**Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach**

# Serie 10: Erste Wahrscheinlichkeitsverteilungen – LÖSUNGEN

1. • *Die einfachst mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung*

   (a) Diese Überprüfung fällt denkbar leicht:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\bigg|_0^a = \frac{a}{a} - \frac{0}{a} = 1$$

   Im Prinzip haben wir ja einfach die Rechtecksfläche unter dem Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet. Ihre Höhe ist $\frac{1}{a}$ und ihre Länge $a$, sodass als Fläche automatisch $1$ herauskommt.

   (b) Diese Berechnung fällt auch nicht weiter schwer:

   $$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2a}\bigg|_0^a = \frac{a^2}{2a} - \frac{0}{2a} = \frac{a}{2}$$

   Dieses Resultat durfte nicht anders herauskommen, denn im statistischen Mittel muss unsere Ameise doch genau in der Mitte des Stabes zu finden sein.

   Ganz analog erhalten wir für den Erwartungswert des Ortsquadrates:

   $$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3a}\bigg|_0^a = \frac{a^3}{3a} - \frac{0}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

   (c) Für Varianz und Standardabweichung folgt:

   $$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{a}{2\sqrt{3}} \approx 29\,\% \cdot a$$

   (d) Für die Chance $p$, die Ameise auf einer zufälligen Fotografie innerhalb einer Standardabweichung um den Durchschnittswert zu finden, erhalten wir:

   $$p = \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\bigg|_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} = \frac{\langle x\rangle + \sigma - \langle x\rangle + \sigma}{a} = \frac{2\sigma}{a} = \frac{2\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 58\,\%$$

2. • *Der fallende Stein (vgl. Griffiths: Beispiel 1.1 und Aufgabe 1.2)*

   (a) Zunächst berechnen wir den mittleren quadratischen Wert:

   $$\langle x^2\rangle = \int_0^h x^2\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{x^2}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot \int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\bigg|_0^h = \frac{1}{5\sqrt{h}}h^{\frac{5}{2}} = \frac{h^2}{5}$$

   Daraus folgt nun die Varianz $\sigma^2$:

   $$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{h^2}{5} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h^2}{5} - \frac{h^2}{9} = \frac{(9-5)h^2}{45} = \frac{4h^2}{45}$$

   Die Wurzel aus diesem Resultat ergibt schließlich die Standardabweichung $\sigma$:

   $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{4h^2}{45}} = \frac{2h}{3\sqrt{5}} \approx 0.298\,h$$

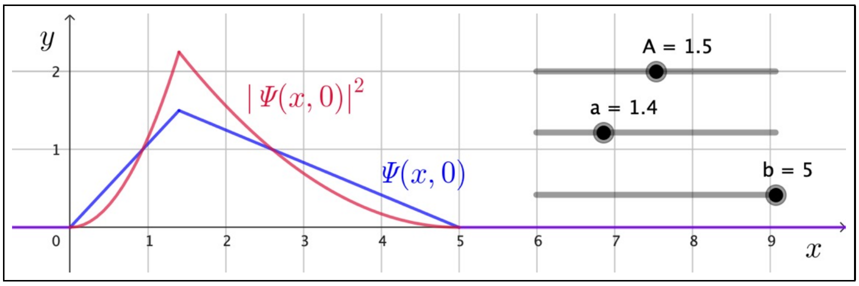
(b) Es ist geschickter mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen. D.h., wir eruieren, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein zufällig ausgewähltes Foto den Stein innerhalb einer Standardabweichung um den Mittelwert zeigt. Diese Gegenwahrscheinlichkeit beträgt:

$$\begin{aligned}\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{hx}} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left(\sqrt{\langle x\rangle+\sigma} - \sqrt{\langle x\rangle-\sigma}\right) \approx \sqrt{0.333+0.298} - \sqrt{0.333-0.298} \\ &\approx 0.607 = 60.7\,\%\end{aligned}$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit auf einem zufällig ausgewählten Foto den Stein außerhalb des Intervalls $[\langle x\rangle-\sigma;\langle x\rangle+\sigma]$ zu finden $39.3\,\%$.

3. •• *Eine erste, rein reellwertige Wellenfunktion*

i. Wir erhalten die folgenden Graphen:



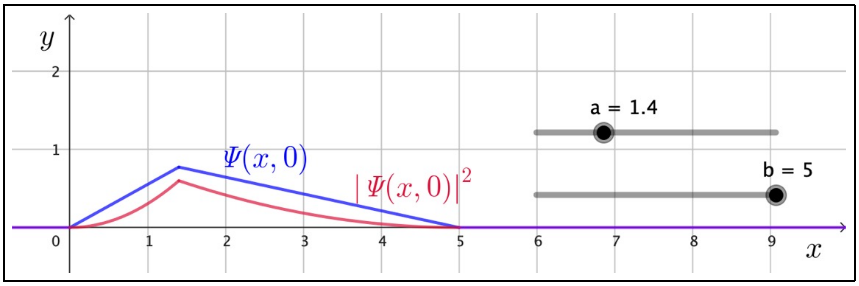

$\Psi(x,0)$ besteht also im von $0$ verschiedenen Teil aus zwei linearen Funktionen. Wo der $\Psi(x,0)$ einen Wert unter $1$ aufweist, ist das Betragsquadrat, also $|\Psi(x,0)|^2$, kleiner als $1$ (rote Kurve unterhalb blauer Gerade). Wir sehen gut, dass obiges $|\Psi(x,0)|^2$ noch keine Wahrscheinlichkeitsverteilung sein kann, denn die Fläche unter dem Graphen ist ganz offensichtlich grösser als $1$ (Häuschen).

ii. Nun die Lösungen der Teilaufgaben der Aufgabe 1.4 aus dem Griffiths:

(a) Ich normiere zuerst die Wellenfunktion. Das gibt einiges zu tun:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \frac{A^2x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{A^2(b-x)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{A^2}{a^2}\cdot\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x + \frac{A^2}{(b-a)^2}\cdot\int_a^b \left(b^2-2bx+x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{A^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2}\cdot\left[b^2x-bx^2+\frac{x^3}{3}\right]\Big|_a^b \\ &= \frac{A^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2}\cdot\left(b^3-b^3+\frac{b^3}{3}-b^2a+ba^2-\frac{a^3}{3}\right) \\ &= \frac{A^2a}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^3}{3}-b^2a+ba^2-\frac{a^3}{3}\right) \\ &= \frac{A^2a}{3} + \frac{A^2}{3(b-a)^2}\cdot\left(b^3-3b^2a+3ba^2-a^3\right) \\ &= \frac{A^2a}{3} + \frac{A^2}{3(b-a)^2}\cdot(b-a)^3 \\ &= \frac{A^2a}{3} + \frac{A^2(b-a)}{3} \\ &= \frac{A^2}{3}\cdot(a+b-a) = \frac{A^2b}{3} \stackrel{!}{=} 1 \quad\Rightarrow\quad A^2=\frac{3}{b} \quad\Rightarrow\quad A=\sqrt{\frac{3}{b}}\end{aligned}$$

(b) Im GeoGebra-File möchten wir nun $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$ anstelle des Schiebereglers für $A$ einsetzen. Das geht am einfachsten, wenn du in der Definition von $A$ direkt reinschreibst, dass $A$ neu gleich `sqrt(3/b)` sein soll. Dann verschwindet der Schieberegler für $A$ und die Grafik verändert sich sofort:




Jetzt ist ganz plausibel, dass die Fläche unter der roten Kurve von $|\Psi(x,0)|^2$ den Wert 1 hat.

(c) Die kurze, aber bereits ausreichende Antwort lautet: Am wahrscheinlichsten ist das Teilchen bei der Stelle $a$ anzutreffen, denn dort ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,0)|^2$ am grössten.

(d) Die Wahrscheinlichkeit $P_{[0;a]}$ das Teilchen im Intervall $[0;a]$ anzutreffen, beträgt:

$$P_{[0;a]} = \int_0^a |\Psi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{3x^2}{ba^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{a^2 b}\cdot\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{a^2 b}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{a}{b}$$

Das passt bestens, denn für $b = a$ ergibt sich $P_{[0;a]} = 1 = 100\,\%$, was ja so sein muss, wenn $a$ mit dem rechten Rand des überhaupt möglichen Bereiches zusammenfällt. Und wenn $a$ in der Mitte des Intervalls $[0;b]$ sitzt, wenn also $b = 2a$ ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen links von $a$ zu finden ist, eben $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

(e) Wie angekündigt, gibt die Berechnung des Erwartungswertes von $x$ einiges zu tun:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^a x\left(\sqrt{\frac{3}{b}}\cdot\frac{x}{a}\right)^2\mathrm{d}x + \int_a^b x\left(\sqrt{\frac{3}{b}}\cdot\frac{b-x}{b-a}\right)^2\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{b}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x(b-x)^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{3}{b}\cdot\left(\frac{1}{a^2}\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \left(b^2x - 2bx^2 + x^3\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{3}{b}\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^a + \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^2x^2}{2} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_a^b\right)\\
&= \frac{3}{b}\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^4}{4} + \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^4}{2} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{4} - \frac{b^2a^2}{2} + \frac{2ba^3}{3} - \frac{a^4}{4}\right)\right)\\
&= \frac{3}{b}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{b^4 - 6b^2a^2 + 8ba^3 - 3a^4}{12}\right)\\
&= \frac{3}{b}\left(\frac{3a^2(b-a)^2}{12(b-a)^2} + \frac{b^4 - 6b^2a^2 + 8ba^3 - 3a^4}{12(b-a)^2}\right)\\
&= \frac{3}{b}\cdot\frac{3a^2b^2 - 6a^3b + 3a^4 + b^4 - 6b^2a^2 + 8ba^3 - 3a^4}{12(b-a)^2} = \frac{b^4 - 3a^2b^2 + 2a^3b}{4b(b-a)^2}\\
&= \frac{b^3 - 3a^2b + 2a^3}{4(b-a)^2} = \frac{(b-a)(b^2 + ab - 2a^2)}{4(b-a)^2} = \frac{b^2 + ab - 2a^2}{4(b-a)} = \frac{(b-a)(b+2a)}{4(b-a)} = \frac{b+2a}{4}
\end{aligned}$$

Schwierig ist die algebraische Zusammenfassung nach dem Integrieren. Dabei muss man zweimal den Faktor $(b-a)$ kürzen. Der Nenner $(b-a)^2$ führt uns fast automatisch auf diese Idee.
Auch dieses Resultat ist sinnvoll! Z.B. ist für $b = 2a$ der Erwartungswert $\langle x\rangle = \frac{2a+2a}{4} = a$, was aus Symmetriegründen sicher so sein muss. Und für $a = b$ ergibt sich $\langle x\rangle = \frac{b+2b}{4} = \frac{3b}{4}$, d.h., der Erwartungswert befindet sich erwartungsgemäss näher bei $b$. Symmetrisch dazu erhalten wir für $a = 0$ den Erwartungswert $\langle x\rangle = \frac{b}{4}$.