Ergänzungen zur Quantenphysik

Der fallende Stein nach Griffiths

Auf diesen Seiten soll anhand des Beispiels 1.1 aus dem Buch *Quantenmechanik* von David J. Griffiths veranschaulicht werden, wie ungeheuer praktisch der Umgang mit infinitesimalen Schritten ist. Hier zunächst die Aufgabenstellung aus dem Buch:

> **Beispiel 1.1: Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichte**
>
> *Wir nehmen an, ich lasse einen Stein von einer Klippe der Höhe h herabfallen. Während der Stein fällt, mache ich in zufälligen Abständen eine Million Fotos. Auf jedem der Bilder messe ich die Strecke, die der Stein gefallen ist.*
>
> **Frage:** *Was ist der Mittelwert aller dieser Strecken? Oder mit anderen Worten: Was ist das zeitliche Mittel der zurückgelegten Strecken?*

In seiner Lösung macht uns Griffiths zuerst darauf aufmerksam, dass wir bereits eine gewisse Vorstellung haben, wo der gesuchte Mittelwert liegen muss:

> **Lösung:** *Der Stein ist anfangs in Ruhe und wird beim Fallen immer schneller; während eines größeren Teils der Fallzeit ist er also am oberen Rand der Klippe, die mittlere Entfernung muss also geringer als $h/2$ sein.*

Nun zitiert Griffiths das **Fallgesetz** der Newton'schen Mechanik:

> *Wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, hat der Stein zum Zeitpunkt t die Strecke x zurückgelegt:*
> $$x(t) = \frac{1}{2}\,gt^2$$

Wir kennen also die **Ortsfunktion** $x(t)$ zu diesem Vorgang. Der Stein wird zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$ losgelassen.

Griffiths verweist im Folgenden darauf, dass die Geschwindigkeit v des Steins zum Zeitpunkt t und die gesamte Fallzeit T ebenso bekannt sind:

> *Die Geschwindigkeit ist $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = gt$, und die gesamte Fallzeit ist $T = \sqrt{2h/g}$.*

Den Ausdruck für die gesamte Fallzeit T (für die Höhe h) verstehen wir sofort:

$$x(T) = \frac{1}{2}\,gT^2 \overset{!}{=} h \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Aber wozu erwähnt Griffiths die Geschwindigkeit? Worauf will er uns hinweisen?

Zunächst ist klar, dass sich die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ tatsächlich so ergibt, wie Griffiths sagt:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{1}{2}\,gt^2\right]' = \frac{1}{2}\,g \cdot 2t = gt$$

Das muss ja so sein, denn der Stein beschleunigt beim Fallen gleichmäßig mit der Fallbeschleunigung g.

Mit der Leibniznotation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für die Ableitung können wir diese Gleichung umstellen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = gt \cdot \mathrm{d}t$$

Wie ist diese neue Gleichung für die infinitesimalen Schritten $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}t$ zu interpretieren?

Betrachten wir den Stein zu irgendeinem Zeitpunkt t während des Fallens. In diesem Moment befindet er sich am Ort $x = \frac{1}{2}gt^2$ und hat die Geschwindigkeit $v(t) = gt$. Was passiert im nächstfolgenden infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$? Klar: der Stein wird sich um eine infinitesimale Strecke $\mathrm{d}x$ weiterbewegen. Und das ist nun genau die Aussage der Gleichung $\mathrm{d}x = gt \cdot \mathrm{d}t$: **Die während dem Zeitschritt $\mathrm{d}t$ zurückgelegte Strecke $\mathrm{d}x$ ist proportional zu $\mathrm{d}t$ und der Proportionalitätsfaktor ist die aktuelle Geschwindigkeit gt.**

Nebenbei: Im Prinzip sollte man vollständiger aufschreiben:

$$\mathrm{d}x(t) = gt \cdot \mathrm{d}t$$

Der infinitesimale Ortsschritt $\mathrm{d}x$ *zum Zeitpunkt* t beträgt $gt \cdot \mathrm{d}t$. Die Klammer (t), die explizit zum Ausdruck bringt, dass es sich um den infinitesimalen Ortsschritt $\mathrm{d}x$ zum Zeitpunkt t handelt, lässt man aber in aller Regel weg.

Natürlich ist umgekehrt auch $\mathrm{d}t$ proportional zu $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = gt \cdot \mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{gt}$$

Jetzt lautet der Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{gt}$. Auch dies lässt sich gut verstehen: Je weiter unten der infinitesimale Streckenabschnitt $\mathrm{d}x$ liegt, desto mehr Zeit t ist vergangen, desto größer ist die Geschwindigkeit $v = gt$ und desto geringer ist die infinitesimale Zeitspanne $\mathrm{d}t$, die zur Durchquerung von $\mathrm{d}x$ notwendig ist.

Als nächstes geht Griffiths auf die zeitliche Verteilung der Fotos ein:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kamera im Intervall $\mathrm{d}t$ *auslöst, beträgt* $\mathrm{d}t/T$, ...

Achtung! Hier meint Griffiths die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **ein einzelnes** Bild im Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ gemacht wird. Es geht in diesem Moment also nicht um die Gesamtheit der ganzen Million Fotos, denn sonst wäre die Wahrscheinlichkeit für ein Foto während $\mathrm{d}t$ eine Million mal so groß.

Überlegen wir: Wenn ich ein endliches Zeitintervall Δt innerhalb der Fallzeit von T betrachte, so besteht für jedes einzelne Foto die Wahrscheinlichkeit $\frac{\Delta t}{T}$, dass es im Abschnitt Δt aufgenommen wird, denn $\frac{\Delta t}{T}$ steht genau für den Anteil, den Δt in T ausmacht. Dieselbe Überlegung gilt immer noch, wenn ich Δt infinitesimal werden lasse: $\Delta t \to \mathrm{d}t$. Folglich ist $\frac{\mathrm{d}t}{T}$ die (unendlich kleine, aber von 0 verschiedene) Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Foto im infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$ aufgenommen wird.

Hier sollten wir noch etwas weiterdenken. Angenommen, wir betrachten den Zeitpunkt t, zu dem sich der Stein am Ort x befindet, so können wir für die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Foto in dem an t anschließenden infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$ gemacht wird, schreiben:

$$\varrho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\,\mathrm{d}t = \text{Wahrscheinlichkeit, dass das Foto im Zeitintervall } [t; t+\mathrm{d}t] \text{ aufgenommen wird}$$

Dabei steht $\varrho(t)$ für die **zeitliche Wahrscheinlichkeitsdichte** für ein einzelnes Foto. Offensichtlich ist sie für alle Zeitpunkte gleich. Die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Fotos ($= 1 = 100\,\%$) wird gleichmäßig über die gesamte Fallzeit T verteilt, also eben $\varrho(t) = \frac{1}{T} = \frac{100\,\%}{T}$.

Nun gehört aber, wie weiter oben beschrieben, zum Zeitschritt $\mathrm{d}t$ auch ein Ortsschritt $\mathrm{d}x = gt \cdot \mathrm{d}t$ und es sollte sich genauso gut beantworten lassen, wie wahrscheinlich es ist, dass das einzelne Foto in diesem Ortsschritt $\mathrm{d}x$ hinter dem aktuellen Ort x gemacht wird. Es muss also auch eine **örtliche Wahrscheinlichkeitsdichte** $\varrho(x)$ geben mit:

$$\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \text{Wahrscheinlichkeit, dass das Foto im Ortsintervall } [x; x+\mathrm{d}x] \text{ aufgenommen wird}$$

Da die infinitesimalen Schritte $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}x$ zusammengehören, müssen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dieselben sein:

$$\varrho(t)\,\mathrm{d}t = \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

Genau diesen Zusammenhang nutzt Griffiths in der Folge aus, um die örtliche Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ zu berechnen. Wir lesen weiter:

> *Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kamera im Intervall $\mathrm{d}t$ auslöst, beträgt $\mathrm{d}t/T$, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Foto eine Strecke in dem entsprechenden Bereich $\mathrm{d}x$ zeigt,*
>
> $$\frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x$$
>
> *Offenbar ist die Wahrscheinlichkeitsdichte*
>
> $$\varrho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}} \qquad (0 \leq x \leq h)$$
>
> *(außerhalb dieses Bereichs ist die Wahrscheinlichkeitsdichte natürlich 0).*

Zunächst benutzen wir einfach die vorher entdeckten Zusammenhänge $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{gt}$ und $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$:

$$\varrho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{gt}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Weiter drücken wir den Zeitpunkt t durch den Ort x aus, $x = \frac{1}{2}gt^2$ resp. $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, und setzen ein:

$$\varrho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{gt}\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{\mathrm{d}x}{g\sqrt{\frac{2x}{g}}}\cdot\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{\mathrm{d}x}{g}\cdot\sqrt{\frac{g}{2x}}\cdot\sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4xh}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

Und nun kommt die oben erläuterte Identifikation: Die Wahrscheinlichkeit $\varrho(t)\,\mathrm{d}t$, den Stein im infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ zu fotografieren, muss gleich der Wahrscheinlichkeit $\varrho(x)\,\mathrm{d}x$ sein, den Stein im zugehörigen infinitesimalen Streckenabschnitt $\mathrm{d}x$ aufzunehmen. Folglich muss der Ausdruck $\frac{1}{2\sqrt{hx}}$ der örtlichen Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ entsprechen:

$$\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \varrho(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \varrho(x) = \frac{1}{2\sqrt{hx}}$$

Da der Stein während der betrachteten Zeitspanne niemals außerhalb des Intervalls $[0;h]$ anzutreffen ist, muss dort die Wahrscheinlichkeitsdichte verschwinden: $\varrho(x) = 0$ für $x \notin [0;h]$.

Griffiths kontrolliert nun zuerst, ob die Wahrscheinlichkeitsdichte so stimmen kann. Da $\varrho(x)\,\mathrm{d}x$ für die Wahrscheinlichkeit steht, dass der Stein auf dem infinitesimalen Abschnitt $[x; x+\mathrm{d}x]$ fotografiert wird, muss die Summe über alle diese Wahrscheinlichkeiten gleich 1 sein, denn irgendwo muss der Stein auf einem Foto schließlich sein. Eine Summe über infinitesimal große Beiträge entspricht einem Integral:

> *Wir können dieses Ergebnis mit Gleichung 1.16 überprüfen:*
>
> $$\int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^h = 1$$

Natürlich sind wir uns aus der Gymi-Mathe gewohnt, dass solche Rechnungen ein paar Zwischenschritte mehr aufweisen. Hier die ausführlicher gezeigte Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^h \varrho(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^h \frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int_0^h x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^h = \frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^h = \frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\left(\sqrt{h}-0\right) = 1\end{aligned}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit beträgt also 1. Das durften wir von einer vernünftigen Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ so erwarten.

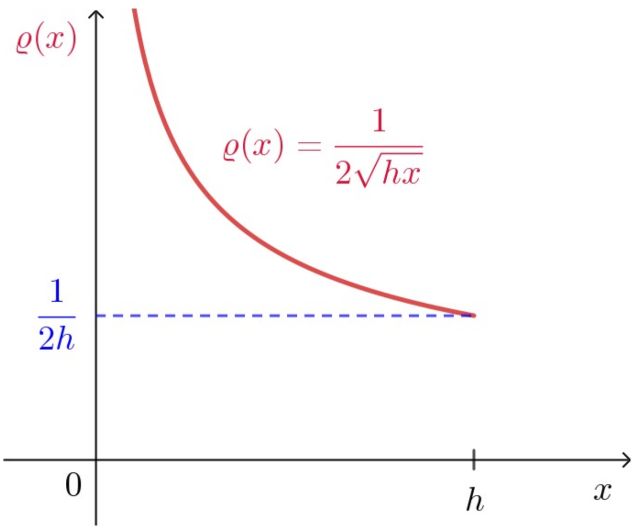
Zum Ende berechnet Griffiths den Erwartungswert für den Ort:

> *Die mittlere Strecke (Gleichung 1.17) ist*
>
> $$\langle x\rangle = \int_0^h x\,\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{3}$$
>
> *und das ist wie erwartet weniger als $h/2$.*

Auch hier noch eine ausführlichere Version der Rechnung:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_0^h x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h x\,\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int_0^h x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^h = \frac{1}{3\sqrt{h}}\cdot\left(x\sqrt{x}\,\right)\Big|_0^h = \frac{1}{3\sqrt{h}}\cdot\left(h\sqrt{h}-0\right) = \frac{h}{3}\end{aligned}$$

Der Mittelwert der Orte auf allen Bildern liegt etwa bei einem Drittel der Fallstrecke (von oben her gemessen). Machen wir $N = 1$ Million Aufnahmen, so dürfte der Mittelwert $\langle x\rangle$ relativ gut realisiert werden. Werden hingegen nur wenige Fotos geschossen, so gibt es eher Abweichungen davon. Der Mittel- oder Erwartungswert ist statistisch als exakter Grenzwert für $N \to \infty$ zu verstehen!



> *Abbildung 1.6 zeigt den Graphen von $\varrho(x)$. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte unendlich groß sein kann, obwohl die Wahrscheinlichkeit selbst (das Integral über ϱ) natürlich endlich ist (d.h. kleiner oder gleich 1).*

Tatsächlich steigt $\varrho(x)$ für $x \to 0$ ins Unendliche an. Die Fläche unter dem Graphen über dem Intervall $[0; h]$ ist aber trotzdem endlich, nämlich gleich 1, wie wir oben berechnet haben. Unendlich große Wahrscheinlichkeitsdichten sind also kein Problem, weil sie unter dem Integral mit unendlich kleinen, eben infinitesimalen Strecken $\mathrm{d}x$ multipliziert werden.