Ergänzungen zur Quantenphysik

Das Potential $V(x)$ – ein neuer Name für die potentielle Energie E_{pot}

Klassische Mechanik: Eine Kraft F, die nicht von der Geschwindigkeit v ($=$ 1. Ableitung x' der Ortsfunktion $x(t)$) abhängt, kann typischerweise mit einer potentiellen Energiefunktion $E_{\text{pot}}(x,t)$ in Verbindung gebracht werden. Eine solche Kraft hat in der Regel nämlich damit zu tun, dass verschiedene Körper sich aufgrund bestimmter Eigenschaften anziehen oder abstossen, weshalb die relative Lage dieser Körper für die im System vorhandene Energie eine Rolle spielt.

Beispiel Gravitation: Als Gravitation F_{G} bezeichnen wir die Anziehung zwischen zwei Körpern aufgrund ihrer Massen. Je weiter diese Körper voneinander entfernt sind, desto grösser ist die potentielle Energie E_{pot}, die im System gespeichert ist. Das verstehen wir gut, denn Energie ist ja ganz allgemein gespeicherte Arbeit und zur Vergrösserung der Distanz zwischen den Körpern muss (Hub-)Arbeit gegen F_{G} verrichtet werden. Diese wird im System in Form von potentieller Energie gespeichert. Die Richtung von F_{G} zeigt an, in welche Richtung sich die beiden Körper zur Verringerung von E_{pot} bewegen müssten. Mathematisch bedeutet dies:

$$F_{\text{G}} = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}$$

Das braucht natürlich etwas Erläuterung:

- Zunächst steht $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}$ für die *partielle Ableitung* von $E_{\text{pot}}(x,t)$ nach dem Ort x. Wir benötigen die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$, weil die potentielle Energiefunktion grundsätzlich von der Zeit t abhängen kann und somit als Funktion mehrerer Variablen aufzufassen ist.
- Nimmt E_{pot} zu, während x anwächst, so ist $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} > 0$, also positiv. Das kann man auch so interpretieren: Das Vorzeichen von $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}$ gibt die Richtung der Zunahme von E_{pot} an, also ob für eine Zunahme von E_{pot} auf der x-Achse vom aktuellen Ort x aus in die positive oder in die negative Richtung zu gehen ist.
- Die Gravitation F_{G} zeigt aber genau in die Gegenrichtung der Zunahme von E_{pot}. Deshalb braucht es ein Minuszeichen vor der Ableitung $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}$.
- Je stärker sich die potentielle Energiefunktion E_{pot} im Ort x am verändern ist, desto stärker ist dort die Gravitation F_{G}.

Wir merken schon: Immer von der potentiellen Energiefunktion $E_{\text{pot}}(x,t)$ zu sprechen, ist ein bisschen umständlich. Daher hat es sich in der theoretischen Physik eingebürgert, diese potentielle Energiefunktion einfach als **Potential** V zu bezeichnen. Alle Kräfte F, die sich als (negative) örtliche Ableitung eines Potentials V schreiben lassen, bezeichnet man als **konservative Kräfte**. Für konservative Kräfte F und ihr zugehöriges Potential V gilt also stets:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1}$$

In allen von uns betrachteten Fällen ist zudem das Potential V nur vom Ort x, aber nicht von der Zeit t abhängig: $V = V(x)$.

Das Aktionsprinzip im Falle konservativer Kräfte

Sobald wir es mit einem Körper zu tun haben, der ausschliesslich unter dem Einfluss konservativer Kräfte steht, kann seine resultierende Kraft als negative Ableitung eines Potentials $V(x,t)$ notiert werden, sodass wir das Aktionsprinzip der Newton'schen Mechanik wie folgt schreiben können:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

So finden wir dieses Aktionsprinzip auch im QM-Buch von Griffiths im Abschnitt 1.1 zitiert.

Altbekannte und neue Beispiele von Potentialen

Zur Verdeutlichung wollen wir ein paar Beispiele von Potentialen und damit verbundenen Kräften anschauen. Manches davon haben wir schonmal gesehen, anderes mag neu sein.

Lokales Gravitationspotential an der Erdoberfläche (= homogenes Gravitationsfeld): An der Erdoberfläche gilt:

$$V(x) = m \cdot g \cdot x \qquad \text{(1. Klasse: } E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h\text{)} \tag{3}$$

m = Masse, g = Ortsfaktor (hier: $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$), x = Höhe über dem Nullniveau.

Mit diesem Potential verbunden ist die Gewichtskraft an der Erdoberfläche:

$$F_{\mathrm{G}} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m \cdot g \qquad \text{(nach unten!)} \tag{4}$$

Zentralpotential eines Himmelskörpers: Die Gewichtskraft F_{G} nimmt mit zunehmender Distanz x zur Erde ab. Für dieselbe Höhendifferenz braucht es somit immer weniger Hubarbeit, je weiter weg man von der Erde ist. Das Gravitationspotential flacht immer mehr ab. Dessen mathematische Beschreibung wird am einfachsten, wenn wir das Nullniveau ins Unendliche legen:

$$\text{Gravitatives Zentralpotential:} \qquad V(r) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} \tag{5}$$

G = **universelle Gravitationskonstante** $= 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$, M = Masse des Zentralkörpers (im Fall der Erde: $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$), m = Masse des betrachteten Körpers, r = Abstand zum Erdmittelpunkt (Gleichung gilt nur für $r \geq$ Erdradius).

Zu diesem Gravitationspotential gehört das **Newton'sche Gravitationsgesetz** ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}$):

$$F_{\mathrm{G}}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r}\right) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \qquad \text{(Richtung Erdmittelpunkt!)} \tag{6}$$

Zentralpotential einer elektrischen Punktladung: Eine einzelne Punktladung Q erzeugt um sich ein elektrisches Feld, so wie ein Himmelskörper um sich ein gravitatives Feld erzeugt. Die Verschiebung einer anderen Ladung q in diesem Feld ist mit einem Energieumsatz verbunden. Weil das Gravitationsgesetz und das **Coulombgesetz** beides $\frac{1}{r^2}$-Kraftgesetze sind, ergibt sich in beiden Fällen ein $\frac{1}{r}$-Potential mit dem Nullniveau im Unendlichen:

$$\text{Elektrisches Zentralpotential:} \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Coulombkraft:} \qquad F_{\mathrm{el}} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \tag{8}$$

ε_0 = **Dielektrizitätskonstante** $= 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}}$, Q = zentrale Punktladung, q = Ladung des betrachteten Körpers, r = Abstand zwischen Q und q.

In (7) gibt es – im Gegensatz zu (4) und (5) – kein Minuszeichen, weil sich zwei Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstossen. (Zwei Massen ziehen sich ja stets an.)

Für das Verständnis des Aufbaus der Elektronenhülle um einen Atomkern ist dieses elektrische Zentralpotential (7), das auch als **Coulombpotential** bezeichnet wird, von grosser Bedeutung. Beträgt die Kernladung $Q = +Ze$ (Z = Ordnungszahl des Elementes), so lautet das Potential für ein Elektron mit Ladung $q = -e$:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{r} \tag{9}$$

e = **Elementarladung** $= 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.