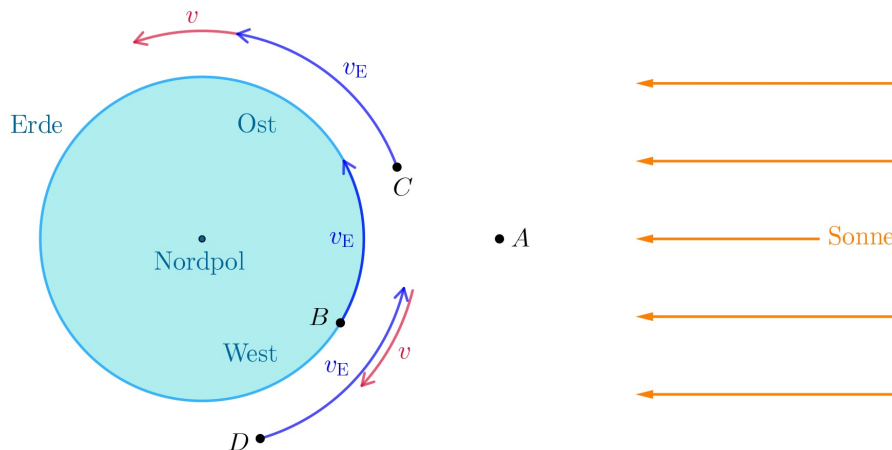


Das Hafele-Keating-Experiment (1971)

Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch:
J. Freund: *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

1971 konnten die Zeitdilatationen, die von der Speziellen und von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt werden, experimentell in besonders überzeugender Weise demonstriert werden. Die sehr einfache Idee dazu hatten *Hafele* und *Keating*, die mit extrem genau gehenden *Atomuhren* in Linienflugzeugen in Äquatornähe *um die Erde flogen, und zwar einmal in Ostrichtung und einmal in Westrichtung*.



Für die Rechnung müssen jetzt zwei Geschwindigkeitsvariablen eingeführt werden: v_E ist die *Geschwindigkeit der Erddrehung* am Äquator ($40\,000\text{ km in }24\text{ h} = 463\frac{\text{m}}{\text{s}}$) und v die *Geschwindigkeit der Flugzeuge* mit den Atomuhren relativ zur Erde (ca. $800\frac{\text{km}}{\text{h}} = 222\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Insgesamt sind vier Bezugssysteme zu unterscheiden:

- *A* ist ein hypothetischer Beobachter, der sich relativ zur Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_E nach Westen, also gegen die Erddrehung, bewegt. Für ihn steht die Sonne immer im Zenit, die Erde dreht sich unter ihm hindurch. Er befindet sich in einem *Inertialsystem*, da er nicht an einer Kreisbewegung um die Erdachse teilnimmt. Von der Bewegung der Erde um die Sonne sei abgesehen.
- *B* ist ein Beobachter am Boden. Er bewegt sich mit v_E relativ zu *A*.
- *C* ist ein Beobachter im Flugzeug auf Ostkurs. Er fliegt mit $v_E + v$ relativ zu *A*.
- *D* ist ein Beobachter im Flugzeug auf Westkurs. Er fliegt mit $v_E - v$ relativ zu *A*.

B, *C* und *D* befinden sich offensichtlich nicht in Inertialsystemen. Da die Spezielle Relativitätstheorie nur für Inertialsysteme gilt, **müssen wir die Rechnung im System von A durchführen!**

Wir idealisieren die Situation zunächst, indem wir annehmen, dass beide Flugzeuge gleichzeitig bei *B* starten und nach einer Erdumrundung gleichzeitig wieder bei *B* ankommen. Im System von *A* dauern diese Flüge die Zeit t . Die von *B*, *C* und *D* registrierten Eigenzeiten τ_B , τ_C und τ_D hängen wie folgt mit t zusammen:

$$t = \frac{\tau_B}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_E}{c}\right)^2}} = \frac{\tau_C}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_E + v}{c}\right)^2}} = \frac{\tau_D}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_E - v}{c}\right)^2}}$$

Da sich die Ausdrücke unter den Wurzeln nur sehr wenig von 1 unterscheiden, können die Wurzeln als Taylorreihen geschrieben werden ($\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$). Daraus folgt für die drei Eigenzeiten:

$$\tau_B = t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_E}{c}\right)^2} \approx t \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_E}{c}\right)^2\right)$$

$$\tau_C = t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_E + v}{c}\right)^2} \approx t \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_E + v}{c}\right)^2\right)$$

$$\tau_D = t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_E - v}{c}\right)^2} \approx t \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_E - v}{c}\right)^2\right)$$

Wir berechnen daraus die Differenz zwischen der im Flugzeug auf Ostkurs und der am Boden verstrichenen Eigenzeit zu:

$$\Delta\tau^{\text{Ost}} = \tau_C - \tau_B \approx -\frac{2v_E v + v^2}{2c^2} \cdot t \quad \text{und} \quad \Delta\tau^{\text{West}} = \tau_D - \tau_B \approx +\frac{2v_E v - v^2}{2c^2} \cdot t$$

Die Flugzeuggeschwindigkeit soll $800 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 222 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ betragen; für die Flugdauer gilt dann:

$$t \approx \tau_B = \frac{40\,000 \text{ km}}{800 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 50 \text{ h} = 180\,000 \text{ s}$$

Daraus berechnet sich $\Delta\tau^{\text{Ost}} = -255 \text{ ns}$ und $\Delta\tau^{\text{West}} = +156 \text{ ns}$. Beim *Ostflug* verstreicht die Zeit im Flugzeug *weniger schnell* als auf der Erde. Beim *Westflug* verstreicht sie im Flugzeug dagegen *etwas schneller*. Dies liegt daran, dass aus Sicht des hypothetischen Inertialbeobachters *A* das nach Westen fliegende Flugzeug eine kleinere Geschwindigkeit hat als der Erdbeobachter *B*.

An dieser Stelle kommt aber noch eine größere Korrektur aus der *Allgemeinen Relativitätstheorie* hinzu: Diese sagt nämlich vorher, dass der Zeitverlauf auch vom *Gravitationspotential* abhängig ist, und zwar derart, dass die Zeit umso langsamer abläuft, je tiefer sich eine Uhr im Gravitationsstrichter einer Masse befindet. Da ein Flugzeug näherungsweise in 10 000 m Höhe fliegt, verstreichen im Flugzeug im Verlaufe von 50 h etwa 196 ns mehr als am Boden, sodass gilt:

$$\Delta\tau^{\text{Ost}} = -255 \text{ ns} + 196 \text{ ns} = -59 \text{ ns} \quad \text{und} \quad \Delta\tau^{\text{West}} = +156 \text{ ns} + 196 \text{ ns} = +352 \text{ ns}$$

Bei genauer Kenntnis der Flugdaten ergab sich beim Experiment von Hafele und Keating rechnerisch:

$$\Delta\tau^{\text{Ost}} = (-40 \pm 23) \text{ ns} \quad \text{und} \quad \Delta\tau^{\text{West}} = (+275 \pm 21) \text{ ns}$$

Gemessen wurden mit vier Atomuhren die Werte

$$\Delta\tau^{\text{Ost}} = (-59 \pm 10) \text{ ns} \quad \text{und} \quad \Delta\tau^{\text{West}} = (+273 \pm 7) \text{ ns}$$

Theorie und Experiment stimmen also ausgezeichnet überein.

