Die Herleitung der Zeitdilatation

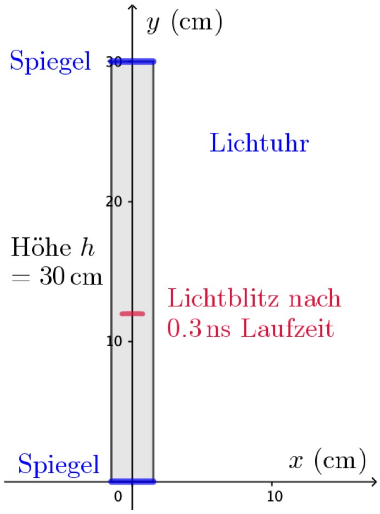
Dieser Text entstammt bis auf leichte textliche, grafische und formale Anpassungen dem Buch:
J. Freund: *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*, vdf (2007).

Die Lichtuhr

Eine *Lichtuhr* soll ein $30\,\mathrm{cm}$ hoher Kasten sein, der beidseitig mit einem perfekten Spiegel versehen ist. Am unteren Ende wird ein Lichtblitz gezündet, der dann beliebig oft zwischen den beiden Spiegeln hin und her reflektiert wird. Für eine Höhe braucht das Licht genau eine Nanosekunde:

$$t = \frac{h}{c} = \frac{30\,\mathrm{cm}}{3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{0.3\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{ns}$$

Immer wenn das Licht wieder einen Spiegel erreicht, geht ein in Nanosekunden geeichtes Zählwerk um eine Einheit weiter.



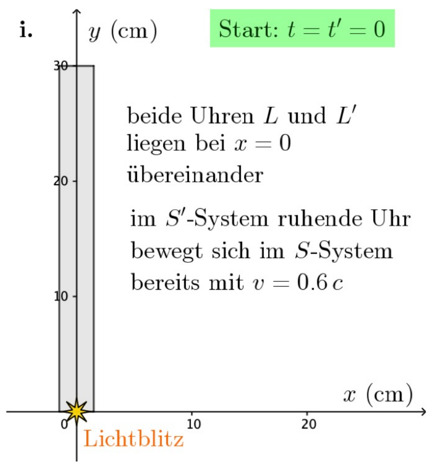
Ruhende und sich bewegende Lichtuhr im Vergleich

Wir betrachten zwei Inertialsysteme in Standardorientierung – System S' bewege sich aus der Sicht von System S mit der Geschwindigkeit $v = 0.6\,c$ ($\beta = \frac{3}{5} = 0.6$) in die positive Richtung der x-Achse.

In beiden Systemen soll bei $x = 0$ resp. $x' = 0$ je eine im jeweiligen System ruhende Lichtuhr L resp. L' liegen, die von $y_1 = y'_1 = 0\,\mathrm{m}$ bis $y_2 = y'_2 = 30\,\mathrm{cm}$ reichen.

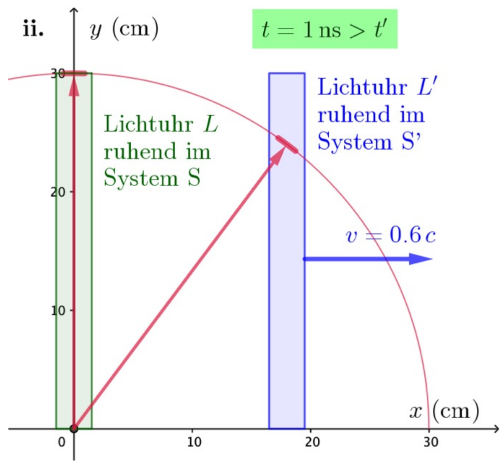
i. Unser Startereignis ist das Zusammenfallen der beiden Koordinatenursprünge: Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ wird am gemeinsamen Ort $(x, y, z) = (x', y', z') = (0, 0, 0)$ beider Koordinatenursprünge ein Lichtblitz gezündet, der die Zeitmessung *beider* Lichtuhren in Gang setzt.

   Von dort aus breitet sich gemäss dem Prinzip von der Universalität der Lichtgeschwindigkeit im S-System eine Licht-Kugelwelle in alle Richtungen gleich schnell aus.



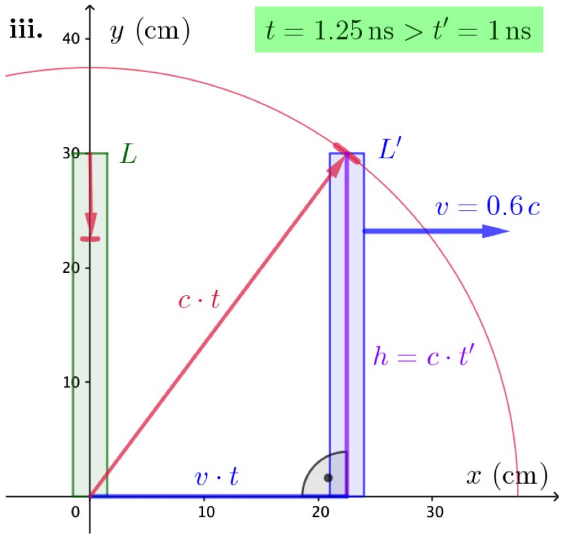
ii. Bei $t = 1\,\mathrm{ns}$ ist aus dem anfänglichen Lichtblitz eine Kugelwelle mit dem Radius $30\,\mathrm{cm}$ geworden. Der Koordinatenursprung von S' und damit die zugehörige Lichtuhr L' ist dann $18\,\mathrm{cm}$ weit nach rechts gewandert. Die Kugelwelle hat den oberen Spiegel der Lichtuhr L erreicht (eben: $t = 1\,\mathrm{ns}$), aber noch nicht den oberen Spiegel von L'!

   Also ist auf der Uhr L' erst die Zeit $t' < 1\,\mathrm{ns}$ verstrichen. Offenbar läuft die Uhr L' langsamer als die Uhr L – zumindest wenn wir den Vorgang aus dem System S der Lichtuhr L betrachten.



iii. Bei $t = 1.25\,\mathrm{ns}$ ist der Radius der Kugelwelle auf $37.5\,\mathrm{cm}$ angewachsen.
Die Lichtuhr L' befindet sich jetzt bei $x = 22.5\,\mathrm{cm}$ und die Kugelwelle hat ihren oberen Spiegel erreicht.
Voraussetzungsgemäß ist im S'-System genau jetzt die Zeit $t' = 1\,\mathrm{ns}$ verstrichen.
In der Lichtuhr L aber läuft der Lichtblitz schon zurück. Also muss $t > 1\,\mathrm{ns}$ sein – eben $t = 1.25\,\mathrm{ns}$.

Wir sehen erneut, dass aus der Sicht von System S die Zeit im S-System schneller abläuft als im S'-System.



Die Konsequenz: Zeitdilatation!

In Abbildung iii. oben sieht man sofort, dass mit dem Satz des Pythagoras der Zusammenhang

$$h^2 = (ct)^2 - (vt)^2$$

folgt: Nach einer bestimmten Zeit t, in der die Lichtuhr L' aus der Sicht von S mit der Geschwindigkeit v unterwegs war, hat die Kugelwelle endlich das obere Ende von L' erreicht.

Die Genialität der Einstein'schen Überlegung liegt darin, die Länge der stehenden Kathete h im System S' mit ct' gleichzusetzen statt mit $c't$. Letzteres wäre gesunder Menschenverstand gewesen, der gesagt hätte, die Lichtgeschwindigkeit c' im S'-System sei eben langsamer, nämlich $\sqrt{c^2 - v^2}$ statt c, dafür sei dort aber die gleiche Zeit t wie im S-System verstrichen. Einstein dagegen postuliert, dass die Lichtgeschwindigkeit c in beiden Systemen gleich groß ist. Daraus folgt zwingend, dass im S'-System die Zeit langsamer verstreicht als im S-System. Wir notieren und folgern also:

$$h^2 = (ct')^2 = (ct)^2 - (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 t'^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{t'^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad .$$

Die negative Lösung hat keine physikalische Bedeutung, also gilt:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad .$$

Der Wurzelbruch $1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ tritt in der SRT ständig auf. Daher definiert man:

$$\beta := \frac{v}{c} \qquad \text{und} \qquad \textbf{Lorentzfaktor} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad .$$

Ganz offenbar ist der *Lorentzfaktor* γ stets ≥ 1. Als Ergebnis unseres Gedankenexperimentes halten wir somit Folgendes fest:

Zeitdilatation

Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit v, so wird ein Vorgang (z.B. das Ticken einer Uhr), der in S' ruht und die Zeit t' dauert, für den Beobachter in S verlängert auf

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma t' \geq t' \tag{1}$$

Dieses Phänomen heißt **Zeitdilatation***, d.h. wörtlich Zeitverbreiterung oder Zeitdehnung.*

Die Relativität der Zeit

An dieser ganzen Überlegung ändert sich nichts, wenn der Ursprung des S'-Systems in y- oder z-Richtung verschoben wird. Damit hat man gleich den verallgemeinerten Fall berücksichtigt, nämlich den Vorbeiflug des S'-Systems am S-System in beliebiger Richtung.

Setzen wir das Gedankenexperiment fort: Für einen Beobachter im S'-System bewegt sich das S-System mit $v = -0.6\,c$ nach links. Die gleiche Überlegung ergibt nun, dass aus Sicht des S'-Systems ein Vorgang, der im S-System ruht und die Zeit t dauert, verlängert wird auf

$$t' = \gamma t \geq t$$

Dies muss wegen des Relativitätsprinzips auch so sein, andernfalls wäre eines der beiden Systeme ausgezeichnet. Daraus folgt eines der wichtigsten Ergebnisse:

> **Relativität der Zeit und Eigenzeit**
>
> *Zeit ist relativ. Von allen relativ zueinander bewegten Beobachtern misst derjenige für einen Vorgang die kürzeste Zeit, der relativ zum Ort dieses Vorganges ruht. Man nennt diese Zeit die* **Ruhezeit** *oder* **Eigenzeit** *des Vorganges. Sie wird häufig mit τ bezeichnet.*

An dieser Stelle sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Koexistenz der scheinbar widersprüchlichen Gleichungen $t = \gamma t'$ und $t' = \gamma t$ oft Kopfzerbrechen bereitet. Diese Gleichungen sind so zu verstehen: *Auf der rechten Seite steht die Eigenzeit eines Vorganges*, d.h. die Zeitdauer, die ein Beobachter misst, der relativ zum Ort dieses Vorganges ruht; auf der linken Seite steht die Zeitdauer, die ein Beobachter misst, der sich relativ dazu bewegt. Ganz explizit:

- In $t = \gamma t'$ ist t' die Eigenzeit eines Vorganges. Das S'-System ruht also relativ zu diesem Vorgang, das S-System bewegt sich relativ dazu.
- In $t' = \gamma t$ ist t die Eigenzeit eines Vorganges. Das S-System ruht also relativ zu diesem Vorgang, das S'-System bewegt sich relativ dazu.

Wenn sich also das S-System und das S'-System relativ zueinander bewegen, kann nur eines davon dasjenige sein, in welchem der betreffende Vorgang ruht. Damit ist eindeutig, welche der beiden Gleichungen zur Anwendung kommt.

Es stellt sich die Frage, ob die gerade ausgeführten Überlegungen nur für Lichtuhren gelten oder auch für mechanische, elektrische oder sonstige Uhren bzw. für nichtperiodische Vorgänge wie den radioaktiven Zerfall oder biologische Prozesse. Die Frage muss mit *Ja!* beantwortet werden. Gäbe es nämlich Abweichungen zwischen dem Zeitmaß einer Lichtuhr und dem Zeitmaß einer anderen relativ zu ihr ruhenden Uhr, so müssten diese Abweichungen von Inertialsystem zu Inertialsystem verschieden sein, um überhaupt erst entdeckt werden zu können. Dann aber gäbe es ein Inertialsystem, in welchem diese Abweichungen z.B. minimal wären. Dieses Inertialsystem wäre ein ausgezeichnetes System und damit ein Verstoß gegen das Relativitätsprinzip, also gegen eine der zwei Grundvoraussetzungen der ganzen Speziellen Relativitätstheorie. Wir merken uns:

> **Allgemeingültigkeit der Zeitdilatation**
>
> *Nicht nur Lichtuhren, sondern alle möglichen Uhren und Prozesse, d.h. wirklich alle Abläufe – physikalische, chemische, biologische, etc. – sind der Zeitdilatation unterworfen. Bewegt sich ein Prozess relativ zu mir, so läuft er für mich (als Beobachter in meinem Ruhesystem) langsamer ab, als wenn er relativ zu mir ruhen würde.*

Zeitdilatation im Myonen-Experiment von Rossi & Hall von 1941

Ein berühmt gewordener experimenteller Beweis für die Zeitdilatation betrifft die *Lebensdauer von Myonen*. Sie entstehen durch *kosmische Strahlung in der Hochatmosphäre* und haben gemäß der *radioaktiven Zerfallsgleichung*

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

eine *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ von $1.5\,\mu\mathrm{s}$, bevor sie in ein Elektron bzw. ein Positron und zwei Neutrinos zerfallen.

In der Zeit $t = T_{1/2} = 1.5\,\mu\mathrm{s}$ legen die Myonen, die fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs sind, eine Strecke von $450\,\mathrm{m}$ zurück. Also müsste sich ihre Intensität mit abnehmender Höhe ca. alle $450\,\mathrm{m}$ halbieren. Tatsächlich nimmt ihre Intensität aber sehr viel langsamer ab.

Der Grund ist die Zeitdilatation: Im sehr schnell bewegten System der Myonen vergeht die Zeit aus Sicht eines Erdbeobachters viel langsamer, die Halbwertszeit wird auf $\gamma T_{1/2}$ verlängert. Die genauen Zahlen sind: $v \approx 0.9952\,c$, also $\gamma \approx 10$. Für einen Erdbeobachter beträgt die Halbwertszeit somit $15\,\mu\mathrm{s}$, und die Myonen legen in dieser Zeit $4.5\,\mathrm{km}$ zurück.

Verlust der Uhrensynchronisation bei Bewegung

Ein ganz praktisches Problem im Zeitalter sehr genau gehender Atomuhren ist die Frage, *ob zwei Uhren, die an einem Ort synchronisiert werden, räumlich getrennt werden können, ohne dass die Synchronisation verloren geht*. Dazu stellen wir uns vor, dass die ruhende Uhr die Zeit t zeigt. Die andere Uhr, die mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s transportiert wird, zeigt die Zeit τ. Offenbar gilt:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad .$$

Da in Praxis stets $v \ll c$ ist, kann eine *Taylorentwicklung*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

der Wurzel durchgeführt werden, und man erhält

$$t \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cdot \tau \quad ,$$

also beträgt die Zeitdifferenz

$$t - \tau \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \tau$$

Da wir von kleinen Geschwindigkeiten $v \ll c$ ausgehen und somit sowieso $t \approx \tau$ ist, kann bei der Berechnung dieser Zeitdifferenz $t - \tau$ anstelle der Zeit τ der bewegten Uhr rechts auch die Zeit t der ruhenden Uhr eingesetzt werden:

$$t - \tau \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot t$$

Mit $v = \frac{s}{t}$ folgt daraus ($\sim$ steht für: "ist proportional zu"):

$$t - \tau \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{c^2 t^2} \cdot t = \frac{s^2}{2c^2 t} \sim \frac{1}{t}$$

Die Synchronisation geht also unvermeidlich verloren! Schließlich benötigt die Bewegung stets Zeit ($t > 0$). Je länger man sich aber Zeit lässt mit dem Transport über die Strecke s, je langsamer dieser also vonstatten geht, desto geringer wird die Zeitdifferenz zwischen den beiden Uhren.