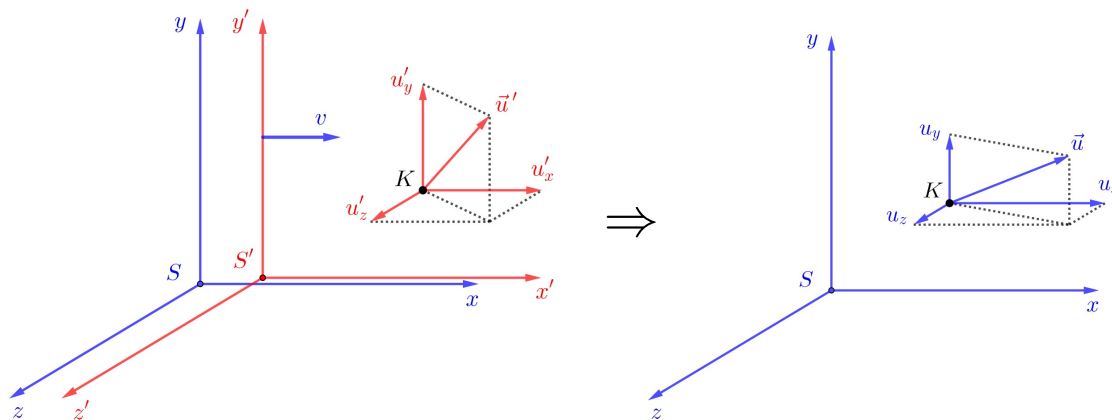


# Masse, Impuls, Kraft und Energie in der SRT

## 1 Rep.: Geschwindigkeitstransformation

Wir betrachten zwei Inertialsysteme in Standardorientierung:



Bewegt sich ein Körper im System  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}'$ , so haben wir in Übungsserie 4 hergeleitet, wie dieser Geschwindigkeitsvektor ins System  $S$  zu transformieren ist, mit welcher Geschwindigkeit  $\vec{u}$  sich der Körper also in  $S$  bewegt. Es gilt

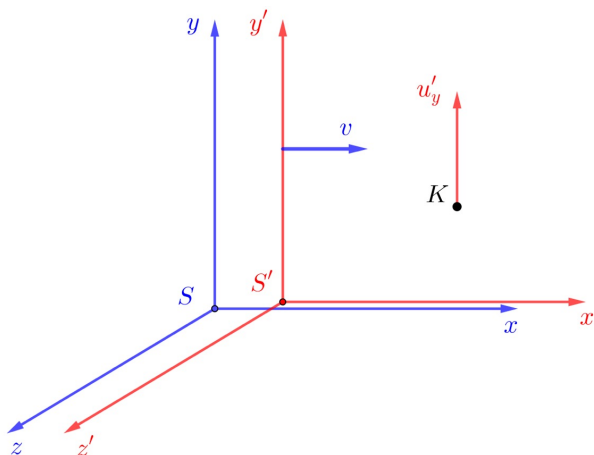
**Das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten**

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} \quad (1)$$

Die  $x$ -Komponente verhält sich bei der Umrechnung etwas anders als die  $y$ - und die  $z$ -Komponente, weil in  $x$ -Richtung, also in Richtung der Relativbewegung beider Systeme, als Effekt noch die Längenkontraktion mitspielt, währenddem seitlich dazu nur die Zeitdilatation wichtig ist.

## 2 Konstanz des Transversalimpulses und relativistische Masse

Betrachten wir nun einen Körper  $K$ , der sich im  $S'$ -System mit der kleinen, nicht-relativistischen Geschwindigkeit  $u'_y$  parallel zur  $y$ -Achse bewegt. Seine im Newton'schen Sinn bei niedrigen Geschwindigkeiten in  $S'$  registrierte Masse sei  $m'$ :



Aus Sicht des im  $S$ -System ruhenden Beobachters bewegt sich  $K$  mit  $v$  parallel zur  $x$ -Achse und gemäss dem Additionstheorem (1) mit  $u_y = \frac{u'_y}{\gamma}$  parallel zur  $y$ -Achse, wobei wir aufgrund der Vorgabe  $u'_x = 0$  das Glied  $\frac{u'_x v}{c^2}$  im Nenner weggestrichen haben.

Wie sieht es nun mit dem *Impuls* von  $K$  im  $S'$ -System und im  $S$ -System aus? In  $x$ -Richtung, also in der Richtung der Relativbewegung beider Systeme, hat  $K$  im  $S'$ -System keinen Impuls, im  $S$ -System hingegen einen nicht-verschwindenden Impuls. Dieser tritt schon bei kleinsten Relativgeschwindigkeiten auf. In *longitudinaler* Richtung, d.h. in der Richtung parallel zur Relativbewegung der beiden Systeme, muss der Impuls also stets transformiert werden, wenn man von einem Inertialsystem zum anderen wechselt.

In *transversaler* Richtung, d.h. der Richtung senkrecht zur Relativbewegung beider Systeme, gilt bei nicht-relativistischen Relativgeschwindigkeiten  $v$  die Beziehung  $u_y = u'_y$ . Bei relativistischen Relativgeschwindigkeiten gilt dagegen (1). Damit wäre auch für die transversale Richtung eine Impulstransformation erforderlich.

Man kann nun allerdings zeigen – wobei wir diese Überlegung überspringen und uns später einer anderweitige Plausibilisierung anschauen – dass eine solche transversale Impulstransformation sehr unpraktisch wäre: Für den Impuls liesse sich damit nämlich keine Lorentz-Transformation mehr formulieren und als Konsequenz davon wäre der Impuls für relativistische Rechnungen keine sinnvolle Grösse mehr. Daher wird *postuliert* (!), dass der transversale Impuls in beiden Inertialsystemen gleich gross ist. Dieses Postulat hat aber tiefgreifende Konsequenzen für die Masse des bewegten Körpers. Es gilt jetzt nämlich (mit der klassischen Impulsdefinition  $p = m \cdot u$ ):

$$p_y = p'_y \quad \Leftrightarrow \quad mu_y = m'u'_y \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot \frac{u'_y}{\gamma} = m'u'_y \quad \Leftrightarrow \quad m = \gamma \cdot m'$$

In obiger Gleichung ist  $m'$  die Masse, die der Körper im  $S'$ -System hat, also in dem System, in welchem er nur die kleine, nicht-relativistische Geschwindigkeit  $u'_y$ , besitzt. Man nennt sie daher die *Ruhemasse* und gibt ihr von nun an das Symbol  $m_0$ .  $m$  ist die gleiche Masse, gemessen im  $S$ -System. Sie ist offenbar grösser als die Ruhemasse und hängt von der Relativgeschwindigkeit  $v$  zwischen dem  $S$ - und dem  $S'$ -System ab. Man nennt sie daher die *dynamische* oder relativistische Masse.

In obiger Herleitung taucht rechts nun die Transversalgeschwindigkeit  $u'_y$  gar nicht mehr auf. Wir können sie in diesem Sinne auch beliebig gegen 0 gehen lassen und die Beziehung muss noch immer richtig sein. Dann bewegt sich der Körper nur noch mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zum im System  $S$  ruhenden Beobachter  $B$ . Letztlich geht es also einfach darum, dass sich ein Objekt relativ zu mir bewegt. Ist dies der Fall, so messe ich für dieses bewegte Objekt eine grössere Masse, als wenn es relativ zu mir ruht. Das bedeutet, wir können bereits für einen im System  $S'$  ruhenden Beobachter, für den sich der Körper  $K$  mit irgendeiner Geschwindigkeit  $\vec{u}$  bewegt, festhalten:

#### Relativistische Masse eines bewegten Körpers

*Bewegt sich ein Körper der Ruhemasse  $m_0$  mit der Geschwindigkeitsbetrag  $u$  relativ zu einem Beobachter, so vergrößert sich für den Beobachter diese Masse gemäss*

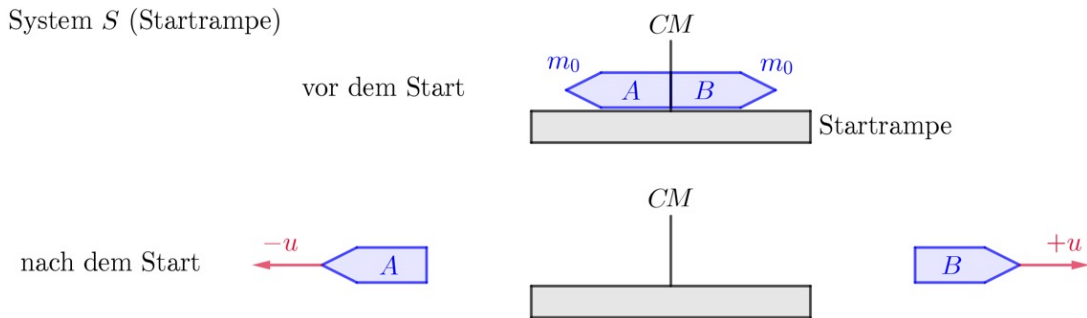
$$m = \gamma_u m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

Aus der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse ergibt sich sofort der relativistische Impuls  $p$  eines Körpers der Ruhemasse  $m_0$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  relativ zu einem Beobachter bewegt:

$$\text{Relativistischer Impuls:} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{u} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{u} \quad (3)$$

### 3 Noch eine Plausibilisierung zur relativistischen Masse

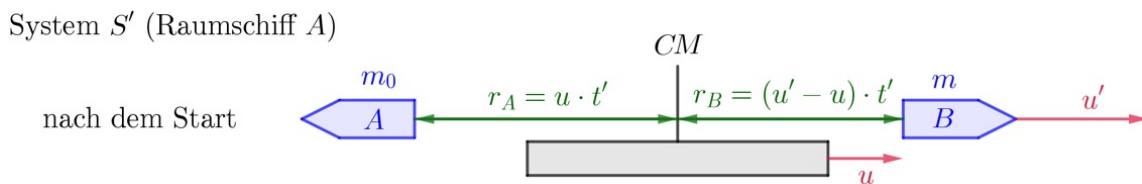
Gleichung (2) für die relativistische Masse eines Körpers lässt sich auch durch ein Gedankenexperiment herleiten. Ihm liegt die Idee zugrunde, dass die Lage des *Massenmittelpunktes* oder *Schwerpunktes* eines Systems von Massen nicht vom Bezugssystem abhängt. Stellen wir uns eine Startrampe vor, auf der zwei Raumschiffe *A* und *B* derselben Ruhemasse  $m_0$  ruhen. Sie werden durch eine (extrem starke und sehr angespannte) Sprungfeder auseinanderkatapultiert und haben danach die konstanten Geschwindigkeiten  $-u$  bzw.  $+u$  im  $S$ -System der Startrampe. Der Systemschwerpunkt bleibt auf der Startrampe:



Nach dem Start sei Raumschiff *A* der Ursprung des  $S'$ -Systems, in welchem die Startrampe die Geschwindigkeit  $u$  und das Raumschiff *B* nach (1) die Geschwindigkeit

$$u' = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} < 2u \quad (4)$$

hat. Hier die Sichtweise im  $S'$ -System von Raumschiff *A*:



Nun wird die Forderung gestellt, dass auch im  $S'$ -System der Schwerpunkt der Anordnung auf der Startrampe verharren soll. Also müssen wir dem Raumschiff *B* ganz offensichtlich eine neue Masse  $m \neq m_0$  geben. Für den Schwerpunkt  $CM$  (*center of mass*) zweier Massen  $m_A$  und  $m_B$  an den Orten  $x_A$  und  $x_B$  gilt allgemein:

$$CM = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad (5)$$

Währenddem im Startrampensystem  $S$  aus Symmetriegründen klar ist, dass der Schwerpunkt auch nach dem Start in der Mitte der Startrampe bleibt, ist das aus Sicht des Raumschiffs *A* nicht selbstverständlich. Gemäss der Schwerpunktsdefinition (5) müssen sich die mit der jeweiligen Masse gewichtete Strecken ausgleichen. Es muss also gemäss obiger Skizze im System  $S'$  gelten:

$$m_0 \cdot r_A = m \cdot r_B \quad \text{resp.} \quad m_0 u t' = m(u' - u)t' \quad \text{resp.} \quad m_0 u = m(u' - u) \quad (6)$$

wobei  $r_A = u t'$  bzw.  $r_B = (u' - u)t'$  die Entfernungen der beiden Raumschiffe von der Startrampe nach der Zeit  $t'$  sind. Auf der rechten Seite braucht das Additionstheorem nicht angewandt zu werden, da sowohl  $u'$  als auch  $u$  Geschwindigkeiten im  $S$ -System sind. Nun rechnen wir zunächst mit (4) die Differenz  $(u' - u)$  in eine Funktion von  $u$  um:

$$u' - u = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} - u = \frac{2u}{\frac{c^2 + u^2}{c^2}} - u = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2} - u = \frac{2uc^2 - uc^2 - u^3}{c^2 + u^2} = \frac{u(c^2 - u^2)}{c^2 + u^2}$$

Damit folgt aus (6) weiter:

$$m = m_0 \cdot \frac{u}{u' - u} = m_0 \cdot \frac{u}{\frac{u(c^2 - u^2)}{c^2 + u^2}} = m_0 \cdot \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2}$$

Nun soll aber die Verknüpfung von  $m$  und  $m_0$  eigentlich in Abhängigkeit von  $u'$  ausgedrückt werden, denn im System  $S'$  von Raumschiff  $A$  bewegt sich Raumschiff  $B$  mit der Geschwindigkeit  $u'$ . Dazu formen wir zunächst geschickt um:

$$\begin{aligned} m &= m_0 \cdot \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2} \cdot \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{c^2}} = m_0 \cdot \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m_0 \cdot \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^2}} \\ &= m_0 \cdot \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2 - 4 \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}}}{\frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}}\right)^2 \left(\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2 - 4 \frac{u^2}{c^2}\right)}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{4 \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2}}} \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck entdecken wir in der Nennerwurzel gemäss (4):

$$u'^2 = \left(\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}\right)^2 = \frac{4u^2}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2}$$

Damit schreiben wir:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{4 \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma_{u'} \quad \text{q.e.d.}$$

## 4 Kraft

In der nicht-relativistischen Physik gilt das 2. Newtonsche Axiom (Aktionsprinzip): *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung*. Es kann auch mit der zeitlichen Ableitung des Impulses

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7)$$

geschrieben werden. Da die Masse  $m$  keine Funktion der Zeit ist, darf sie vor oder hinter das Differentialzeichen geschrieben werden.

In der relativistischen Physik ist die Masse keine Konstante mehr; obige Rechnung kann daher nicht durchgeführt werden. Die *Kraft wird vielmehr durch*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8)$$

definiert.  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  reduziert sich damit zu einem nicht-relativistischen Spezialfall. In der relativistischen Physik besteht vielmehr ein komplizierterer Zusammenhang zwischen Kraft  $\vec{F}$  und Beschleunigung  $\vec{a}$ . Dazu machen wir zunächst eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_u}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{1}{c^2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{c^2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{c^2}\right) \left(u_x \frac{du_x}{dt} + u_y \frac{du_y}{dt} + u_z \frac{du_z}{dt}\right) \\ &= \frac{\gamma_u^3}{c^2} \cdot \left(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \frac{\gamma_u^3}{c^2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a}) \end{aligned}$$

Nun können wir den relativistisch korrekten Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung angeben, indem wir auf die neue Kraftdefinition (8) und den relativistischen Impuls aus (3) zurückgreifen und beim Ableiten die Produktregel anwenden ( $\frac{dm_0}{dt} = 0$ ):

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma_u \cdot m_0 \cdot \vec{u}) = \frac{d\gamma_u}{dt} \cdot m_0 \cdot \vec{u} + \gamma_u \cdot m_0 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= \frac{\gamma_u^3 m_0}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} + \gamma_u m_0 \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

Somit haben wir die

$$\text{relativistische Bewegungsgleichung} \quad \vec{F} = \frac{\gamma_u^3 m_0}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{u} + \gamma_u m_0 \cdot \vec{a} \quad (9)$$

erhalten. Neben der Beschleunigung  $\vec{a}$  geht in sie auch die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  ein; Kraft und Beschleunigung zeigen offensichtlich nicht mehr in dieselbe Richtung! Im nicht-relativistischen Spezialfall strebt  $\frac{u}{c}$  gegen null und  $\gamma$  gegen eins. Damit folgt aus (9) wieder die bekannte Gleichung  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  mit der Kollinearität von  $\vec{F}$  und  $\vec{a}$ .

Wenn man das Koordinatensystem so legen kann, dass  $\vec{u} = (u, 0, 0)$  ist, so folgt aus (9) sofort:

$$\begin{aligned}F_x &= \gamma_u m_0 a_x + \frac{\gamma_u^3 m_0}{c^2} u a_x u = \gamma_u m_0 a_x \left( 1 + \gamma_u^2 \frac{u^2}{c^2} \right) \\ &= \gamma_u m_0 a_x \left( 1 + \frac{\beta_u^2}{1 - \beta_u^2} \right) = \gamma_u m_0 a_x \left( \frac{1 - \beta_u^2 + \beta_u^2}{1 - \beta_u^2} \right) = \gamma_u m_0 a_x \cdot \frac{1}{1 - \beta_u^2} = \gamma_u^3 m_0 a_x\end{aligned}$$

Somit können wir komponentenweise für die Kraft schreiben:

$$F_x = \gamma_u^3 m_0 a_x \quad F_y = \gamma_u m_0 a_y \quad F_z = \gamma_u m_0 a_z \quad (10)$$

## 5 Energie

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft  $F_x$  längs eines infinitesimalen Wegstücks  $dx$ , so wird an ihm die Beschleunigungsarbeit  $F_x dx$  verrichtet, die in Form von *kinetischer Energie*  $dE_{\text{kin}}$  gespeichert wird. Hat der Massepunkt die Ruhemasse  $m_0$  und bewegt er sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{u} = (u, 0, 0)$ , so ergibt sich mit der Beziehung (10) zwischen Kraft  $F_x$  und Beschleunigung  $a_x = \frac{du}{dt}$ :

$$dE_{\text{kin}} = F_x dx = \gamma_u^3 m_0 a_x dx = \gamma_u^3 m_0 \frac{du}{dt} dx = \gamma_u^3 m_0 \frac{dx}{dt} du = \frac{m_0 u du}{(1 - \beta_u^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \frac{\beta_u d\beta_u}{(1 - \beta_u^2)^{3/2}}$$

Beginnt die Bewegung mit  $u = 0$ , so ergibt die Integration:

$$E_{\text{kin}} = \int_0^{\beta_u} dE_{\text{kin}} = m_0 c^2 \int_0^{\beta_u} \frac{\beta'_u d\beta'_u}{(1 - \beta'^u_2)^{3/2}} = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^u_2}} \Big|_0^{\beta_u} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} - 1 \right)$$

Kurz zusammengefasst finden wir also:

$$E_{\text{kin}} = (\gamma_u - 1) m_0 c^2 = m c^2 - m_0 c^2 \quad (11)$$

Diese Gleichung ist sehr wichtig! Die kinetische Energie ergibt sich also aus der *Differenz zweier Energien*, nämlich der *relativistischen Gesamtenergie*

$$E = m c^2 = \gamma_u m_0 c^2 \quad (12)$$

und der *Ruheenergie*

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (13)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten geht  $\beta_u$  gegen null. Mit der Taylor-Entwicklung von  $\gamma_u$  für  $\beta_u \approx 0$  erhält man die klassische Formel für die kinetische Energie:

$$\gamma_u \approx 1 + \frac{1}{2} \beta_u^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \beta_u^2 - 1\right) m_0 c^2 = \frac{1}{2} \beta_u^2 m_0 c^2 = \frac{m_0 u^2}{2}$$

Gleichung (13) ist wohl die bekannteste Gleichung der Relativitätstheorie. Sie besagt, dass jedem Körper der Ruhemasse  $m_0$  die Ruheenergie  $E_0$  äquivalent ist. Interessant ist dabei vor allem der riesige Proportionalitätsfaktor  $c^2 \approx 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ , der der Masse 1 kg die unvorstellbar große Energiemenge  $9 \cdot 10^{16} \text{ J}$  zuordnet. Sie würde ausreichen, einen kleinen Berg der Masse  $10^6 \text{ t}$  auf den Mond zu schießen. Unglücklicherweise – oder vielleicht auch glücklicherweise? – lässt sich ein größerer Bruchteil oder gar die gesamte Ruheenergie eines Körpers in aller Regel nicht in eine andere Energieform umwandeln, oder umgekehrt z.B. Bewegungsenergie in Ruheenergie umwandeln. Ausnahmen finden sich nur in den Labors der Hochenergiephysik, wo z.B. ein Proton und ein Antiproton *aus dem Nichts entstehen* können, wenn zwei Protonen mit sehr hoher Geschwindigkeit zusammenprallen. Oder es kann sich ein Proton und ein Antiproton unter Aussendung von Gammastrahlung wieder *in Nichts auflösen*.

## Potentielle Energie und Massendefekt beim Wasserstoffatom

Zur relativistischen Gesamtenergie gehört außer der Ruheenergie und der kinetischen Energie auch die *potentielle Energie*  $E_{\text{pot}}$ . Nehmen wir ein System aus zwei Körpern 1 und 2, die *elektromagnetisch* miteinander wechselwirken. Die Ruheenergien sind  $m_1 c^2$  und  $m_2 c^2$ . Die Körper bewegen sich relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt mit den Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$ . Diese Bewegungen erhöhen die relativistischen Gesamtenergien bezüglich des Schwerpunktes auf<sup>1</sup>

$$E_1 = \gamma_1 m_1 c^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{c}\right)^2}} \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_2}{c}\right)^2}} .$$

Zuletzt muss die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  hinzuaddiert werden, die bei gebundenen Systemen natürlich negativ ist (der freie Zustand hat die potentielle Energie 0). Damit ergibt sich für die relativistische Gesamtenergie

$$E = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_2}{c}\right)^2}} + E_{\text{pot}} . \quad (14)$$

Ein solches gebundenes Zweikörpersystem ist z.B. das *Wasserstoffatom*, bestehend aus einem *Proton*  $p$  und einem *Elektron*  $e$ . Man zerlegt nun die beiden ersten Summanden in Summen aus Ruheenergie und kinetischer Energie und schreibt

$$E = m_p c^2 + E_{\text{kin},p} + m_e c^2 + E_{\text{kin},e} + E_{\text{pot}}$$

Neu sortiert ergibt sich

$$E = (m_p + m_e) c^2 + (E_{\text{kin},p} + E_{\text{kin},e} + E_{\text{pot}}) . \quad (15)$$

Der zweite Summand, bestehend aus den beiden kinetischen Energien und der potentiellen Energie, ist die *Bindungsenergie*.

---

<sup>1</sup>In diesem Zusammenhang ist es interessant zu erwähnen, dass auch die Erwärmung eines Körpers, die ja bekanntlich nichts anderes als eine Geschwindigkeitszunahme seiner Einzelteile ist, zu einer Massenzunahme des Körpers führt.

Für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ergibt sich für diese Bindungsenergie der bekannte Wert von  $-13.6\text{ eV}$ . Die Ruheenergien von Proton und Elektron betragen dagegen  $938\text{ MeV}$  und  $511\text{ keV}$ . Insgesamt hat also das Wasserstoffatom eine geringfügig kleinere Gesamtenergie bzw. kleinere Gesamtmasse als die Summe der Ruheenergien bzw. Ruhemassen der beiden Bestandteile. Diesen Effekt nennt man *Massendefekt*. Er beträgt beim Wasserstoffnuklid  ${}^1_1\text{H}$

$$\frac{13.6\text{ eV}}{938 \cdot 10^6\text{ eV} + 511 \cdot 10^3\text{ eV}} \approx 1.45 \cdot 10^{-6} \% .$$

Dieser winzige Bruchteil der Gesamtenergie von Proton und Elektron wird beim Zusammenbau des Wasserstoffatoms durch Emission eines Photons freigesetzt. Er ist viel zu klein, als dass wir etwas davon bemerken, sodass die Masse in der Chemie eben als *Erhaltungsgrösse* angesehen werden darf.

Beim Aufbau eines Atomkernes aus  $p$  und  $n$  hat man es mit der *elektromagnetischen* und der *starken Wechselwirkung* zu tun. Der Massendefekt tritt hier viel stärker in Erscheinung. Nehmen wir den  ${}^4_2\text{He}$ -Kern. Er besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen. Man erwartet eine Masse von  $2(m_p + m_n) = 2(1.007276\text{ u} + 1.008665\text{ u}) = 4.031883\text{ u}$ . Tatsächlich gemessen werden aber nur  $4.001506\text{ u}$ . Der Massendefekt beträgt also "stattliche"

$$\frac{4.031883\text{ u} - 4.001506\text{ u}}{4.031883\text{ u}} = 0.753 \% .$$

Ganz allgemein gilt, dass bei der *Fusion*, also beim Zusammenbau von leichten Kernen aus Protonen, Neutronen und anderen leichten Kernen, Energie freigesetzt wird; der dadurch entstandene neue Kern hat also eine geringere Gesamtenergie oder Gesamtmasse als seine Bestandteile. Solche *exothermen Kernreaktionen* finden z.B. in vielen Sternen statt. Die einfachste, die aus Wasserstoff Helium erzeugt, auch in der Wasserstoffbombe. Der Aufbau schwerer Kerne durch *endotherme Kernreaktionen* findet in der Natur nur bei *Supernova-Explosionen* statt. Diese Kerne können sich allerdings unter Energieabgabe wieder in leichtere Kerne aufspalten. Man nennt dies *Fission*. Bekannteste Beispiele sind die Fission von Uran und Plutonium im Kernkraftwerk bzw. in der Atombombe. Die bei der Hiroshimabombe frei gewordene Energie war einem Massendefekt von nur  $1\text{ g}$  äquivalent!

## 6 Energie-Impuls-Gleichung

Die *Beziehung zwischen Energie und Impuls* eines Massenpunktes der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\vec{u} = (u, 0, 0)$  ist in der nicht-relativistischen Physik eine Beziehung zwischen der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  und dem Impuls  $\vec{p} = (p, 0, 0)$ :

$$p = mu \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} = \frac{mu^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (16)$$

In der relativistischen Physik ist sie dagegen eine Beziehung zwischen der Gesamtenergie  $E$ , der Ruheenergie  $E_0$ , und dem Impuls  $p$ , die sich wie folgt herleiten lässt:

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \cdot \frac{1 - \beta_u^2 + \beta_u^2}{1 - \beta_u^2} = m_0^2 c^4 (1 + \gamma_u^2 \beta_u^2) = m_0^2 c^4 + \gamma_u^2 m_0^2 \beta_u^2 c^4 = E_0^2 + m^2 u^2 c^2$$

Daraus folgt mit (3) die

$$\text{Energie-Impuls-Gleichung:} \quad E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (17)$$

Es gibt Teilchen, die sich stets – und natürlich in allen Inertialsystemen – mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, z.B. *Photonen*. Die relativistische Masse  $m = \gamma_u m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}$  ist für  $\beta_u = 1$  aber nur dann endlich, wenn  $m_0 = 0$  ist. Daraus folgt, dass alle Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, notwendigerweise eine verschwindende Ruhemasse  $m_0 = 0$  haben. Man nennt sie daher *masselos*. Für sie vereinfacht sich die Energie-Impuls-Gleichung (17) zu:

$$E = |p| \cdot c \quad (18)$$