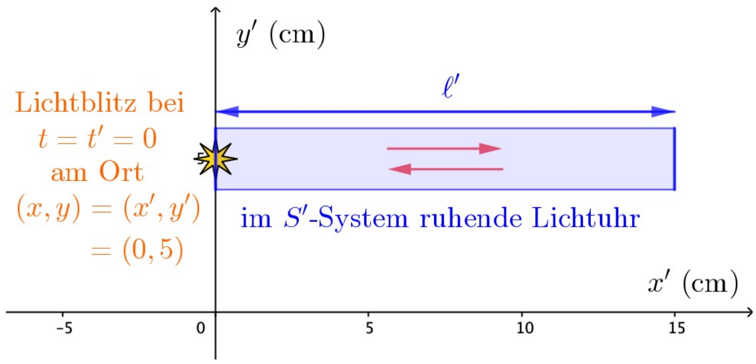
Die Herleitung der Längenkontraktion

Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch: **J. Freund:** *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

Wieder die Lichtuhr...

Wie schon bei der Herleitung der Zeitdilatation betrachten wir auch hier wieder zwei Inertialsysteme in *Standardorientierung* für das folgende Gedankenexperiment: Eine Lichtuhr liegt parallel zur x'-Achse des S'-Systems und ruht in ihm. Das S'-System bewegt sich mit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ relativ zum S-System. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ liegt das linke Ende der Lichtuhr bei $x = x' = 0$. Genau dort – zeitlich und örtlich – wird das Ticken der Lichtuhr mit einem Lichtblitz gestartet.



Laufzeit des Lichtblitzes für Hin- und Rückweg im System S' der Lichtuhr

Ein Beobachter im S'-System zündet bei $t' = 0$ und $x' = 0$ einen Lichtblitz und misst die Länge ℓ' der Lichtuhr aus der Laufzeit t' des Lichtes vom linken zum rechten Ende und zurück zu

$$\ell' = \frac{1}{2}\, c\, t' \quad . \tag{1}$$

Natürlich passen die Werte $t' = 1\,\mathrm{ns}$ und $\ell' = 15\,\mathrm{cm}$ im Lichtuhrensystem S' zusammen.

Laufzeit des Lichtblitzes aus Sicht des Systems S (Lichtuhr bewegt sich)

Im S-System hat die Lichtuhr die noch nicht bekannte Länge ℓ. Der Verlauf des Experimentes sieht im S-System so aus, wie oben auf der nächsten Seite gezeigt. Hin- und Rückweg dauern für den Lichtblitz offenbar unterschiedlich lange, nämlich t_1 und t_2. Entsprechend sind die zurückgelegten Wege unterschiedlich lang, nämlich

$$\ell_1 = \ell + v\, t_1 \qquad \text{und} \qquad \ell_2 = \ell - v\, t_2 \quad .$$

Mit $\ell_1 = c\, t_1$ und $\ell_2 = c\, t_2$ (Universalität der Lichtgeschwindigkeit!) erhält man daraus

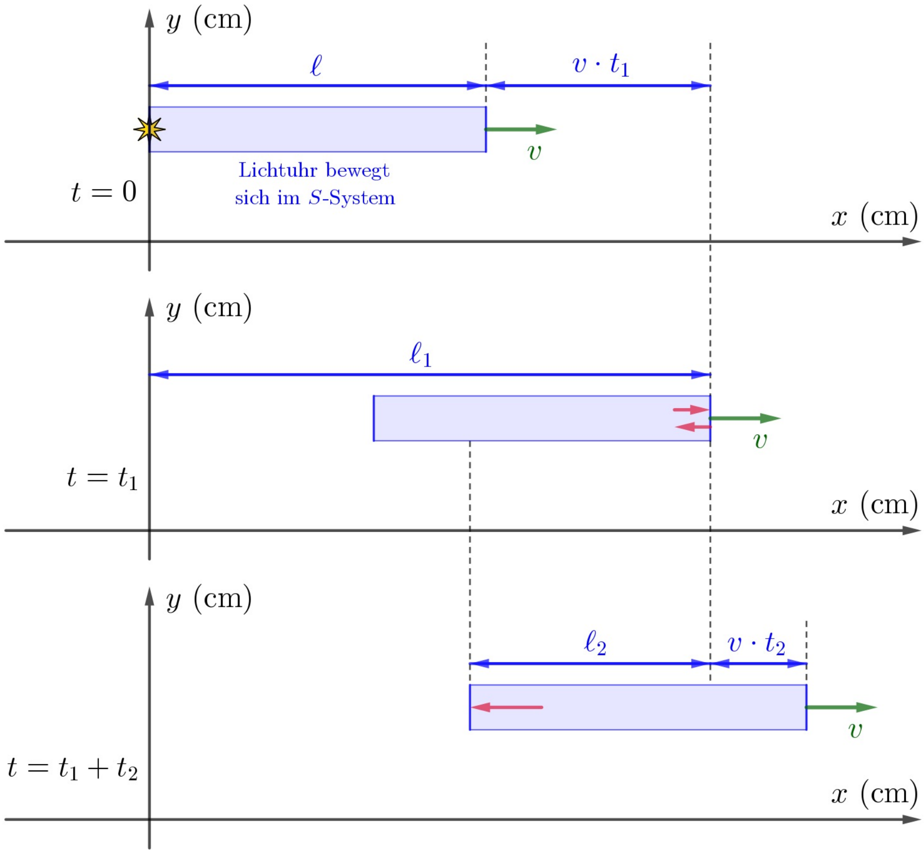
$$(c - v)\, t_1 = \ell \qquad \text{und} \qquad (c + v)\, t_2 = \ell \quad .$$

Somit beträgt die Gesamtlaufzeit t des Lichtblitzes im S-System

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\ell}{c - v} + \frac{\ell}{c + v} = \frac{\ell\,(c + v) + \ell\,(c - v)}{c^2 - v^2} = \frac{2\,\ell\, c}{c^2 - v^2} = \frac{2\,\ell}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2\,\ell}{c} \cdot \gamma^2 \quad .$$

Umformen nach ℓ ergibt für die Länge der Lichtuhr im S-System

$$\ell = \frac{1}{\gamma^2}\, \frac{1}{2}\, c\, t \quad . \tag{2}$$



Folgerung: Längenkontraktion!

Nun lässt sich mittels (1) und (2) das Verhältnis der Längen ℓ' und ℓ der Lichtuhr in den beiden Systemen bilden:

$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{\frac{1}{2}\,c\,t'}{\frac{1}{\gamma^2}\,\frac{1}{2}\,c\,t} = \gamma^2\,\frac{t'}{t} \quad .$$

Die beiden Zeiten t und t' sind aber via *Zeitdilatation*

$$t = \gamma\,t'$$

miteinander verbunden und somit folgt für die Längen ℓ und ℓ':

$$\frac{\ell'}{\ell} = \gamma^2\,\frac{t'}{t} = \gamma^2\,\frac{t'}{\gamma t'} = \gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \frac{\ell'}{\gamma}$$

Wir stellen also fest:

Längenkontraktion

Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit v, so wird eine Länge in Bewegungsrichtung, die in S' ruht und den Betrag ℓ' hat, für den Beobachter in S verkürzt auf

$$\ell = \ell' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \ell' \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\ell'}{\gamma} \leq \ell' \quad . \tag{3}$$

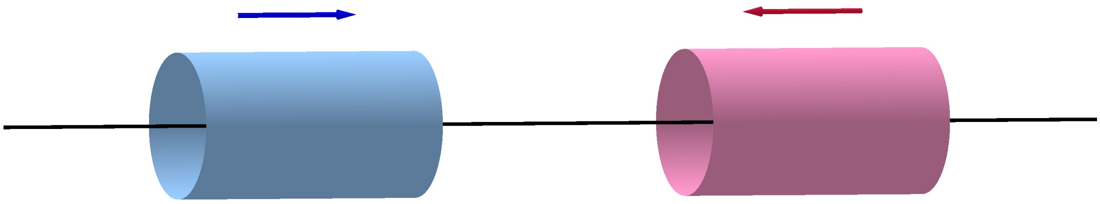
Dieses Phänomen heißt **Längenkontraktion**, *d.h. wörtlich "Längenzusammenziehung".*

Längen sind relativ!

Nach dem Relativitätsprinzip gilt natürlich auch Folgendes: Wird in einem System S eine Länge ℓ gemessen, so wird sie in einem System S', welches sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v bewegt, auf $\ell' = \frac{\ell}{\gamma}$ verkürzt. Die Gleichungen $\ell = \frac{\ell'}{\gamma}$ und $\ell' = \frac{\ell}{\gamma}$ sind natürlich wieder so zu lesen: *Auf der rechten Seite steht die Längenmessung desjenigen Beobachters, der relativ zur gemessenen Länge ruht.*

> **Relativität von Längen und Eigenlänge**
>
> *Längen in Bewegungsrichtung sind relativ. Von allen längs einer Richtung relativ zueinander bewegten Beobachtern misst derjenige für einen in Bewegungsrichtung liegenden Gegenstand die größte Länge, der relativ zu diesem Gegenstand ruht. Man nennt diese Länge die* **Ruhelänge** *oder* **Eigenlänge** *des Gegenstandes. Alle Längen senkrecht dazu unterliegen keiner Kontraktion.*

Die Aussage über die *Invarianz einer senkrecht zur Bewegungsrichtung liegenden Länge* lässt sich sehr schnell mit einem Gedankenexperiment beweisen: Stellen wir uns einen blauen und einen roten Hohlzylinder gleichen Durchmessers vor, die sich längs ihrer gemeinsamen Achse aufeinander zu bewegen und quer dazu schrumpfen sollen:



Begeben wir uns nun in das Bezugssystem, in welchem der blaue Hohlzylinder ruht, dann *muss der rote Hohlzylinder in Querrichtung schrumpfen* und in den blauen eindringen. Im Ruhesystem des roten Hohlzylinders *muss dagegen der blaue schrumpfen* und in den roten eindringen. Dies ist ein offenbarer Widerspruch; Längen in Querrichtung müssen somit unverändert bleiben.

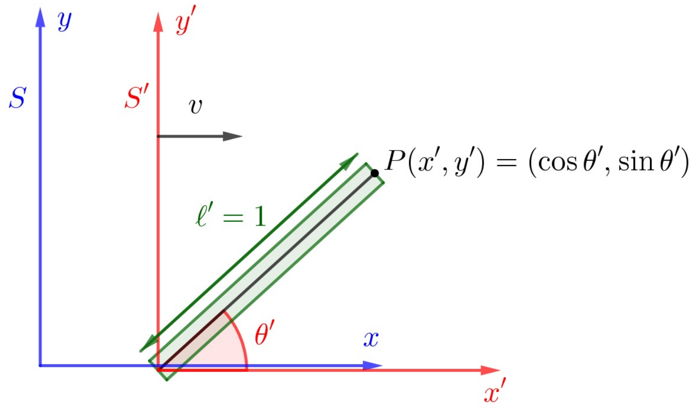
Zwei Beispiele zur Längenkontraktion

Kehren wir zunächst zum *Myonen*-Problem in der Erdatmosphäre zurück. Diesmal aber begeben wir uns in das Bezugssystem der Myonen. Die Halbwertszeit beträgt jetzt $1.5\,\mu\mathrm{s}$, aber nun *verkürzt sich der Weg durch die Erdatmosphäre* um den Faktor $\gamma \approx 10$ und aus einer $4.5\,\mathrm{km}$ langen Strecke wird eine $450\,\mathrm{m}$ kurze. Die ganze Atmosphäre der auf die Myonen zurasenden Erde ist viel geringer, daher schaffen viele Myonen den Weg bis zur Erdoberfläche.

Wie wenig die Längenkontraktion in der gegenwärtigen *Raumfahrt* von Bedeutung ist, zeigt folgende Rechnung. Bei einer Geschwindigkeit von $8.0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, also $\gamma \approx 1 + 3.6 \cdot 10^{-10}$, verringert sich der Erddurchmesser lediglich um $4.5\,\mathrm{mm}$ und selbst die Entfernung zum Mond wird nur um $14\,\mathrm{cm}$ kürzer.

Veränderung von Winkeln

Interessant ist auch, dass die Längenkontraktion parallel zur Bewegungsrichtung und die fehlende Längenkontraktion senkrecht dazu *Winkel verändert*: Der im S'-System ruhende Stab der Eigenlänge $\ell' = 1$ soll den Winkel θ' zur Bewegungsrichtung einschließen.



Wie groß ist aber der Winkel θ im S-System?

Das Ende des Stabes P hat die Koordinaten $(x', y') = (\cos\theta', \sin\theta')$. Im S-System unterliegt die x-Komponente der Stablänge der Längenkontraktion, die y-Komponente aber nicht; also lauten die Koordinaten von P im S-System $(x, y) = (\frac{\cos\theta'}{\gamma}, \sin\theta')$.

Damit ist der Tangens des Winkels θ im S-System um den Faktor γ grösser:

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta'} \qquad \text{und} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta'}{\frac{\cos\theta'}{\gamma}} = \gamma\,\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'} = \gamma\,\tan\theta'$$

Aus einem *quadratischen* Gitter im S'-System wird ein *rechteckiges* im S-System. Bei $\beta = 0.8$ ist $\gamma = \frac{5}{3}$ und alle Längen in Bewegungsrichtung sind auf $60\,\%$ ihrer Eigenlänge reduziert: