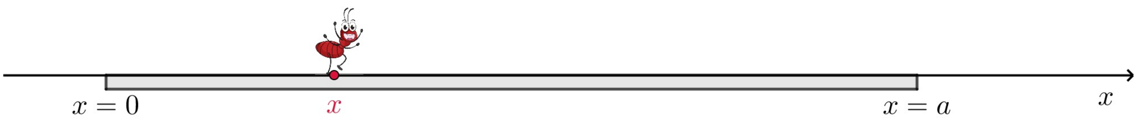
Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 10: Erste Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ○ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ○○ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. • *Die einfachst mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung*

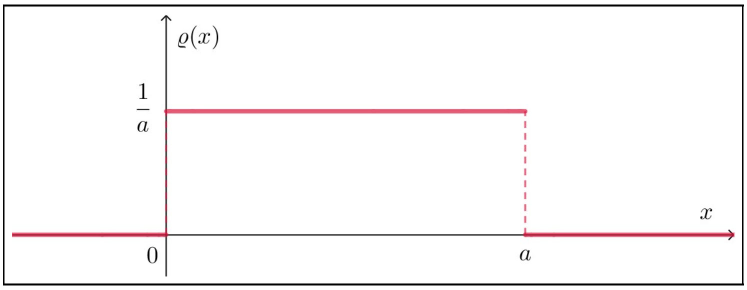
Wir stellen uns eine Ameise (= Punkt) vor, die auf einem Stab der Länge a "gefangen" ist. Ständig spaziert sie mit konstanter Geschwindigkeit zwischen den beiden Enden hin und her, sodass jeder Aufenthaltsort gleich wahrscheinlich ist, wenn wir in einem zufälligen Moment mit einer Kamera eine Aufnahme machen.



Somit können wir für die örtliche Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ notieren:

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei kommt in $\frac{1}{a}$ zum Ausdruck, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 $(= 100\,\%)$ gleichmässig auf die Länge a verteilt wird. Hier der ganz einfache Graph dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung:



(a) Überprüfe die **Normierung** dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung, also dass Gleichung (1.16) aus dem QM-Buch von Griffiths zutrifft.
Tipp: Da $\varrho(x)$ nur zwischen 0 und a verschieden von 0 ist, gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Bestimme den **Erwartungswert (= Durchschnittswert) des Ortes** $\langle x \rangle$, sowie den **mittleren quadratischen Ort** $\langle x^2 \rangle$, also:

$$\langle x \rangle = \int_0^a x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Gib nun mittels der Resultate aus (b) und (c) die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung an, indem du ausnützt, dass $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

(d) Ermittle die Chance p, die Ameise auf einer zufälligen Fotografie zwischen den beiden Stellen $x_1 = \langle x \rangle - \sigma$ und $x_2 = \langle x \rangle + \sigma$ zu finden.

2. • *Der fallende Stein (vgl. Griffiths: Beispiel 1.1 und Aufgabe 1.2)*

   Löse die **Aufgabe 1.2 auf Seite 33 im QM-Buch von Griffiths**. Hier ein paar Anmerkungen/Hinweise:

   - Zu (a): Die Standardabweichung sollte man aus $\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ berechnen. Dabei ist $\langle x\rangle = \frac{h}{3} \approx 0.333\,h$ ja bereits bekannt.
   - Die Lösung von (a) lautet: $\sigma = \frac{2h}{3\sqrt{5}} \approx 0.298\,h$.
   - Zu (b): Wofür steht das Integral $\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x$?
   - Berechne bei (b) die Lösung nicht exakt, sondern lediglich auf 1 Nachkommastelle in Prozenten.

3. •• *Zum ersten Mal eine Wellenfunktion – wenn auch zunächst keine besonders bedeutsame*

   Die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschreibt den Zustand eines Teilchens zu jedem Zeitpunkt t. In **Aufgabe 1.4 im Griffiths** (S. 35) wird ein solches $\Psi(x,t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ vorgegeben:

   $$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\cdot\frac{x}{a} & \text{für } 0\le x\le a \\ A\cdot\frac{b-x}{b-a} & \text{für } a\le x\le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad |\Psi(x,0)|^2 = \begin{cases} A^2\cdot\frac{x^2}{a^2} & \text{für } 0\le x\le a \\ A^2\cdot\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} & \text{für } a\le x\le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Das Betragsquadrat $|\Psi(x,t)|^2$ steht für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung resp. -dichte. Da $\Psi(x,0)$ hier rein reellwertig ist, ist $|\Psi(x,0)|^2$ sehr leicht zu berechnen – wir müssen lediglich quadrieren, wie oben rechts gezeigt, denn für eine reelle Zahl r gilt stets: $|r|^2 = r^2$.

   i. Weil $\Psi(x,0)$ (und nicht erst $|\Psi(x,0)|^2$) eine reellwertige Funktion von x ist, können wir den zugehörigen Graphen auf die gewohnte Weise skizzieren. Mache das in `GeoGebra`. Definiere dazu zuerst drei Schieberegler A, a und b, sodass sich $\Psi(x,0)$ und $|\Psi(x,0)|^2$ hinterher dynamisch verändern lassen. Eine auf ein Intervall eingeschränkte Funktion gibt man mit dem Befehl `Funktion(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>)` ein, z.B.:

      Funktion $\Psi(x,0)$ über dem Intervall $[0,a]$: `Funktion(A*x/a,0,a)`

   ii. Löse nun die Aufgabe 1.4 im Griffiths. Hier ein paar Anmerkungen und Tipps:

      Zu (a): Die Normierung ist bereits anspruchsvoll. Zwei Integrale über $|\Psi(x,0)|^2$ sind zu berechnen und dann zu addieren:

      $$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^a |\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 1$$

      Ziehe zugunsten der Übersichtlichkeit jeweils möglichst viele multiplikative Konstanten vor das Integral (im einen Fall $\frac{A^2}{a^2}$, im anderen $\frac{A^2}{(b-a)^2}$).
      Die Addition der beiden Integrale ist algebraisch aufwändig. Verwende dabei:

      $$b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3 = (b-a)^3$$

      Zu (b): Das hast du oben eigentlich bereits erledigt; ersetze jetzt aber in den Funktionsdefinitionen noch den Parameter A durch den in (a) gefundenen Ausdruck. Spiele danach mit den Parametern a und b und schaue, wie sich die Graphen verändern.

      Zu (e): Ein Reminder vorneweg:

      $$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot|\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^a x\cdot|\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b x\cdot|\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x$$

      Wiederum gibt es ein Integral von 0 bis a und eines von a bis b zu berechnen.
      Das Resultat lautet $\langle x\rangle = \frac{b+2a}{4}$ – sicher ein Erfolgserlebnis, wenn du das hinbekommst!