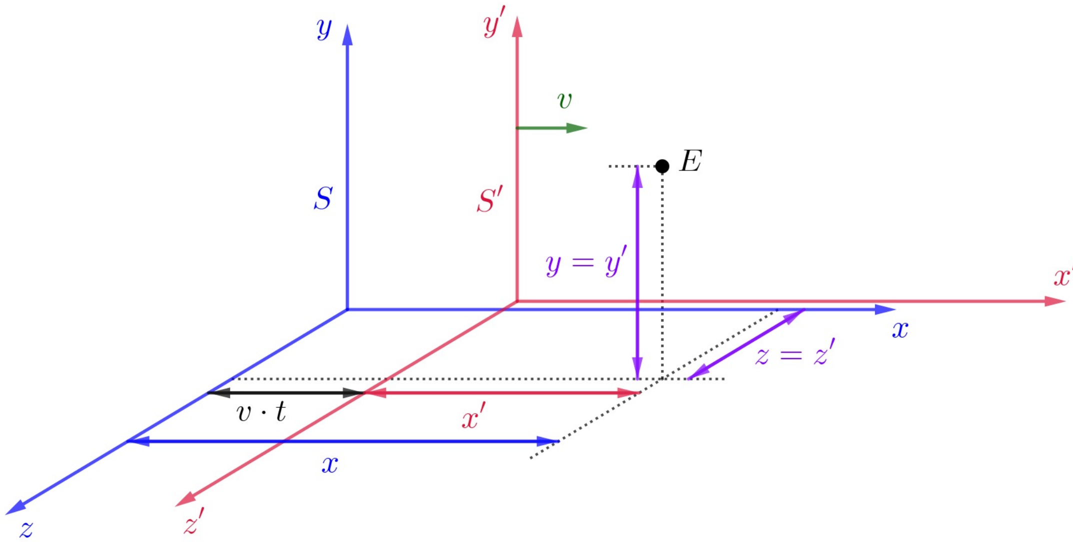
Die Herleitung der Lorentz-Transformation

Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch:
J. Freund: *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

Altbekannt: Die Galilei-Transformation der klassischen Mechanik

Wir brauchen für die rechnerische Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie häufig zwei inertiale Bezugssysteme: Das S-System mit den rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y und z und der Zeitkoordinate t und das S'-System mit den rechtwinkligen Koordinatenachsen x', y' und z' und der Zeitkoordinate t'. Beide Systeme sind achsenparallel (d.h. die x-Achse ist parallel zur x'-Achse usw.) und S' bewegt sich aus Sicht des S-Systems mit der konstanten Geschwindigkeit v in die positive Richtung der x-Achse. Wenn beide Koordinatenursprünge zusammenfallen, setzen wir $t = t' = 0$.



Ein *Ereignis* E ist irgendein *Punkt im vierdimensionalen Raumzeit-Kontinuum*, gegeben durch vier Zahlenwerte für die Variablen x, y, z und t. Ein Ereignis kann sehr spektakulär sein, wie ein Supernovaausbruch, oder recht unspektakulär, wie unser Lesen dieser Zeilen hier und jetzt. Sind für das S-System der Koordinatenursprung ($x = y = z = 0$) und der Beginn der Zeitzählung ($t = 0$) erst einmal festgelegt und ist bekannt, mit welcher Geschwindigkeit v längs der x-Achse sich das S'-System relativ zum S-System bewegt, dann stellt sich die Frage, welche Raum- und Zeitkoordinaten x', y', z' und t' das Ereignis E im S'-System hat:

$$E(t, x, y, z) \qquad \longrightarrow \qquad E(t', x', y', z') \quad ?$$

Das Problem hört sich zunächst recht trivial an, da die Umrechnung zwischen x und x' durch $x' = x - vt$ gegeben zu sein scheint und die y-, die z- und die t-Koordinaten unverändert bleiben. Damit die t-Koordinate nicht "aus dem Rahmen fällt" und wie die anderen drei Koordinaten die Dimension einer Länge bekommt, wird sie mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert.

Galilei-Transformation $S \to S'$ und -Rücktransformation $S' \to S$

= *Transformationen der Koordinaten eines Ereignisses zwischen zwei Inertialsystemen gemäss der klassischen (Newton'schen) Mechanik*

$$\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} ct &= ct' \\ x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{1}$$

Korrektur durch die Relativitätstheorie: die Lorentz-Transformation

Bei näherem Hinsehen wird aber klar, dass in der Galilei-Transformation ein Fehler gemacht wurde. Messungen von Längen in Richtung der Relativgeschwindigkeit v und Zeitmessungen können nicht einfach von einem System ins andere übernommen werden: Sie unterliegen der Längenkontraktion und der Zeitdilatation. Also gilt im S-System

$$\textit{nicht} \quad x' = x - vt \quad , \textit{sondern} \quad \frac{x'}{\gamma} = x - vt \quad ,$$

weil die im S'-System gemessene Länge x' im S-System auf $\frac{x'}{\gamma}$ kontrahiert wird. Nach Multiplikation mit γ schreiben wir:

$$x' = \gamma\,(x - vt) \tag{2}$$

Entsprechend im S'-System bei der Rücktransformation: Die Entfernung der beiden Koordinatenursprünge ist jetzt natürlich vt' und *nicht* mehr vt. Wegen des Relativitätsprinzips hat die Relativgeschwindigkeit allerdings in beiden Systemen den gleichen Betrag v. Es gilt nun aber *nicht*

$$x = x' + vt' \quad ,$$

sondern

$$\frac{x}{\gamma} = x' + vt' \qquad \text{resp.} \qquad x' = \frac{x}{\gamma} - vt' \quad , \tag{3}$$

weil die im S-System gemessene Länge x im S'-System auf $\frac{x}{\gamma}$ kontrahiert wird.

Aus dem Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für x' in (2) und (3) folgt nun für ct':

$$\begin{array}{lrll}
 & \gamma\,(x - vt) &= \dfrac{x}{\gamma} - vt' & \quad |\,\text{ausmultiplizieren} \\[2ex]
\Leftrightarrow & \gamma x - \gamma vt &= \dfrac{x}{\gamma} - vt' & \quad |\, -\gamma x + \gamma vt + vt' \\[2ex]
\Leftrightarrow & vt' &= \gamma vt - \gamma x + \dfrac{x}{\gamma} & \quad |\,\gamma \text{ ausklammern} \\[2ex]
\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - x + \dfrac{x}{\gamma^2}\right) & \quad |\,(-x) \text{ ausklammern} \\[2ex]
\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - x\left(1 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right)\right) & \quad |\,1 - \dfrac{1}{\gamma^2} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{1-\beta^2}} 1 - (1-\beta^2) = \beta^2 \\[2ex]
\Leftrightarrow & vt' &= \gamma\left(vt - \beta^2 x\right) & \quad |\ :\beta\,,\ \text{d.h.}\ \cdot\dfrac{1}{\beta}\ \text{resp.}\ \cdot\dfrac{c}{v} \\[2ex]
\Leftrightarrow & ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) &
\end{array}$$

Da die Relativbewegung keine y- und keine z-Komponente hat, bleiben diese Komponenten unverändert. Zusammenfassend gilt also:

Lorentz-Transformation $S \to S'$

= *Transformation der Koordinaten eines Ereignisses zwischen zwei Inertialsystemen gemäss der Speziellen Relativitätstheorie*

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\
x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen werden nach ihrem Entdecker *Lorentz-Transformation* genannt.

Die Lorentz-Transformation ist die relativistische Verallgemeinerung der Galilei-Transformation. Der revolutionäre Unterschied zur Galilei-Transformation besteht darin, dass die Zeit t im S-System nicht gleich der Zeit t' im S'-System ist.

Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ strebt β gegen 0 und γ gegen 1 (βc ist weiterhin v). In diesem Fall vereinfacht sich die Lorentz- zur Galilei-Transformation, wie man sofort sieht. Die Frage, ab welcher Geschwindigkeit denn die Lorentz-Transformation angewandt werden muss, hängt natürlich mit der gewünschten Genauigkeit des Rechenergebnisses zusammen. Wie wir bereits gesehen haben, sind für die gegenwärtige Luft- und Raumfahrt, auch die interplanetare, die Geschwindigkeiten so gering, dass auch nicht-relativistische Rechnungen typischerweise hinreichend genaue Ergebnisse liefern.

Symmetrie in der Lorentz-Transformation und Vereinfachung mittels $c \equiv 1$

In der Lorentz-Transformation (4) hängt die Zeit t' in ganz ähnlicher Weise von der Zeit t *und* von der Position x ab, wie auch die Position x' von x *und* t abhängt. Es taucht also eine ganz neuartige *Symmetrie zwischen Zeit und Position (oder Raum)* auf. Diese Symmetrie wird besonders gut sichtbar, wenn wir – durch Neudefinition der Einheiten, was man grundsätzlich darf (!) – die Lichtgeschwindigkeit c formal auf den Wert 1 setzen ($c \equiv 1$). Dann lautet die Lorentz-Transformation:

$$\textbf{Lorentz-Transformation mit } c = 1\textbf{:} \qquad \begin{aligned} t' &= \gamma\,(t - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{5}$$

In Rechnungen ist diese alternative Schreibweise (5) extrem praktisch, weil sie zum einen viel leichter zu memorieren ist und es sich zum anderen in aller Regel sowieso aufdrängt in Einheiten zu rechnen, die mit der Lichtgeschwindigkeit c arbeiten. Wir müssen uns einfach merken, dass Geschwindigkeiten stets als β angegeben werden und dass sich die Strecken- resp. Ortseinheit an der Zeiteinheit orientiert. Verwende ich als Zeiteinheit beispielsweise die *Sekunde* s, dann ist die Strecken- resp. Ortseinheit eben die *Lichtsekunde* $\mathrm{Ls} = c \cdot \mathrm{s}$.

Beispiel: System S' bewegt sich relativ zum System S mit $\beta = \frac{3}{5} = 0.6$ ($\Rightarrow \gamma = \frac{5}{4} = 1.25$). Welche Koordinaten (t', x') hat das Ereignis E_1 mit $(t, x) = (2\,\mathrm{s}, 10\,\mathrm{Ls})$ im gestrichenen System?

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta x) = \tfrac{5}{4}(2 - \tfrac{3}{5} \cdot 10) = \tfrac{5}{4}(2 - 6) = -5 \\ x' &= \gamma(x - \beta t) = \tfrac{5}{4}(10 - \tfrac{3}{5} \cdot 2) = \tfrac{5}{4}(10 - 1.2) = 11 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad (t', x') = (-5\,\mathrm{s}, 11\,\mathrm{Ls})$$

Die Lorentz-Rücktransformation

Es bleibt noch die *Lorentz-Rücktransformation*. Dazu denkt man sich das S-System mit dem S'-System vertauscht; dann bewegt sich das neue S-System mit der Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x'-Achse. Mathematisch bedeutet dies, dass alle Variablen mit Strich durch solche ohne Strich ersetzt werden müssen und umgekehrt und dass v durch $-v$ ersetzt werden muss, also auch β durch $-\beta$. Der Lorentzfaktor γ bleibt wegen dem Quadrat von β in seiner Berechnung gleich. Hier das Resultat:

Lorentz-Rücktransformation $S' \to S$

$$\begin{aligned} ct &= \gamma\,(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad \textit{resp. mit } c = 1\textit{:} \qquad \begin{aligned} t &= \gamma\,(t' + \beta x') \\ x &= \gamma\,(x' + \beta t') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{6}$$

Überprüfung von Zeitdilatation und Längenkontraktion

Als *Konsistenztest* für die Lorentz-Transformation wollen wir die Zeitdilatation daraus wieder herleiten.

Vorbemerkung zu Zeitspannen: Bis anhin waren wir in unserer Notation von *Zeitspannen* etwas salopp. So haben wir dafür bei der Herleitung der Zeitdilatation einfach t resp. t' geschrieben – eine Schreibweise, die eigentlich für *Zeitpunkte*, also für die Zeitkoordinaten von Ereignissen reserviert wäre. Eine Zeitspanne ist per Definition eine Differenz zweier Zeitpunkte. Wir sollten also besser schreiben:

$$\text{Zeitspanne} \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

Dabei sind t_1 und t_2 die Zeitkoordinaten zweier Ereignisse.

Die Zeitdilatationsgleichung für zwei Ereignisse E_1 und E_2, die im System S' am selben Ort (x', y', z'), aber zu unterschiedlichen Zeiten t'_1 und t'_2 stattfinden, müsste somit wie folgt notiert werden:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t' \qquad \text{mit} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1 \tag{7}$$

Hier ist Δt die im S-System gemessene Zeitspanne zwischen den Ereignissen E_1 und E_2, zu denen in S die Zeitkoordinaten t_1 und t_2 gehören. Achtung! Im S-System finden E_1 und E_2 nicht mehr am selben Ort statt, denn schliesslich bewegt sich S' ja relativ zu S.

Zeidilatation: Am selben Ort (x', y', z') sollen im S'-System zu unterschiedlichen Zeiten t'_1 und t'_2 die beiden Ereignisse E_1 und E_2 geschehen. Welchen zeitlichen Abstand haben sie im S-System? Man nimmt zweimal die erste Zeile der Lorentz-Rücktransformation (6) – einmal für ct_1 und einmal für ct_2 – und subtrahiert diese voneinander:

$$\begin{aligned}\Delta t = t_2 - t_1 &= \gamma\,(t'_2 + \beta x') - \gamma\,(t'_1 + \beta x') \\ &= \gamma\,(t'_2 - t'_1 + \beta x' - \beta x') = \gamma \cdot (t'_2 - t'_1) = \gamma \cdot \Delta t'\end{aligned}$$

Das ist genau die Zeitdilatationsgleichung (7).

Natürlich muss die Lorentz-Transformation auch die Information enthalten, dass sich die Zeitdilatation umdreht, wenn das S-System mit dem S'-System vertauscht wird.

Nun sollen also im S-System am gleichen Ort (x, y, z) zu den Zeiten t_1 und t_2 zwei Ereignisse E_1 und E_2 geschehen. Ihr zeitlicher Abstand im S'-System berechnet sich, indem man zweimal die erste Zeile der Lorentz-Transformation (4) nimmt und subtrahiert:

$$\begin{aligned}c\Delta t' = t'_2 - t'_1 &= \gamma\,(t_2 - \beta x) - \gamma\,(t_1 - \beta x) \\ &= \gamma\,(t_2 - t_1 - \beta x + \beta x) = \gamma \cdot (t_2 - t_1) = \gamma \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Ein im S-System ruhender Vorgang (E_1 und E_2 am selben Ort) benötigt im S'-System also mehr Zeit als im S-System.

Natürlich lässt sich in ähnlicher Manier auch die Längenkontraktion aus der Lorentztransformation ableiten. Dies zu tun delegieren wir an eine Übungsaufgabe...