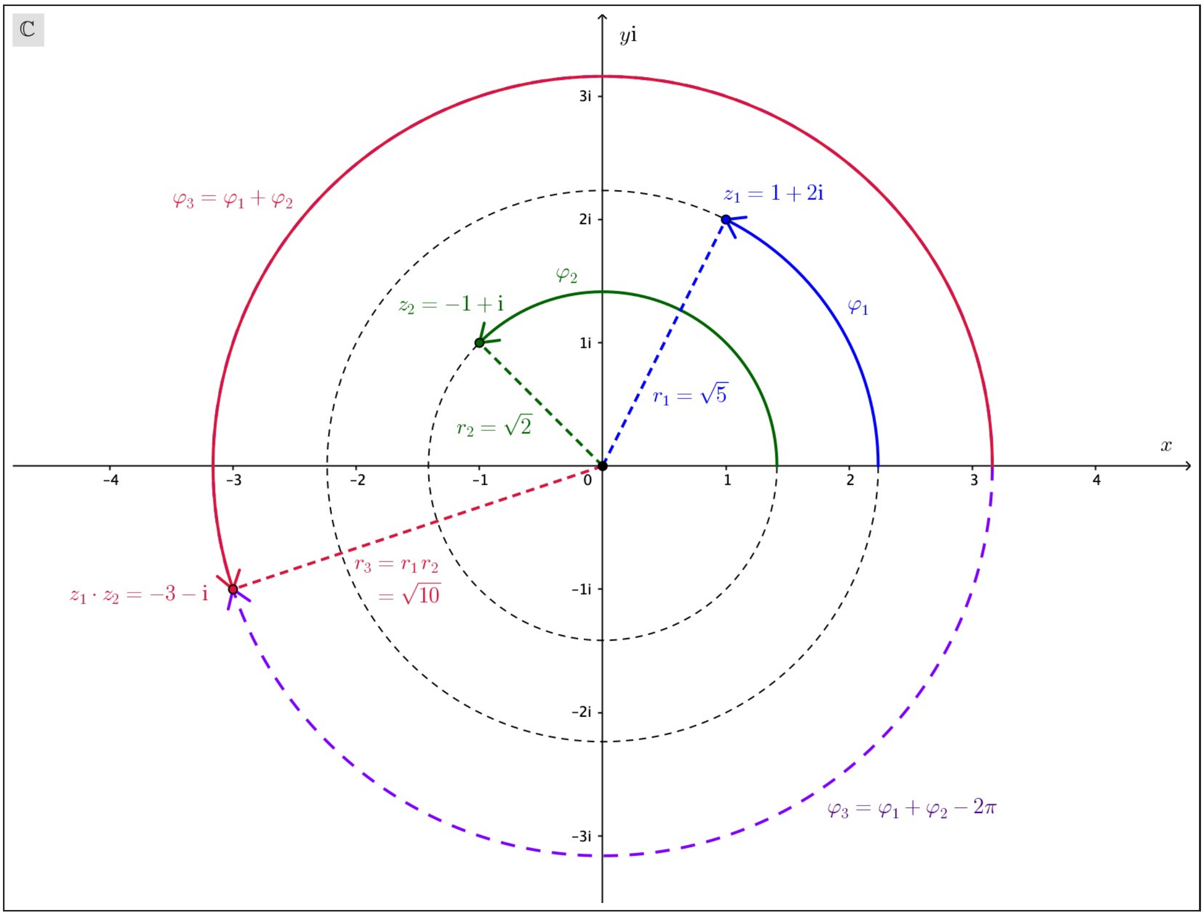

Abbildung 4.4: Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 zur Zahl $z_3 = z_1 z_2$ werden die Beträge miteinander multipliziert ($r_3 = r_1 r_2$) und die Winkelkoordinaten addiert ($\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$).

Natürlich wollen wir dieses Beispiel aus Abschnitt 3.5 resp. Abb. 4.4 auch rechnerisch nachvollziehen. Zu den beiden Zahlen $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ gehört je eine Winkelkoordinate und ein Betrag, ebenso zum Resultat $z_3 = z_1 \cdot z_2 = -3 - \mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad &&\text{und} \qquad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1.107 \\
r_2 &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad &&\text{und} \qquad \varphi_2 = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \approx 2.356 \\
r_3 &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \qquad &&\text{und} \qquad \varphi_3 = \arctan\left(\frac{-1}{-3}\right) - \pi \approx -2.820
\end{aligned}$$

Bei den Beträgen sehen wir sofort, dass der Zusammenhang stimmt:

$$r_1 r_2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10} = r_3$$

Bei den Winkelkoordinaten müssen wir einen kurzen Moment länger überlegen:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \approx 1.107 + 2.356 = 3.463 > \pi$$

Dieses Ergebnis liegt ausserhalb des Intervalls $]-\pi; \pi]$. Um es wieder in diesen Bereich zu bringen, müssen wir davon einmal 2π abziehen. Dadurch verändern wir an der Richtung von $\varphi_1 + \varphi_2$ nichts, denn die Addition oder Subtraktion von 2π entspricht ja einfach einer ganzen Umdrehung:

$$\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi \approx 3.643 - 2\pi \approx -2.820$$

Nun stimmt das Resultat mit der weiter oben berechneten Winkelkoordinate φ_3 von z_3 überein.

Übertragung auf die Division zweier komplexer Zahlen

Auch die Division zweier komplexer Zahlen fällt in der Euler-Darstellung leicht und lässt sich in der Folge auch geometrisch gut verstehen:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\, e^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} = r_3\, e^{\mathrm{i}\varphi_3}$$

Somit gilt für den Betrag und die Winkelkoordinate des Resultates z_3:

$$r_3 = \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{und} \qquad \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Immer noch handelt es sich um eine Drehstreckung: z_1 wird um den Faktor r_2 gegen den Ursprung hin gestaucht und zudem um φ_2 im Uhrzeigersinn gedreht (das Minuszeichen in $\varphi_1 - \varphi_2$ sorgt dafür, dass die Drehung nicht im Gegenuhrzeigersinn, sondern eben im Uhrzeigersinn erfolgt).

Damit verstehen wir das Beispiel aus Abschnitt 3.6 besser, das in Abb. 3.4 dargestellt wird. $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ wird durch $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ geteilt, wodurch $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$ entsteht. Die zugehörigen Polarkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned}
&r_1 = \sqrt{5} \qquad \varphi_1 \approx 1.107 \qquad r_2 = \sqrt{2} \qquad \varphi_2 \approx 2.356 \\
&r_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_3 = \arctan\left(\frac{-3}{1}\right) \approx -1.249
\end{aligned}$$

Damit ist tatsächlich $\frac{r_1}{r_2} = r_3$ und weiter $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. Die Zahl z_1 wird durch die Division durch z_2 um den Faktor r_2 gegen 0 hin gestaucht und um φ_2 im Uhrzeigersinn gedreht.

Die Multiplikation mit $e^{\mathrm{i}\varphi}$

Besonders häufig kommt in verschiedensten Anwendungen mit komplexen Zahlen die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit dem Faktor $e^{\mathrm{i}\varphi}$ vor. Wir verstehen nun, dass ein solcher Faktor in der Gauss'schen Zahlenebene einfach eine Drehung von z um den Ursprung mit dem Winkel φ bewirkt.

Ein Spezialfall davon ist die Multiplikation mit $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Sie entspricht offensichtlich einer Rotation um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

Halten wir zum Ende dieses Abschnittes noch einmal alles Wesentliche fest:

Zusammenfassung: Komplexe Multiplikation in der Euler-Darstellung

Multiplizieren wir eine erste komplexe Zahl $z_1 = r_1\, e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ mit einer zweiten komplexen Zahl $z_2 = r_2\, e^{\mathrm{i}\varphi_2}$, so erhalten wir die Zahl z_3 mit:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_1\, e^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = r_3\, e^{\mathrm{i}\varphi_3}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet also:

- *Der Betrag von z_3 ist das Produkt der Beträge von z_1 und z_2:*

$$r_3 = r_1 \cdot r_2$$

- *Die Winkelkoordinate von z_3 ist die Summe der Winkelkoordinaten von z_1 und z_2:*

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Multiplikation als Drehstreckung in der komplexen Ebene

Die Multiplikation der Zahl z_1 mit der Zahl z_2 steht für eine Drehstreckung von z_1 um den Ursprung in der Gauss'schen Ebene:

- *Streckung von z_1 mit dem Faktor r_2 mit dem Ursprung als Streckzentrum.*
- *Drehung von z_1 im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ_2 um den Ursprung.*

Natürlich kann dieselbe Multiplikation ebenso gut als Drehstreckung von z_2 mit dem Winkel φ_1 und dem Streckfaktor r_1 aufgefasst werden.

Häufigster Spezialfall: $e^{\mathrm{i}\varphi}$ als rotierender Faktor

Die Multiplikation mit dem Faktor $e^{\mathrm{i}\varphi}$ entspricht einer Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel φ (im Gegenuhrzeigersinn). Der Betrag bleibt dabei unverändert.

Division als Multiplikation mit dem Kehrwert

Die Division $\frac{z_1}{z_2}$ entspricht stets einer Multiplikation von z_1 mit dem Kehrwert von z_2, also: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$. Auch dies entspricht in der Gauss'schen Zahlenebene einer Drehstreckung. z_1 wird mit r_2 gegen den Ursprung hin gestaucht und um φ_2 im Uhrzeigersinn gedreht.

Kapitel 5

Komplexe Gleichungen und Funktionen

Nun haben wir das wesentliche Rüstzeug zum Umgang mit komplexen Zahlen beisammen: Die neue Zahlenmenge $\mathbb{C}$ ist eingeführt, die Grundoperationen darauf sind diskutiert (auch graphisch) und wir haben gesehen, wie Rechnungen in der Euler-Darstellung (Polarkoordinaten) durch Ausnützung der Potenzgesetze vereinfacht werden. Jetzt sind wir bereit diese "neuen" Zahlen auch wirklich zu gebrauchen und zu sehen, wie man sie geübt anwendet und wo sie ganz besonders praktisch sind.

5.1 Die Gleichung $z^n = 1$ und die n-ten Einheitswurzeln

Vorüberlegung zur reellen Gleichung $x^n = 1$: Die Gleichung $x^2 = 1$ besitzt bekanntlich die beiden Lösungen $x = \pm 1$. Zu $x^3 = 1$ existiert hingegen nur eine einzige Lösung $x = 1$. Allgemein gilt für Exponenten $n \in \mathbb{N}$:

$$x^n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \begin{cases} +1 & \text{für ungerades } n \\ \pm 1 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

Offenbar gibt es im Reellen keine ganz einheitliche Aussage zu den Lösungen von $x^n = 1$. Man muss zwischen ungeraden und geraden Exponenten unterscheiden...

Komplexe Einheitswurzeln: Im Komplexen schreiben wir für die Unbekannte nicht mehr x, sondern z. Wie sieht es nun mit den Lösungen von $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ aus?

Zur Behandlung dieser Gleichung empfiehlt es sich, z in der Euler-Darstellung anzusetzen. Damit lässt sich sofort ein Ausdruck für z^n notieren:

$$z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad z^n = \left(r\,e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n e^{\mathrm{i}n\varphi}$$

z^n soll gleich 1 sein, also den Betrag $r^n = 1$ aufweisen. Da r in der Euler-Darstellung per Definition eine positive reelle Zahl ist, folgt sofort: $r = 1$. Alle Lösungen von $z^n = 1$ liegen also auf dem Einheitskreis und wir schreiben nur noch:

$$z = e^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{resp.} \quad z^n = e^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{5.1}$$

An dieser Stelle machen wir uns nochmals klar, dass sich die **reelle Einheit** 1 mittels Euler-Darstellung auf unendlich viele verschiedene Arten schreiben lässt:

$$1 = \ldots = e^{-\mathrm{i}6\pi} = e^{-\mathrm{i}4\pi} = e^{-\mathrm{i}2\pi} = e^0 = e^{\mathrm{i}2\pi} = e^{\mathrm{i}4\pi} = e^{\mathrm{i}6\pi} = \ldots$$

$$\text{Allgemein:} \qquad 1 = e^{\mathrm{i}2\pi k} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.2}$$

Alle zu 1 gehörenden Winkelkoordinaten $2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ zeigen vom Ursprung aus in die positive Richtung der rellen Achse, also eben in die Richtung von 1. Sie unterscheiden sich lediglich darin, dass sie unterschiedlich viele ganze Umdrehungen ($\pm 2\pi$) im Gegen- oder im Uhrzeigersinn enthalten, was an der Zahl 1 aber nichts ändert.

Bei der nachfolgenden Lösung von $z^n = 1$ soll die 1 durch ihre Euler-Darstellung ersetzt werden. Um bei dieser Ersetzung garantiert keine Lösungen zu verlieren, dürfen wir keine mögliche Winkelkoordinate von 1 einfach von vornherein ausschliessen. Wir sollten also ganz unbedingt den allgemeinen Ausdruck $1 = e^{\mathrm{i}2\pi k}$ verwenden.

Mit der Euler-Darstellung von z^n in (5.1) und derjenigen von 1 in (5.2) folgt nun:

$$z^n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad e^{\mathrm{i}n\varphi} = e^{\mathrm{i}2\pi k} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Damit die beiden Seiten der Gleichungen wirklich gleich sind, müssen die Winkelkoordinaten übereinstimmen ($=$ **Identifikationstrick** für Winkelkoordinaten, vgl. Seite 14):

$$n\varphi = 2\pi k \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für die möglichen Winkelkoordinaten erhalten wir daraus:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}\, k \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Das sieht zunächst nach unendlich vielen Lösungen aus, weil k ja alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. In Tat und Wahrheit gibt es aber nur genau n verschiedene Lösungen!

Wir überlegen: $\frac{2\pi}{n}$ ist der n-te Teil eines ganzen Umlaufs. Starten wir mit k bei 0, so erreicht $\varphi = \frac{2\pi}{n}\, k$ bei $k = n$ den Wert $\varphi = 2\pi$ und eine ganze Umdrehung ist abgeschlossen. Die Winkelkoordinate $\varphi = 2\pi$ gehört, ebenso wie die Winkelkoordinate $\varphi = 0$, zur Zahl $z = 1$. Für $k = n, n+1, n+2, \ldots$ ergeben sich nun lauter Winkelrichtungen, die wir bereits abgedeckt haben. Starten wir bei $k = 0$, so entsteht die letzte wirklich neue Winkelrichtung bei $k = n - 1$. Auch für negative k erhalten wir lauter Winkelrichtungen, die bereits abgedeckt sind.

Somit lassen sich die n echt verschiedenen Winkelwerte folgendermassen notieren:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}\, k \qquad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Fassen wir dieses Resultat allgemein zusammen:

Die n-ten komplexen Einheitswurzeln

Als ***n-te Einheitswurzeln*** *bezeichnet man die Lösungen der Gleichung:*

$$z^n = 1 \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Zu jedem n gibt es n verschiedene Einheitswurzeln, nämlich:

$$z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}\,k} \qquad \text{mit} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Eine dieser Einheitswurzeln ist stets die reelle Einheit 1 selber. Die weiteren Einheitswurzeln liegen von 1 ausgehend gleichverteilt auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Die Einheitswurzeln werden so genannt, weil die Zahl 1 die (reelle) Einheit ist und die Gleichung $z^n = 1$ im klassischen Sinn eben nach den n-ten Wurzeln von 1 fragt.

Ein paar Beispiele (siehe Abb. 5.1): Als 2. Einheitswurzeln ($=$ Quadratwurzeln von 1) ergeben sich:

$$z^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{2}\cdot 0} = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{2}\cdot 1} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Diese Lösungen kennen wir bereits aus dem Reellen!

Für die 3. Einheitswurzeln erhalten wir:

$$z^3 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{und} \quad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_2^*$$

Die zweite und die dritte Lösung existieren, sind aber nicht reell, sondern komplex! Daher gibt es in der Einschränkung auf die reellen Zahlen eben keine andere dritte Wurzel von 1 als die 1 selber.

Wir stellen fest: Eine Einheitswurzel oberhalb der reellen Achse hat stets ein Gegenüber unterhalb der reellen Achse (Spiegelpunkt). D.h., das konjugiert Komplexe einer n-ten Einheitswurzel ist immer noch eine n-te Einheitswurzel.

Betrachten wir auch noch die 4. und die 5. Einheitswurzeln:

$$z^4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = 1 \qquad z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i} \qquad z_3 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1 \qquad z_4 = z_2^* = -\mathrm{i}$$

$$z^5 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = 1 \qquad z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \qquad z_3 = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} \qquad z_4 = z_3^* \qquad z_5 = z_2^*$$

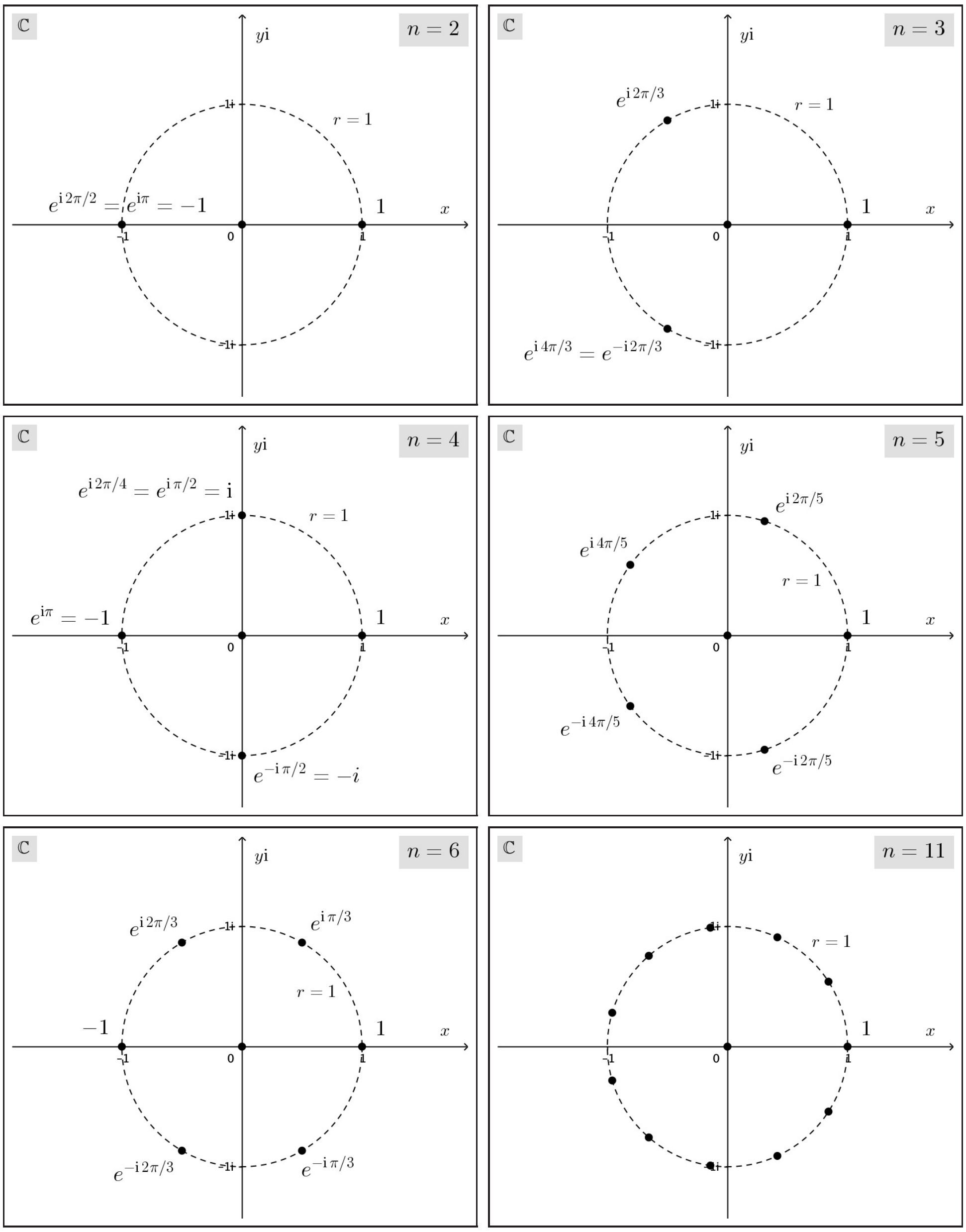

Abbildung 5.1: Die Einheitswurzeln verteilen sich gleichmässig auf dem Einheitskreis. Die 1 gehört stets dazu.

5.2 Mehr vom Wurzelziehen im Komplexen

Komplexe Wurzeln von positiven reellen Zahlen: Ausgehend von den Einheitswurzeln können wir unsere "Wurzelzieh-Fähigkeiten" nun rasch weiter ausbauen. Zunächst wollen wir die n-te Wurzel nicht nur von 1, sondern von einer beliebigen positiven, reellen a Zahl bestimmen. Es sei also:

$$z^n = a \qquad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Da sich ein solches a in der Form $a = a\,e^{\mathrm{i}2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt und wir auch z wieder in der Euler-Darstellung notieren können, ergibt sich:

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\varphi} = a\,e^{\mathrm{i}2\pi k} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nun müssen auf der linken Seite und der rechten Seite sowohl die Beträge, wie auch die Winkelkoordinaten übereinstimmen. Der Identifikationstrick funktioniert also auch bei Polarkoordinaten, weil sowohl der Betrag, als auch die Winkelrichtung einer bestimmten komplexen Zahl eindeutig sind. Daraus folgt für den Betrag von z:

$$r^n = a \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[n]{a}$$

Hier meint $\sqrt[n]{a}$ die althergebrachte n-te Wurzel im Reellen. Sie ist selber stets positiv und eindeutig und existiert in jedem Fall, weil wir ja davon ausgegangen sind, dass $a \in \mathbb{R}^+$.

Die Winkelkoordinaten-Gleichung $e^{\mathrm{i}n\varphi} = e^{\mathrm{i}2\pi k}$ haben wir bereits bei den Einheitswurzeln behandelt und wir kennen ihre n echt verschiedenen Lösungen:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}\,k \qquad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Somit lässt sich für die n-ten Wurzeln einer positiven reellen Zahl a zusammenfassen:

$$z^n = a \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+ \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt[n]{a}\,e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}k} \qquad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

In der komplexen Ebene liegen diese n-ten Wurzeln allesamt auf einem Kreis mit Radius $r = \sqrt[n]{a}$ um den Ursprung. Die Winkelrichtungen sind immer noch dieselben wie bei den n-ten Einheitswurzeln.

Wurzeln beliebiger komplexer Zahlen: Schliesslich sei nun $a \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl mit Betrag $|a|$ und Winkelkoordinate α:

$$a = |a|\,e^{\mathrm{i}\alpha}$$

Damit lautet unsere Wurzelgleichung in Euler-Darstellung:

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\varphi} = |a|\,e^{\mathrm{i}(\alpha+2\pi k)} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Wir bemerken einmal mehr: Die Winkelkoordinate α ist nicht ganz strikt festgelegt, sie kann um beliebige Vielfache von 2π variieren. Dadurch werden auch hier wiederum n echt verschiedene Lösungen erzeugt:

$$n\varphi = \alpha + 2\pi k \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k \qquad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Nun wissen wir vollständig Bescheid über die Lösungen einer Wurzelgleichung im Komplexen:

$$z^n = a \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C} \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt[n]{|a|}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)} \qquad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Eine Zwischenbemerkung zur Wurzelnotation: Wie dir vielleicht schon aufgefallen ist, verwenden wir das klassische Wurzelsymbol $\sqrt{\ldots}$ nicht für komplexe Zahlen. Wir schreiben für die Lösungen von $z^n = a$ also nicht $z = \sqrt[n]{a}$.

Mittlerweile verstehen wir gut, weshalb wir das nicht machen. Die n-te Wurzel einer komplexen Zahl ist ja alles andere als eindeutig. Es gibt immer n verschiedene Lösungen von $z^n = a$. Im Reellen hat es noch behelfsmässig funktioniert festzulegen, dass die Wurzel immer positiv sein soll. So weiss man, dass z.B. mit $x = \sqrt{5}$ die positive der beiden Lösungen von $x^2 = 5$ gemeint ist. Alle möglichen Lösungen waren dann gegeben durch $x = \pm\sqrt{5}$.

Mit den n Lösungen im Komplexen wird es da allerdings schwierig, sodass wir eben festlegen, unter dem althergebrachten Wurzelsymbol keine komplexen Zahlen zu notieren![1]

Der Platz unter einer Wurzel ist ausschliesslich für positive, reelle Zahlen reserviert!

Trotzdem sprechen wir von den ***n*-ten Wurzeln der komplexen Zahl *a***. Damit meinen wir – zur Erinnerung – alle Lösungen der Gleichung:

$$z^n = a \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a \in \mathbb{C}$$

Wurzeln als Drehstreckungen: Wie wir schon gesehen haben, steht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$ für eine Drehstreckung um den Ursprung der Gauss'schen Zahlenebene. z^n steht somit für die n-malige Ausführung einer bestimmten Drehstreckung – ausgehend von welcher Zahl? Von 1 aus, denn wir können stets schreiben:

$$z^n = 1 \cdot \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n-\text{mal}}$$

Mit dem Lösen der Gleichung $z^n = a$ bestimmen wir also alle Drehstreckungen z, die mich, ausgehend vom Ort der reellen Einheit 1, nach n-facher Ausführung zur Zahl a bringen!

Konkrete Beispiele: Zum Schluss zwei handfeste Beispiele:

- **Quadratwurzeln von $a = 3\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$:**
  $a = 3\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$ liegt im 2. Quadranten der komplexen Ebene (vgl. Abb. 5.2). Wir ermitteln Ihre Quadratwurzeln resp. eben die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = 3\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$:

$$z = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2\cdot4}+\frac{2\pi}{2}k\right)} = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{8}+\pi k\right)} \qquad \text{mit} \quad k = 0, 1$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)} = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}$$

  Diese beiden Quadratwurzeln sitzen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{3}$ und zwar bei den Winkeln $\varphi_1 = \frac{3\pi}{8}$ und $\varphi_2 = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$.
  Den Winkel φ_2 könnte man auch im Intervall $]-\pi;\pi]$ angeben. Das wäre: $\varphi_2 = \frac{11\pi}{8} - 2\pi = -\frac{5\pi}{8}$. Es ist an dieser Stelle aber nicht wirklich wichtig diese Umrechnung vorzunehmen – Hauptsache, wir haben die beiden Wurzeln mit je mindestens einer korrekten Winkelkoordinatenangabe aufgespürt.

  z_1 und z_2 stehen nun einerseits für einen Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene, andererseits beschreiben sie eine Drehstreckung, die uns bei doppelter Ausführung von der reellen Einheit 1 zur Zahl $a = 3\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$ führt. Das zeigt Abb. 5.2.

- **Die 5. Wurzeln von $a = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{\mathrm{i}5\pi/8}$:** Abb. 5.3 illustriert das folgende Beispiel:

$$z^5 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[5]{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{8}/5+\frac{2\pi}{5}k\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{5}k\right)} \qquad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, 4$$

[1] Nun haben wir erfahren, weshalb man die imaginäre Einheit i nicht einfach als $\sqrt{-1}$ definiert. Manche "mathematisch etwas salopper formulierte" Texte deklarieren aber trotzdem: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Auch in Abschnitt 1.1 im Griffiths finden wir diese saloppe Beschreibung von i.

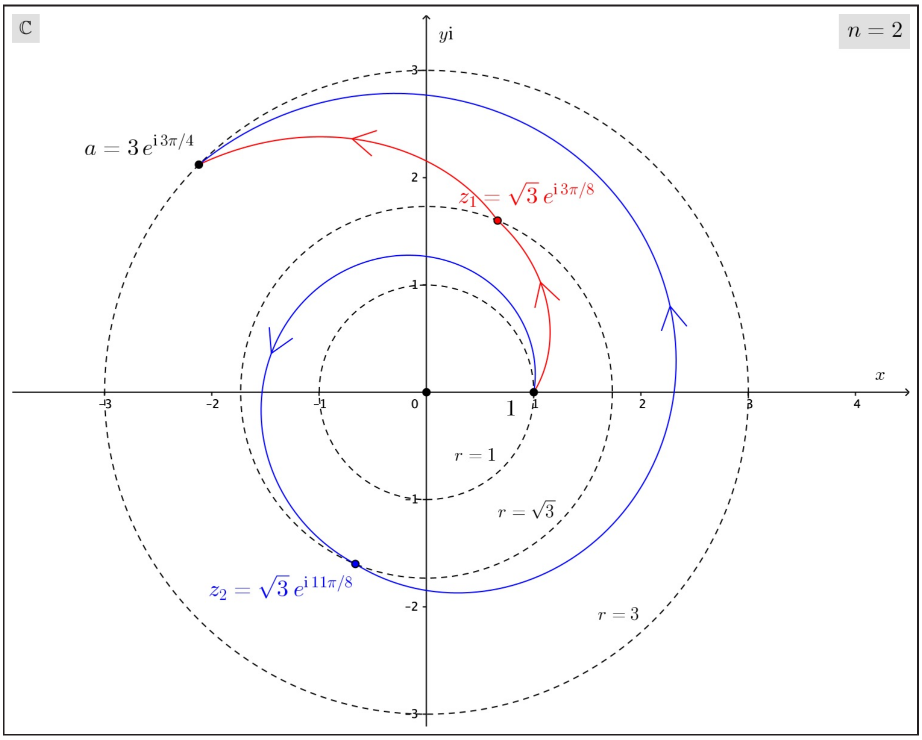

Abbildung 5.2: Sowohl $z_1 = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}3\pi/8}$, also auch $z_2 = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}11\pi/8}$ lösen die Gleichung $z^2 = a = 3\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$. Beide Zahlen können als Vorschriften für eine Drehstreckung angesehen werden (Multiplikation mit einer komplexen Zahl). Die hintereinander ausgeführten, identischen Drehstreckungen müssen von 1 nach a führen.

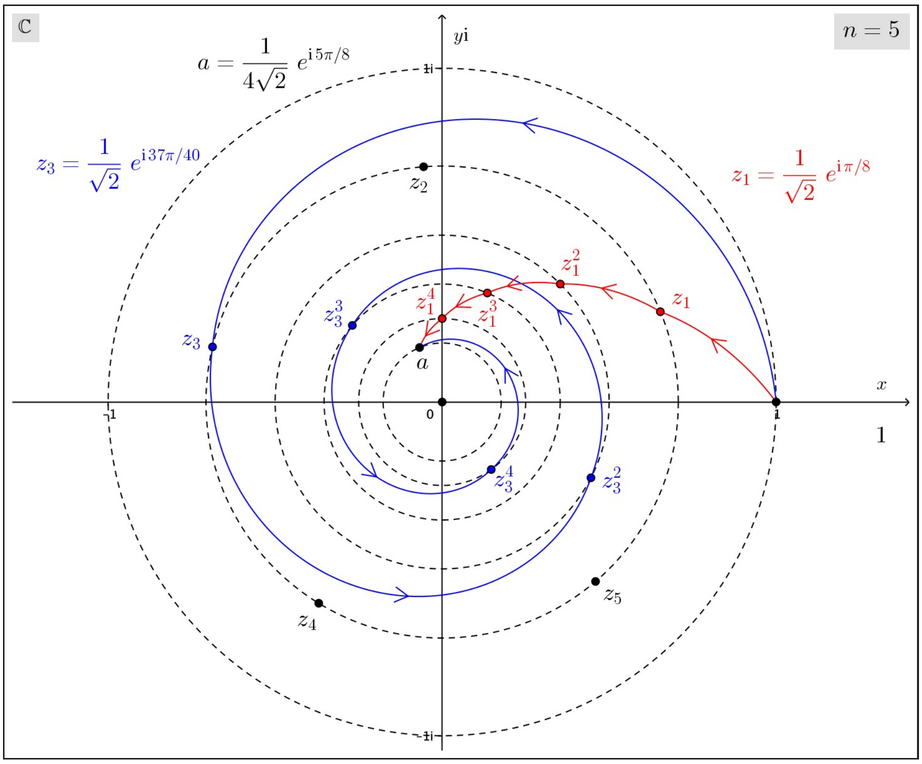

Abbildung 5.3: Die fünf 5. Wurzeln von $a = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{\mathrm{i}5\pi/8}$.

5.3 Quadratische Gleichungen im Komplexen

Repetition: Reelle quadratische Gleichungen

Innerhalb der reellen Zahlen gibt es zu einer quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ entweder keine, eine oder zwei Lösungen x. Man kann die drei Fälle klar voneinander unterscheiden:

Zwei Lösungen: Die quadratische Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ auf der linken Gleichungsseite lässt sich mittels eines Zweiklammeransatzes faktorisieren, also in die Nullstellenform bringen:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=0 \qquad \text{mit} \quad x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Dann sind $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung. Entdeckt man den Zweiklammeransatz nicht auf Anhieb, so lassen sich x_1 und x_2 via Mitternachtsformel aufspüren:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Darin ist der Ausdruck unter der Wurzel die sogenannte Diskriminante $D=b^2-4ac$. Durch das $\pm$ im Zähler entstehen die beiden Lösungen. Die Parabel, also der Funktionsgraph zu $f(x)$, schneidet die x-Achse zweimal, eben bei den beiden Nullstellen x_1 und x_2 (vgl. Abb. 5.4).

Eine Lösung: Verschwindet die Diskriminante, $D=0$, so fallen die beiden Lösungen x_1 und x_2 zusammen. Die Faktorisierung von $f(x)$ entspricht dann der zweiten binomischen Formel:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2=0 \qquad \text{mit} \quad x_1=-\frac{b}{2a}$$

Der Scheitelpunkt der Parabel zu $f(x)$ sitzt in diesem Fall auf der x-Achse.

Keine Lösung: $f(x)=ax^2+bx+c$ lässt sich nicht faktorisieren. D.h. es gibt keinen Zweiklammeransatz $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ mit $a,x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Damit einher geht, dass die Diskriminante $D=b^2-4ac$ einen negativen Wert annimmt und somit in der Mitternachtsformel unter der Wurzel eine negative Zahl steht, was innerhalb der reellen Zahlen eben zu keiner Lösung führt. In diesem Fall schneidet die Parabel die x-Achse nicht.

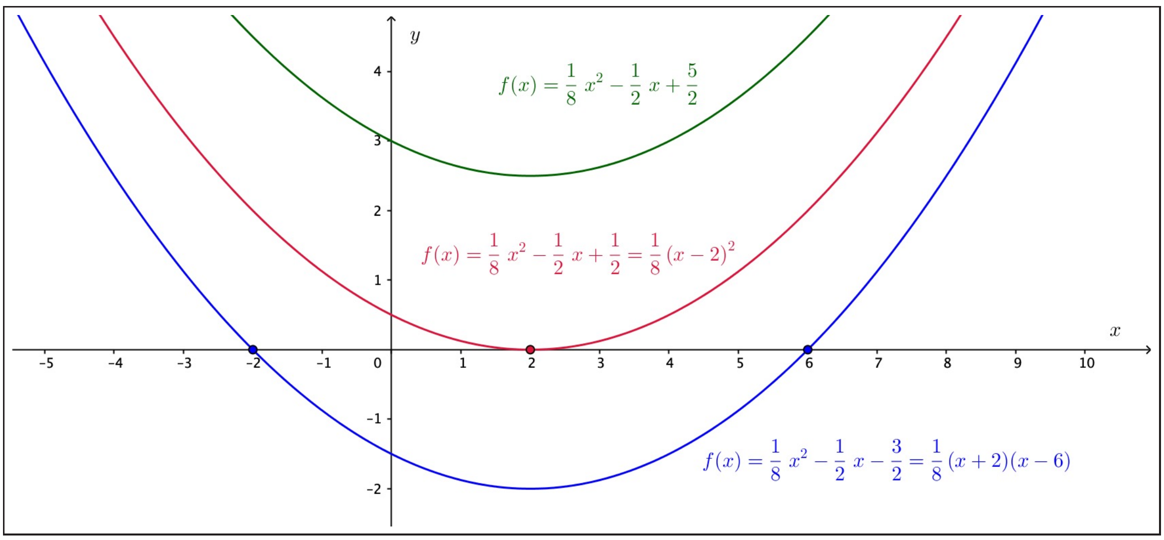

Abbildung 5.4: Die Lösungen quadratischer Gleichungen entsprechen den Nullstellen von Parabeln. Daher gibt es Fälle mit zwei, einer oder keiner Lösung.

Komplexe Quadratische Gleichungen

Betrachten wir die Angelegenheit nun im Komplexen:

$$f(z) = az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{mit} \quad a, b, c, z \in \mathbb{C}$$

Neu ist nicht nur, dass die Variabel z komplex ist. Auch die Koeffizienten a, b, c dürfen im allgemeinen Fall komplex sein. Und nun kommt die klare Aussage dazu:

Im Komplexen gibt es zu jeder quadratischen Gleichung stets zwei Lösungen z_1 und z_2, die als Spezialfall zusammenfallen können.

D.h., $f(z)$ lässt sich im Komplexen immer in zwei Klammern faktorisieren, also in Nullstellenform bringen:

$$f(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = 0 \qquad \text{mit} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

z_1 und z_2 lassen sich nach wie vor durch die Mitternachtsformel bestimmen:

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Wurzel der Diskriminante kann innerhalb von $\mathbb{C}$ auf jeden Fall gezogen werden, sodass sicher zwei Lösungen existieren. Allerdings haben wir gelernt, dass die Wurzelschreibweise $\sqrt{a}$ aus Gründen der Eindeutigkeit für positive, reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}_0^+$ reserviert ist. Wir schreiben daher korrekter:

$$z_{1/2} = \frac{-b + w_{1/2}}{2a} \qquad \text{wobei } w_{1/2} \text{ die Lösungen von} \quad w^2 = b^2 - 4ac = D \quad \text{sind}$$

Im Spezialfall $D = 0$ resp. $w = 0$ fallen die beiden Lösungen immer noch zusammen, dann gibt es auch innerhalb von $\mathbb{C}$ nur eine einzige Lösung und die Faktorisierung der quadratischen Funktion lautet:

$$f(z) = a(z - z_1)^2$$

Beispiel 1: Starten wir mit reellen Koeffizienten. Wir interessieren uns für die Nullstellen resp. für die Faktorisierung von:

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2 - 3z + 9$$

Diese quadratische Funktion kann reell nicht faktorisiert werden, weil $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 = -9$. Im Komplexen ist nun allerdings:

$$w^2 = D = -9 \quad \Rightarrow \quad w_{1/2} = \pm 3\mathrm{i}$$

Als Lösungen von $f(z) = 0$ ergeben sich damit (siehe Abb. 5.5):

$$z_{1/2} = \frac{-b + w_{1/2}}{2a} = \frac{3 \pm 3\mathrm{i}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \pm 3\mathrm{i}$$

Und damit lautet die Faktorisierung von $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2 - 3z + 9 = \frac{1}{2}(z - z_1)(z - z_2) = \frac{1}{2}(z - 3 + 3\mathrm{i})(z - 3 - 3\mathrm{i})$$

Wir könnten durch Ausmultiplizieren überprüfen, dass dies so korrekt ist. Dazu ein Tipp: Die beiden Klammern haben die Form der linken Seite der 3. binomischen Formel: $(a + b)(a - b)$ mit $a = z - 3$ und $b = 3\mathrm{i}$. Es lohnt sich diese 3. binomische Formel dann auch effektiv auszunützen:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiel 2: Jetzt betrachten wir eine Funktion mit komplexem konstanten Term $c = 2 + 2\mathrm{i}$:

$$f(z) = \frac{1}{2}\,z^2 - 2z + 2 + 2\mathrm{i}$$

Wir berechnen die Diskriminante und wandeln sie in Polarkoordinaten um:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 + 2\mathrm{i}) = 4 - 4 - 4\mathrm{i} = -4\mathrm{i} \quad \text{(rein imaginär)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Polarkoordinaten:} \quad |D| = 4 \quad \text{und} \quad \delta = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad D = 4\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Nun folgt für die Wurzeln der Diskriminante und daraus für die Lösungen von $f(z) = 0$:

$$w_1 = 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad w_2 = 2\,e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \underbrace{2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}_{=w_1} \cdot \underbrace{e^{\mathrm{i}\pi}}_{=-1} = -w_1$$

$$z_{1/2} = \frac{-b + w_{1/2}}{2a} = \frac{-b \pm w_1}{2a} = \frac{2 \pm 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \pm 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

In der komplexen Ebene liegen sich die beiden Lösungen somit gegenüber auf einem Kreis mit Radius 2 rund um die Zahl 2 auf der reellen Achse (vgl. Abb. 5.5). Für die faktorisierte Form von $f(z)$ können wir schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - 2 - 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - 2 + 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)$$

Zur Übung sollte man sich davon überzeugen, dass sich durch Ausmultiplizieren wieder der anfängliche Ausdruck für $f(z)$ ergibt!

Natürlich lassen sich die Lösungen auch in kartesischen Koordinaten schreiben, z.B. für z_1:

$$z_1 = 2 + 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{i}\right) = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$$

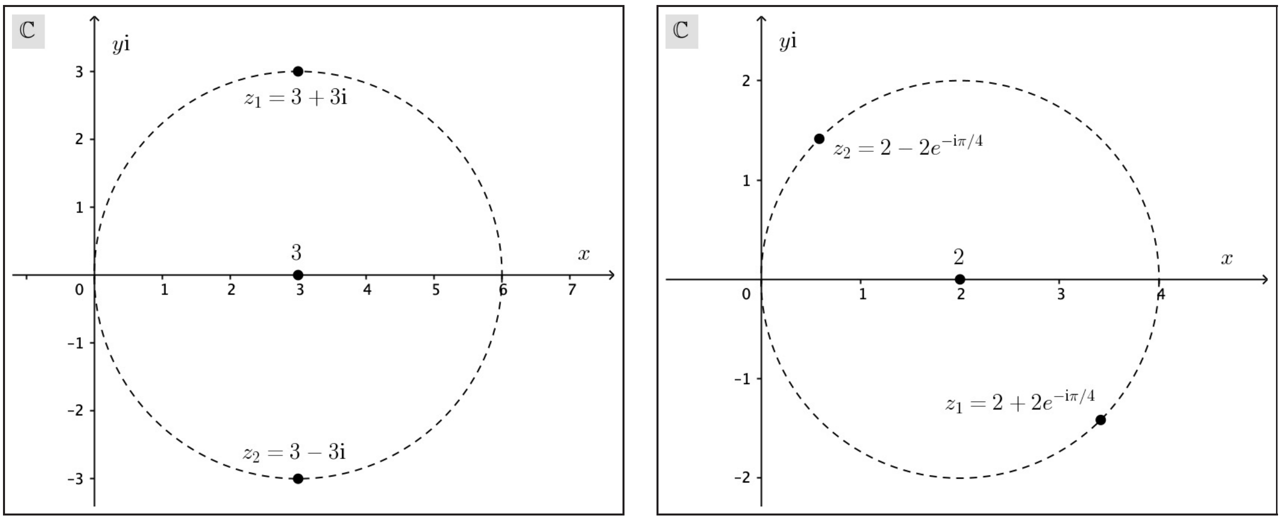

Abbildung 5.5: Die komplexen Lösungen zu den beiden Beispielen quadratischer Gleichungen: Die beiden Lösungen können (mit Ausnahme des Zusammenfallens in einem Punkt) stets als gegenüberliegende Punkte auf einem Kreis aufgefasst werden. Der Kreis muss seinen Mittelpunkt aber nicht notwendigerweise auf seiner reellen Achse haben, wie man hier eventuell denken könnte.

5.4 Darstellung komplexer Funktionen

Bemerke: Anders als Abb. 5.4 zeigt Abb. 5.5 keine Funktionsgraphen! Das Einzige, was zu sehen ist, sind zwei komplexe Zahlen (= Punkte in der komplexen Ebene), die Null ergeben, wenn man sie in die jeweilige quadratische Funktion $f(z)$ einsetzt.

Die grafische Veranschaulichung komplexer Funktionen ist nicht mehr so einfach möglich. Unser altes $f(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a, b, c, x \in \mathbb{R}$) beschreibt eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also von einer eindimensionalen auf eine eindimensionale Zahlenmenge. Wir schreiben:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Damit lässt sich $f(x)$ auf einem Blatt Papier gut darstellen. Jedem x auf einem ersten, horizontal liegenden, reellen Zahlenstrahl (x-Achse) wird ein Wert y auf einem zweiten, vertikal verlaufenden, reellen Zahlenstrahl (y-Achse) zugeordnet. So entstehen die uns bekannten Funktionsgraphen.

Bei einer komplexen Funktionen wird hingegen jedem Punkt z in der Gauss'schen Zahlenebene ein komplexer Funktionswert $f(z)$ zugeordnet, der wiederum als Punkt irgendwo in der komplexen Ebene liegt. $f(z)$ ist somit eine Abbildung von der zweidimensionalen Zahlenmenge $\mathbb{C}$ auf die zweidimensionale Zahlenmenge $\mathbb{C}$:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Das macht die Darstellung der komplexen Funktion als Ganzes unmöglich. Sie lässt sich nur eingeschränkt darstellen. Z.B. kann man das Abbild einer bestimmten Teilmenge darstellen.

In Abb. 5.6 werden sämtliche Punkte in der komplexen Ebene links mittels der Funktion $f(z) = \frac{1}{2}\,z^2 - 2z + 2 + 2\mathrm{i}$ auf Punkte in der komplexen Ebene rechts abgebildet. Um eine Ahnung zu bekommen, was dabei so alles passiert, betrachten wir die Abbildungen einzelner Punkte oder Punktstränge von der linken in die rechte Graphik:

Nullstellen z_1 und z_2: Die Nullstellen von $f(z)$ lauten immer noch: $z_{1/2} = 2 \pm 2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. D.h., die beiden Punkte z_1 und z_2 links werden rechts auf den Ursprung 0 abgebildet.

Punkt/Zahl A: Der komplexen Zahl $A = 1 - 2\mathrm{i}$ wird folgender Bildpunkt A' zugeordnet:

$$A' = f(A) = \frac{1}{2}\,A^2 - 2A + 2 + 2\mathrm{i} = \frac{1}{2}\,(1-2\mathrm{i})^2 - 2(1-2\mathrm{i}) + 2 + 2\mathrm{i} = \ldots = -\frac{3}{2} + 4\mathrm{i}$$

Gerade g: Die Gerade g verläuft links in Abb. 5.6 durch die Nullstelle z_1. Demzufolge durchquert das Abbild g' dieser Gerade rechts genau einmal den Nullpunkt 0. Interessanterweise besitzt g' die Form einer Parabel.

Kreis c: Der Kreis c links wurde so gewählt, dass die beiden Nullstellen z_1 und z_2 auf ihm liegen. Das bedeutet, sein Abbild c' muss rechts zweimal durch den Ursprung 0 verlaufen.

Wir sehen, was für eine "lustige" Kurve entsteht. Sie schliesst sich – wie das beim Kreis ja auch der Fall ist – macht aber in gewisser Weise zwei Umläufe.

Um noch besser zu sehen, was durch $f(z)$ wie von links nach rechts abgebildet wird, sind die obere und die untere Kreishälfte unterschiedlich eingefärbt und diese Farben sind nach rechts übertragen. Jeder Halbkreis enthält eine der beiden Nullstellen. Demnach erfolgt der 0-Durchgang rechts einmal in Blau und einmal in Rot.

Normalparabel q: Schliesslich habe ich links noch eine Parabel (alle Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x^2 = y$) eingetragen. Wir sehen das hübsch geschwungene Abbild q' davon rechts.

Die Gerade g wurde übrigens genau so gelegt, dass sie eine Tangente an die Parabel q ist. Es gibt also einen Berührungspunkt S. Dessen Abbild S' ist auch auf der rechten Seite ein Berührungspunkt zwischen q' und g'.

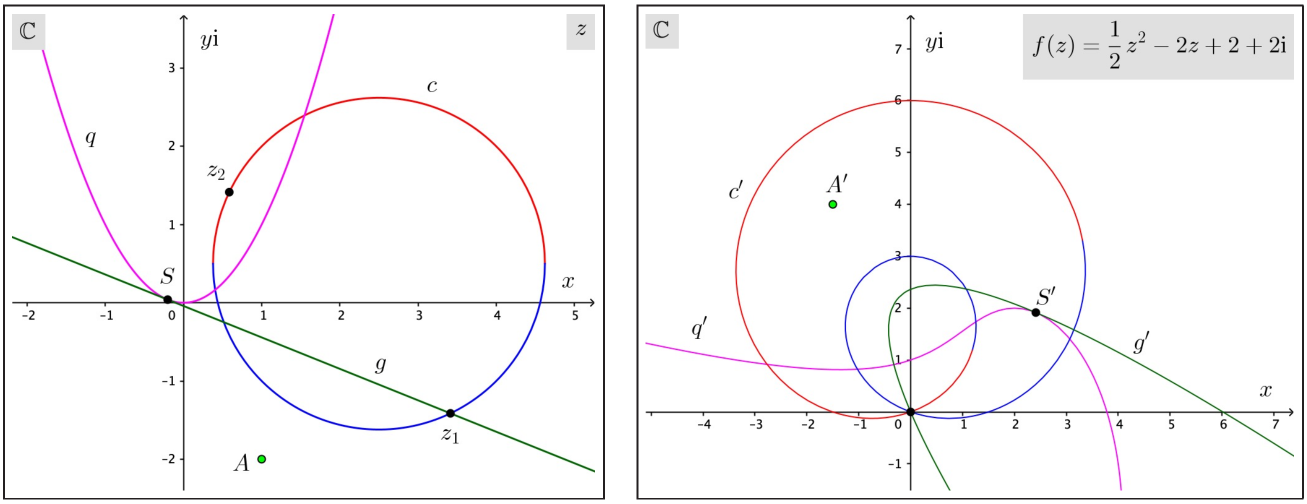

Abbildung 5.6: Komplexe Abbildungen: Jede Funktion $f(z)$ weist einer komplexen Zahl z eine andere komplexe Zahl $f(z)$ zu. Da es sich bei z und $f(z)$ je um einen Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene handelt, ist eine Darstellung der Funktion insgesamt nicht möglich. Allerdings lassen sich die Abbilder einzelner Punkte oder Kurven betrachten.

5.5 Der Fundamentalsatz der Algebra

Wie wir aufgrund des obigen – noch relativ einfachen – Beispiels der komplexen Funktion $f(z) = \frac{1}{2}\,z^2 - 2z + 2 + 2\mathrm{i}$ bereits erahnen können, dürfte die Untersuchung komplexer Funktionen resp. Abbildungen ein spannenderes und grösseres Gebiet der Mathematik sein. Man nennt es **komplexe Analysis** oder **Funktionentheorie**. Damit werden wir uns allerdings nicht vertieft beschäftigen können, obwohl die daraus gewonnen Erkenntnisse und neuen Methoden sehr toll sind. Eine der wichtigsten Aussagen wollen wir aber nicht unerwähnt lassen:

Fundamentalsatz der Algebra

Gegeben sei eine (komplexe) Polynomfunktion n-ten Grades $f_n(z)$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$:

$$f_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Der **Fundamentalsatz der Algebra** *besagt, dass jedes beliebige solche $f_n(z)$ in genau n* **Linearfaktoren** *$(z - z_k)$ faktorisiert werden kann:*

$$f_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

D.h., $f_n(z)$ besitzt genau n Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, von denen allerdings mehrere oder sogar alle identisch sein können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A.) können wir also sagen, dass die Gleichung $f_n(z) = 0$ im Komplexen stets n Lösungen hat.

Wir verzichten auf den Beweis dieses Satzes, nehmen aber zur Kenntnis, dass wir damit z.B. verstehen, weshalb die Gleichung $z^n = 1$ gerade n verschiedene Einheitswurzeln liefert. So hat das Polynom $f_n(z) = z^n - 1$ eben n verschiedene Nullstellen. Z.B. ist für $n = 3$:

$$z^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_3(z) = z^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_3(z) = (z-1)\Big(z - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\Big)\Big(z - e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\Big) = 0$$

Dass diese Faktorisierung korrekt ist, lässt sich mittels Ausmultiplizieren überprüfen!

Kapitel 6

Weitere Anwendungen der Euler'schen Formel

6.1 Die trigonometrischen Additionstheoreme

Hier folgt ein Paradebeispiel dafür, wie toll sich manche reellen Zusammenhänge mit dem scheinbaren Umweg über das Komplexe behandeln lassen. Es geht um die Herleitung der sogenannten **trigonometrischen Additionstheoreme**.

Für manche Zwecke – in der Physik z.B. für das Verständnis sich überlagernder Wellen in Akustik und Optik – ist es praktisch die Sinus- oder die Cosinusfunktion einer Summe zweier Winkel in Funktionen der Einzelwinkel zu zerlegen. Wir möchten also wissen, wie sich $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ als Kombination von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ und $\cos\beta$ schreiben lassen.

Das scheint nicht ganz trivial zu sein! Abb. 6.1 zeigt die verschiedenen involvierten Grössen. Gibt es da überhaupt einen Zusammenhang? Die Antwort lautet: Ja! Und er lässt sich durchaus im Reellen herleiten, aber der Weg über das Komplexe ist nun so wunderbar einfach, dass es eine Schande wäre ihn nicht zu benutzen!

Zunächst stellen wir unter Verwendung der Euler-Darstellung fest:

$$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \underbrace{\cos(\alpha+\beta)}_{=\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right)} + \mathrm{i}\cdot \underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{=\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right)}$$

Andererseits gilt bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis aber auch:

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}\cdot e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\cdot\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\cdot\sin\beta)\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{i}\cdot\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{i}\cdot\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{i}^2\cdot\sin\alpha\sin\beta\\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{=\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right)} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{=\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\right)}
\end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die beiden Ausdrücke für $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$. Weil Realteil und Imaginärteil einer bestimmten komplexen Zahl eindeutig sind, müssen sie in beiden Ausdrücken übereinstimmen. Dies ist einmal mehr der **Identifikationstrick** von Seite 14. Daraus folgen sofort die beiden **Additionstheoreme** für die Cosinus- und die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned} \tag{6.1}$$

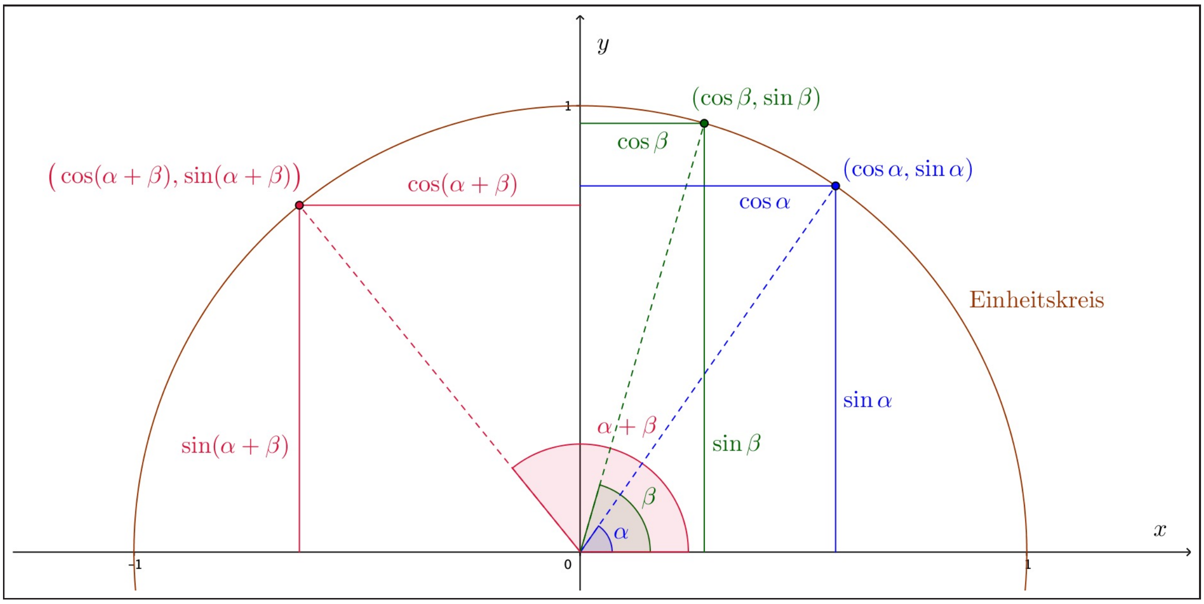

Abbildung 6.1: Welche Grössen werden durch die Additionstheoreme miteinander verknüpft?

Unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ lassen sich diese beiden Additionstheoreme auch für Winkeldifferenzen umschreiben:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{6.2}$$

Die trigonometrischen Additionstheoreme sind immer wieder nützlich. Insbesondere lassen sich aus ihnen auch die sogenannten **Doppelwinkelformeln** ableiten:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die Cosinusformel kann unter der Verwendung des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ noch weiter umgeformt werden, sodass darin wahlweise nur noch $\cos^2\alpha$ oder $\sin^2\alpha$ auftritt:

$$\begin{aligned} & \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \text{resp.}\quad & \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Daraus folgt weiter:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) \tag{6.5}$$

$\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ sind also selber wieder Cosinuskurven, allerdings mit halber Periode, denn diese wird durch den Faktor 2 im Argument der Cosinusfunktion halbiert (vgl. Abb. 6.2).

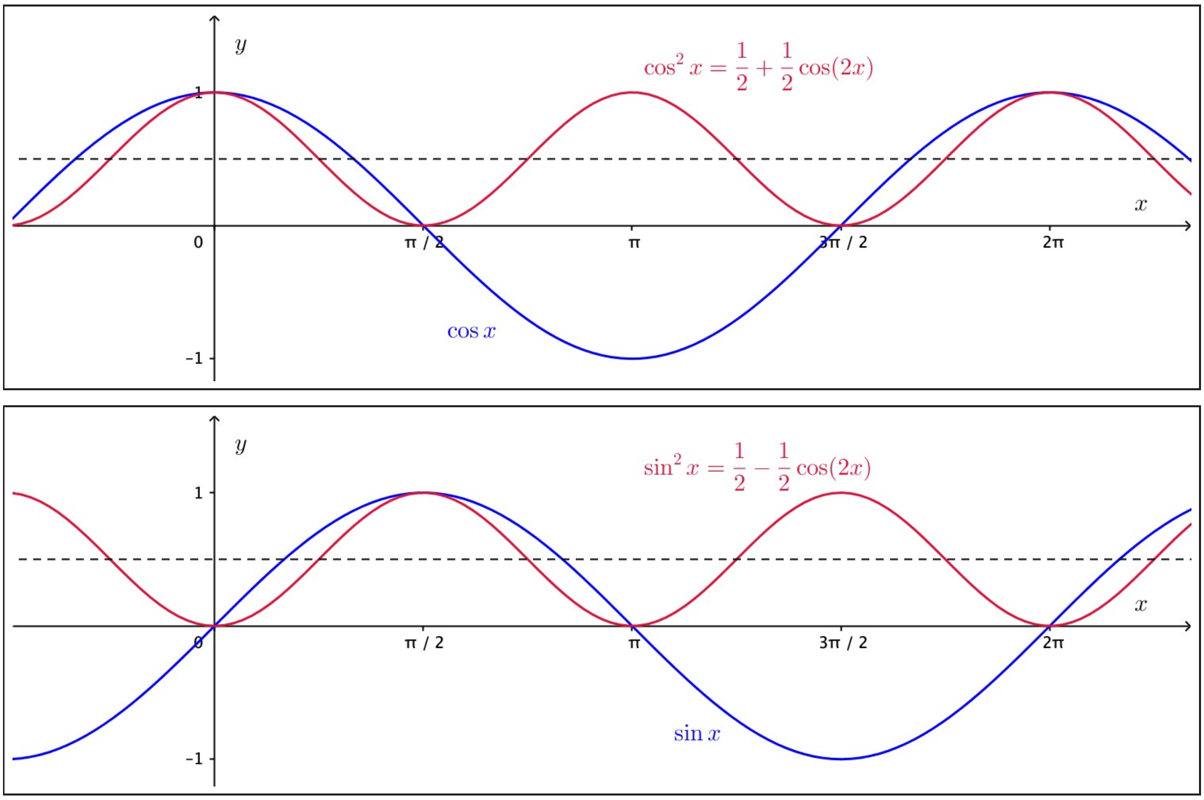

Abbildung 6.2: Die Graphen der Funktionen $\cos^2 x$ und $\sin^2 x$ sind selber wieder Cosinusfunktionen, die mit Amplitude $\frac{1}{2}$, aber doppelt so "schnell" um die mittlere Höhe $y = \frac{1}{2}$ schwanken.

6.2 Cosinus- und Sinusfunktion als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$

Für eine Zahl z auf dem Einheitskreis in der Gauss'schen Zahlenebene und ihr konjugiert Komplexes z^* gilt gemäss der Euler'schen Formel (4.7) bekanntlich:

$$z = e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad z^* = e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$$

$e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ lassen sich also mittels geeigneter Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ als Summe von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ darstellen:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\varphi} &= c_1\cdot\cos\varphi + c_2\cdot\sin\varphi \qquad \text{mit} \quad c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_2 = \mathrm{i} \\ e^{-\mathrm{i}\varphi} &= c_3\cdot\cos\varphi + c_4\cdot\sin\varphi \qquad \text{mit} \quad c_3 = 1 \quad \text{und} \quad c_4 = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Weil diese Summendarstellung möglich ist, sagen wir in der Sprache der Algebra: "Die Funktionen $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ sind **Linearkombinationen** der beiden Funktionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$." Der Wortteil "linear" kommt daher, dass $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in diesen beiden Summen nur mit Potenz 1 auftreten, dass also keine Terme mit $\sin^2\varphi$ oder $\cos^5\varphi$, etc. benötigt werden.

In die umgekehrte Richtung überlegen wir uns:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi + \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(-\varphi) \\ &= \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi + \cos\varphi - \mathrm{i}\cdot\sin\varphi = 2\cos\varphi \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass die Cosinusfunktion achsensymmetrisch und die Sinusfunktion punktsymmetrisch ist: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. Nach der Division durch 2 erhalten wir:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}\varphi} + \frac{1}{2}\,e^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}$$

Analog finden wir:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi} = \ldots = 2\mathrm{i}\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,e^{\mathrm{i}\varphi} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\,e^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}$$

$\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ lassen sich also ebenso als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ darstellen.

Graphisch ist der Zusammenhang übrigens leicht nachzuvollziehen. Erinnern wir uns daran, dass die Addition zweier komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene dem Aneinanderhängen zweier Pfeile entspricht, so führt uns $e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}$ auf die reelle Achse an den Ort $2\cos\varphi$ und $e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}$ auf die imaginäre Achse an den Ort $2\mathrm{i}\sin\varphi$, wie Abb. 6.3 veranschaulicht.

Euler-Schreibweisen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$

Cosinus- und Sinusfunktion lassen sich als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und dessen konjugiert Komplexen $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ schreiben:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} \tag{6.6}$$

Wir wollen uns diese Beziehungen unter dem (inoffiziellen) Namen **Euler-Schreibweisen** *von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ merken, weil sie direkt aus der Euler'schen Formel $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ folgen.*

Die Euler-Schreibweisen für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind ab und zu extrem praktisch. So lassen sich aus manchmal unhandlichen trigonometrischen Ausdrücken rasch komplexe Exponentialausdrücke gewinnen, mit denen das Rechnen aufgrund der Potenzgesetze leichter fällt. Beispiele gefällig?

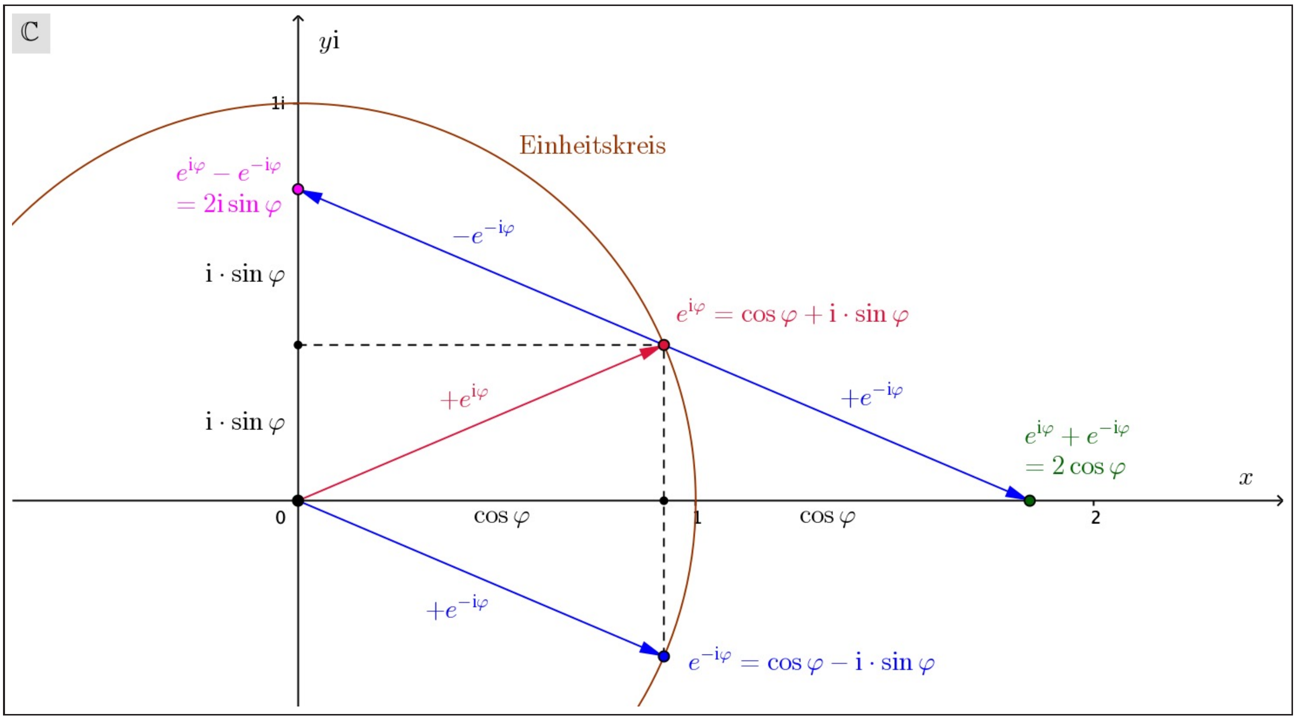

Abbildung 6.3: Die Summe und die Differenz von $e^{\mathrm{i}\varphi}$ und $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ führen einerseits auf die reelle Achse zur Stelle $2\cos\varphi$, andererseits auf die imaginäre Achse zur Stelle $2\mathrm{i}\sin\varphi$.

Beispiel 1: Wie lässt sich das Produkt $\cos\varphi\sin\varphi$ zusammenfassen/vereinfachen?

Falls man sich an die Additionstheoreme erinnert, kennt man die Antwort bereits. Die Doppelwinkelformel für die Sinusfunktion lautet: $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$. Somit folgt: $\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$. Davon können wir uns nun aber auch direkt in wenigen Schritten überzeugen:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin\varphi &= \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\varphi}}{4\mathrm{i}}\\ &= \frac{e^{\mathrm{i}2\varphi}-1+1-e^{-\mathrm{i}2\varphi}}{2\cdot 2\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}2\varphi}-e^{-\mathrm{i}2\varphi}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\end{aligned}$$

Beispiel 2: Schon vor einiger Zeit haben wir gelernt, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Cosinusfunktion ist. Mit der Euler-Schreibweise zeigt man das ganz rasch. Abgeleitet wird nach dem Winkel φ:

$$[\sin\varphi]' = \left[\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\right]' = \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}-(-\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

Beachte: Die **Kettenregel** erzeugt bei der Ableitung von $e^{\pm\mathrm{i}\varphi}$ die Faktoren $\pm\mathrm{i}$!

An dieser Stelle sei zudem ganz explizit darauf hingewiesen, dass die Ableitungsregeln im Komplexen ganz genau gleich funktionieren wie im Reellen! Grund dafür ist einmal mehr, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen mit Addition und Multiplikation einen vollständigen Zahlenkörper bilden.

Beispiel 3: Bisher war der Winkel im Argument der Cosinus- oder der Sinusfunktion stets eine reelle Zahl $\varphi\in\mathbb{R}$. Lässt sich stattdessen auch eine komplexe Zahl einsetzen? Resp.: Was ist unter dem Cosinus oder dem Sinus einer komplexen Zahl $z\in\mathbb{C}$ zu verstehen? Hier kommt die Antwort:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{e^{\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})}+e^{-\mathrm{i}(x+y\mathrm{i})}}{2} = \frac{e^{\mathrm{i}x}\cdot e^{-y}+e^{-\mathrm{i}x}\cdot e^{y}}{2}\\ &= \frac{(\cos x+\mathrm{i}\cdot\sin x)\cdot e^{-y}+(\cos x-\mathrm{i}\cdot\sin x)\cdot e^{y}}{2} = \underbrace{\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}}_{=\cosh y}\cdot\cos x-\mathrm{i}\cdot\underbrace{\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}}_{=\sinh y}\cdot\sin x\\ &= \cosh y\cos x-\mathrm{i}\cdot\sinh y\sin x\end{aligned}$$

Dabei stehen $\cosh y$ und $\sinh y$ für die **hyperbolischen Winkelfunktionen Cosinus hyperbolicus** und **Sinus hyperbolicus**. Sie entsprechen gerade den beiden Brüchen im vorletzten Schritt:

$$\cosh y := \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh y := \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

6.3 Der harmonische Oszillator im Komplexen

In der Newton'schen Mechanik lautet die **Differentialgleichung** (DGL) für den harmonischen Oszillator (z.B. Federpendel):

$$x'' = -\omega^2 x \qquad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Diese DGL wollen wir unter Verwendung komplexer Zahlen lösen. Die zweite Ableitung x'' soll der gesuchten Ortsfunktion $x(t)$ bis auf den Vorfaktor $-\omega^2$ entsprechen. Dann müsste eine Exponentialfunktion $x(t) = C \cdot e^{\lambda t}$ doch ein brauchbarer Ansatz sein, denn Exponentialfunktionen bleiben beim Ableiten als solche erhalten. Wir setzen also an:

$$x(t) = C \cdot e^{\lambda t} \qquad \text{mit} \qquad x'(t) = \lambda C \cdot e^{\lambda t} = \lambda x(t) \qquad \text{und} \qquad x''(t) = \lambda^2 C \cdot e^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$$

Durch Einsetzen in die DGL folgern wir:

$$x'' = \lambda^2 x = -\omega^2 x \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = -\omega^2 \tag{6.7}$$

Dabei ist $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ eine positive reelle Zahl. Innerhalb der reellen Zahlen wären wir hier am Ende einer Sackgasse angelangt, denn (6.7) besitzt ganz offensichtlich keine reellen Lösungen $\lambda \in \mathbb{R}$. Lassen wir für λ nun allerdings auch komplexe Werte zu, so lösen wir munter weiter:

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\omega$$

Immer noch handelt es sich um eine DGL zweiter Ordnung, sodass wir bei der Angabe der allgemeinen Lösung zwei Koeffizienten C_1 und C_2 einzufügen haben:

$$x(t) = C_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{mit} \qquad x'(t) = \mathrm{i}\omega \cdot \left(C_1 e^{\mathrm{i}\omega t} - C_2 e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

Die Koeffizienten C_1 und C_2 dürfen nun aber auch komplex sein! Da sich $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ gemäss (6.6) als Linearkombinationen von $e^{\mathrm{i}\omega t}$ und $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ schreiben lassen, deckt unsere neue allgemeine Lösung den genau gleichen Lösungsraum ab wie der klassische Ansatz:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

Im Prinzip könnten wir für A_1 und A_2 komplexe Werte zulassen. Da aber die Ortsfunktion $x(t)$ zum Federpendel für alle Zeiten t reell sein muss, entstehen dadurch nur unbrauchbare, weil komplexe Lösungen, denn $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ sind selber ja reell.

Bringen wir das Beispiel noch rasch zuende: Setzen wir für die Randbedingungen unseres Federpendels $x(0) = A$ und $v(0) = x'(0) = 0$, so erhalten wir:

$$\left| \begin{array}{l} x(0) \stackrel{!}{=} A \\ x'(0) \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = A \\ \mathrm{i}\omega \cdot \left(C_1 e^0 - C_2 e^0\right) = \mathrm{i}\omega \cdot (C_1 - C_2) = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

Damit lautet unsere an die RBs angepasste Lösung:

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{A}{2} e^{-\mathrm{i}\omega t} = A \cdot \frac{e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{-\mathrm{i}\omega t}}{2} = A \cos(\omega t)$$

Das entspricht genau der Lösung, die sich aus diesen Randbedingungen mit dem nicht-komplexen Ansatz ergibt.

Im Moment mag diese komplexe Vorgehensweise eher schwieriger erscheinen, aber in der Physik haben wir es z.B. in der Quantenmechanik bei der Lösung von DGLs stets mit einer grundsätzlich komplexwertigen Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ zu tun! Erst das Betragsquadrat $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ muss reell sein, was aber für Beträge ohnehin der Fall ist. Und im Zusammenhang mit dieser Wellenfunktion lernt man Ausdrücke wie $e^{\mathrm{i}\omega t}$ sehr schätzen.

Anhang A

Die Herleitung der Euler'schen Formel

In diesem Anhang soll kurz gezeigt werden, wie die **Euler'schen Formel** (4.7)

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi$$

aus der **Taylor-Reihenentwicklung** von Funktionen abgeleitet werden kann. Auf den Beweis von Eindeutigkeit und Existenz der Taylor-Reihenentwicklung werden wir hier nicht eingehen, sondern sehen sie als gegeben an.

A.1 Vorbereitung: Taylor- und Potenzreihenentwicklung

Geben wir uns eine beliebige Funktion $f(x)$ und eine Stelle x_0 vor, so beschreibt die lineare Funktion

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

die Tangente t an den Funktionsgraphen G_f über der Stelle x_0. Die Tangente t verläuft durch den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und ihre Steigung ist gegeben durch die 1. Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0, also $m = f'(x_0)$.[1]

Offensichtlich lassen sich so Tangenten an alle Graphen differenzierbarer (= ableitbarer) Funktion legen. Die Tangentenfunktion $t(x)$ ist eine Art "grobe Annäherung" an die tatsächlichen Funktionswerte von $f(x)$ rund um die Stelle x_0. Man versucht den Funktionsgraphen rund um den Punkt $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ durch eine Gerade zu beschreiben. Das kann bei einem gekrümmten Funktionsgraphen ja nicht allzu weit gut klappen. Für Stellen x, die sehr nahe bei x_0 liegen, ist diese sogenannte **Linearisierung** aber oftmals sehr praktisch und brauchbar.[2]

Die Annäherung kann verbessert werden, indem man quadratische, kubische oder Terme noch höherer Ordnung hinzunimmt. Tatsächlich lassen sich alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen durch eine Summe von – unter Umständen unendlich vielen – Potenzen von $(x - x_0)$ aufschreiben. Dann handelt es sich nicht mehr nur um einen Annäherung, sondern um eine exakte Gleichheit in dem Sinne, dass jede noch so kleine Abweichung durch Hinzunahme von Termen noch höherer Ordnung unterboten werden kann!

[1] Vgl.: $g(x) = m(x - x_0) + y_0$ beschreibt eine Gerade mit Steigung m durch den Punkt $P(x_0, y_0)$.

[2] Die Linearisierung ist ganz besonders wichtig, wenn wir Stellen x betrachten, die sich nur noch infinitesimal von x_0 unterscheiden. Dann ist sie sogar exakt aufzufassen!

Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

$f(x)$ sei eine stetige und unendlich oft differenzierbare Funktion.

Dann lässt sich $f(x)$ als Summe von – je nach Funktionstyp bis zu unendlich vielen – Potenzen von $(x - x_0)$ aufschreiben. Diese Summenschreibweise heisst **Taylor-Reihenentwicklung**, **Taylor-Entwicklung** *oder einfach* **Taylor-Reihe** *von $f(x)$ an der Stelle x_0:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!} \tag{A.1}$$

Hierin ist $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0.

$k!$ spricht man als "k-Fakultät" aus und der Ausdruck steht für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis zur Zahl k, also:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \qquad \textit{Spezialfall:}\quad 0! := 1$$

Das **Taylor-Polynom n-ten Grades** *an der Stelle x_0 erhält man, indem man die Taylor-Reihe von $f(x)$ nach dem n-ten Glied abbricht:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!} \tag{A.2}$$

So erhalten wir für $n = 1$ die **Linearisierung**, *für $n = 2$ die* **"Quadratisierung"**, *für $n = 3$ die* **"Kubisierung"**, *etc. von $f(x)$ an der Stelle x_0.*

Anmerkungen zur Taylor-Reihenentwicklung

- Das **Summenzeichen** $\sum$ (gr. *Sigma*) bedeutet, dass über Terme formal gleicher Art summiert wird. Ein **Laufindex** k nimmt dabei alle natürlichen Zahlenwerte zwischen einem Startwert (unterhalb von $\sum$) und einem Endwert (oberhalb von $\sum$) an. So entstehen die einzelnen Summanden der Summe.

  Start- und Endwert können auch nach $-\infty$ resp. $+\infty$ gelegt werden. Dann handelt es sich um Summen mit unendlich vielen Summanden, also um **Reihen**. Hier ein paar Beispiele:

  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \qquad \left(= \frac{n(n-1)}{2}\right)$
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \qquad \left(= \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1\right)$
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad \left(= \frac{\pi}{4}\right)$
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots \qquad (= e \approx 2.718)$

  Anmerkung: Zu erklären, welchen Wert eine solche Reihe aufweist, ist meistens nicht trivial. Ich wollte es aber nicht verpassen, hier ein paar Resultate anzuführen (Klammerwerte rechts).

- Explizit ausgeschrieben lauten die ersten paar Terme der allgemeinen Taylor-Reihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)}_{\text{Linearisierung}} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2}}_{\text{Quadratisierung}} + \frac{f'''(x_0) \cdot (x-x_0)^3}{6}}_{\text{Kubisierung}} + \ldots \end{aligned}$$

- "Quadratisierung" und "Kubisierung" sind eher inoffizielle Ausdrücke für das Taylor-Polynom 2. und 3. Grades, entsprechen aber der logischen Fortsetzung der Linearisierung, denn bei der Quadratisierung wird $f(x)$ durch eine quadratische Funktion angenähert, etc.

Ein Beispiel zu Linearisierung, Quadratisierung und Kubisierung einer Funktion

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Die **Linearisierung** von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ lautet folglich:

$$t(x) = f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot (x-1) = x - 1$$

Bei der **Quadratisierung** um $x_0 = 1$ wird obige Linearisierung um das quadratische Glied ergänzt:

$$\begin{aligned} q(x) = f_2(x) = f_1(x) + \frac{f''(x_0)\,(x-x_0)^2}{2} &= x - 1 + \frac{-\frac{1}{1^2} \cdot (x-1)^2}{2} \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Schliesslich können wir noch einen Schritt weiter gehen und die **Kubisierung** von $f(x)$ um $x_0 = 1$ bestimmen:

$$\begin{aligned} k(x) = f_3(x) = f_2(x) + \frac{f'''(x_0)\,(x-x_0)^3}{6} &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} + \frac{\frac{2}{1^3} \cdot (x-1)^3}{6} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Oben auf der nächsten Seite sehen wir in Abb. A.1 den Funktionsgraphen zu $f(x) = \ln x$ sowie die Graphen der Linearisierung $t(x)$, der Quadratisierung $q(x)$ und der Kubisierung $k(x)$ um die Stelle $x_0 = 1$. Man erkennt, dass die kubische Funktion den Graphen von $f(x) = \ln x$ am längsten nahe begleitet, wenn wir uns von der Stelle $x_0 = 1$ entfernen. Würde wir noch höhere Potenzen hinzunehmen, also zu Taylor-Polynomen noch höherer Ordnung übergehen, so wäre eine immer bessere Übereinstimmung bis zu Stellen fernab von $x_0 = 1$ zu beobachten. In der unendlich langen Taylor-Reihenentwicklung ergäbe sich eine vollständige Übereinstimmung. Es wäre kein Unterschied mehr auszumachen.

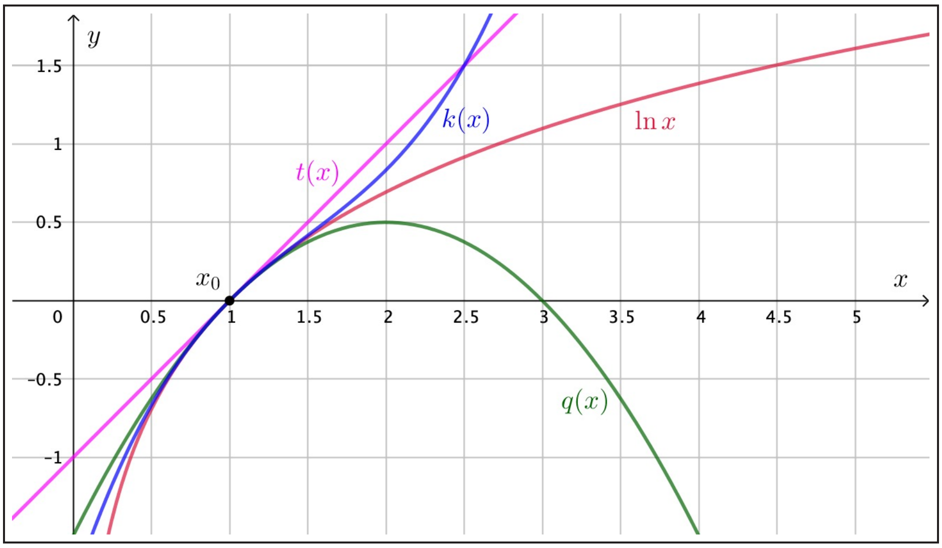

Abbildung A.1: Erste Taylor-Polynome zur Funktion $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x_0 = 1$.

A.2 Von der Taylor-Reihe zur Potenzreihe

Oft ist es nützlich eine Funktion $f(x)$ komplett als Taylor-Reihe, also als unendlich lange Summe von Potenzen von $(x - x_0)$ aufzuschreiben. Dann spielt allerdings die Wahl von x_0 keine Rolle mehr, denn solange man die Taylor-Reihe nicht abbricht, entspricht sie ja an jeder Stelle x exakt der betrachteten Funktion $f(x)$.

Für die Wahl der Stelle x_0, um die entwickelt wird, empfiehlt sich daher die einfachst mögliche Stelle, also $x_0 = 0$. So entstehen direkt Terme mit Potenzen $x^0 = 1$, $x^1 = x$, x^2, x^3, x^4, etc. Eine solche unendlich lange Summe nennt man **Potenzreihe**.

Potenzreihe einer Funktion $f(x)$

Gegeben sei die stetige und unendlich oft differenzierbare Funktion $f(x)$.

Dann lässt sich $f(x)$ als Summe von Potenzen von x aufschreiben. Diese Schreibweise heisst **Potenzreihenentwicklung** *oder einfach* **Potenzreihe** *von $f(x)$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} \tag{A.3}$$

Kurz: Eine Potenzreihe ist eine Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Da wir sie in Kürze gebrauchen werden, seien hier gleich die Potenzreihen zu den Funktionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ notiert:

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Bogenmass!)
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Bogenmass!)

Diskussion der Potenzreihenentwicklung von $\sin x$

Als schönes Beispiel möchte ich kurz die Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion näher beleuchten:

Achtung Bogenmass! Damit diese Potenzreihenentwicklung funktioniert, muss der Winkel im **Bogenmass** und nicht im Gradmass angegeben werden. Für die Umrechnung gilt: $180° \mathrel{\widehat{=}} \pi$.

Ungerade Potenzen / Punktsymmetrie: In der Potenzreihenentwicklung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \ldots$$

kommen ausschliesslich ungerade Potenzen vor. Die Graphen der **ungeraden Potenzfunktionen** x, x^3, x^5, etc. sind allesamt **punktsymmetrisch zum Ursprung** $(0,0)$. Das gilt auch für jede Summe gerader Potenzfunktionen.

Auch der Graph der Sinusfunktion $\sin x$ ist punktsymmetrisch. Es ist also nicht so abwegig, dass sie sich als Summe ungerader Potenzen schreiben lässt.[3]

Unendlich viele Nullstellen: Im Rahmen der Differentialrechnung haben wir gelernt, dass ein Polynom vom Grad n maximal n Nullstellen aufweist. Die Sinusfunktion hat bekanntermassen unendlich viele Nullstellen. Soll sie sich als Potenzreihe schreiben lassen, dann muss es sich zwangsläufig um eine Summe von unendlich vielen Potenzen handeln. Die Reihe kann also sicher nicht abbrechen. Auch dies passt.

Graphen: In Abb. A.2 betrachten wir ein paar ausgewählte Graphen abbrechender Potenzreihen. Dabei ist $f_n(x)$ diejenige Summe, die bei x^n abbricht.

Es erscheint schon fast wie ein kleines Wunder, dass beispielsweise $f_{27}(x)$ für $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ so perfekt mit der Sinusfunktion $\sin x$ übereinstimmt, dass wir gar keinen Unterschied mehr sehen. Erst für $|x| > 10$ trennen sich die beiden Graphen voneinander. Dann bräuchte es höhere Potenzen, um weitere Nullstellen zu "erzwingen".

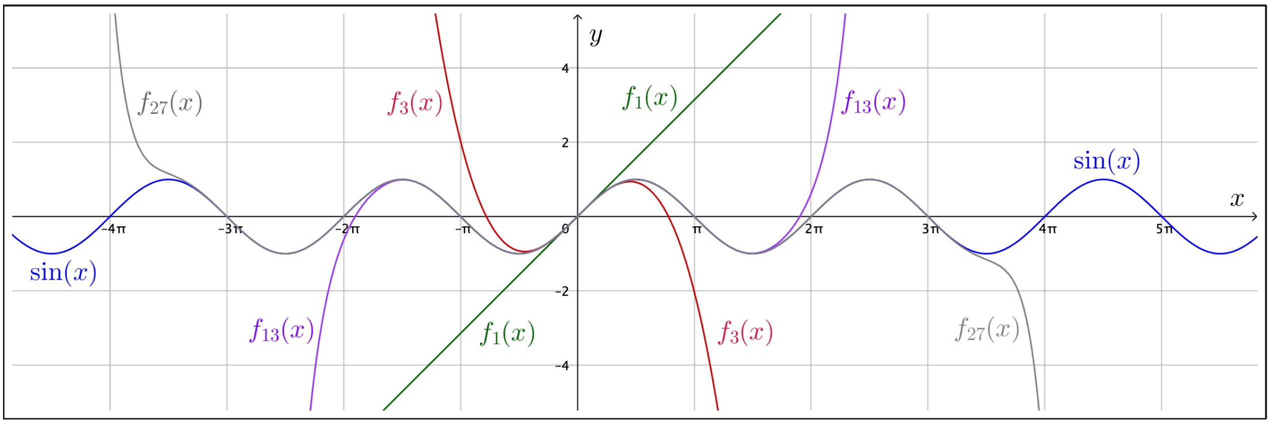

Abbildung A.2: Potenzreihen-Teilsummen zur Sinusfunktion. Je mehr Potenzen hinzugenommen werden, umso weiter entfernt vom Ursprung wird der Sinusgraph durch die Potenzsumme noch gut beschrieben.

[3] Umgekehrt gehören zu allen **geraden Potenzfunktionen** 1, x^2, x^4, etc. eben **y-achsensymmetrische Funktionsgraphen** und die Potenzreihenentwicklung einer insgesamt y-achsensymmetrischen Funktionen enthält nur gerade Potenzen. Das Paradebeispiel hierfür ist die Cosinusfunktion.

A.3 Von den Potenzreihen zur Euler'schen Formel

In den vorangegangenen Abschnitten dieses Anhangs haben wir in die verschiedenen Funktionen, wie von früher gewohnt, nur reelle Zahlen eingesetzt. Es dürfen aber auch komplexe Zahlen eingesetzt werden, denn gerade wegen der Potenzreihenentwicklungen wissen wir ja ganz genau, was innerhalb dieser Funktionen mit den eingegebenen Zahlen gemacht wird – nichts anderes als eine Anzahl von Multiplikationen und Additionen finden da statt, und darüber wissen wir bestens Bescheid, denn die Addition und die Multiplikation sind im Rahmen der Definition der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Körper ja genau definiert worden (vgl. Abschnitt 2.1).

Besonders interessant wird es, wenn wir die rein imaginäre Zahl $z = \mathrm{i}\varphi$ (mit $\varphi \in \mathbb{R}$) in die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion mit Basis e einsetzen:

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\varphi} = e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
&= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots \\
&= 1 + i\varphi + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^6}{6!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^7}{7!} + \ldots \\
&= 1 + \mathrm{i}\varphi + \frac{\mathrm{i}^2\varphi^2}{2} + \frac{\mathrm{i}^3\varphi^3}{3!} + \frac{\mathrm{i}^4\varphi^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}^5\varphi^5}{5!} + \frac{\mathrm{i}^6\varphi^6}{6!} + \frac{\mathrm{i}^7\varphi^7}{7!} + \ldots \\
&= 1 + \mathrm{i}\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \mathrm{i} \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \mathrm{i} \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + \mathrm{i} \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -i$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = i$, $\mathrm{i}^6 = -1$, etc.

Am Ende haben wir alle reellen und alle rein imaginären Glieder in Klammern zusammengefasst. Diese Klammern – so stellen wir nun fest – sind aber genau die Potenzreihen von Cosinus- und Sinusfunktion:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{für} \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{(Bogenmass!)}$$

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{für} \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{(Bogenmass!)}$$

Und so ergibt sich schliesslich die Euler'sche Formel (4.7):

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi$$

Die komplexe Zahl $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$ besitzt den Realteil $\cos\varphi$ und den Imaginärteil $\sin\varphi$:

$$\mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\varphi}\big) = \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}\big(e^{\mathrm{i}\varphi}\big) = \sin\varphi$$

Somit ist $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$ auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene anzusiedeln, denn es folgt:

$$\big|e^{\mathrm{i}\varphi}\big| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \qquad \text{trigonometrischer Pythagoras!}$$