Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 12: Unendlich tiefer Potentialtopf und separierbare Lösungen – LÖSUNGEN

1. •• *Zum Verständnis stationärer Zustände*

   (a) Die separierbaren Lösungen der Schrödinger-Gleichungen haben die Eigenschaft, dass die Erwartungswerte beliebiger Größen Q konstant bleiben, also stationär sind. Daher werden diese Lösungen auch als **stationäre Zustände** bezeichnet.
   Diese Unveränderlichkeit der Erwartungswerte können wir leicht verifizieren:

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^*(x,t)\,\widehat{Q}\,\Psi_n(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\,e^{\mathrm{i}E_nt/\hbar}\,\widehat{Q}\Big(\psi_n(x)\,e^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{\mathrm{i}E_nt/\hbar}\,e^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}}_{=1}\cdot\psi_n^*(x)\,\widehat{Q}\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\,\widehat{Q}\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \text{konst. bzgl. } t\end{aligned}$$

   Dabei dürfen die zeitabhängigen Exponentialterme im Integral vor die anderen Glieder gezogen werden, weil der Operator $\widehat{Q}$ keine Ableitung nach der Zeit enthält.

   (b) Ein Teilchen befinde sich im stationären Zustand $\Psi_n(x,t)$. Was stimmt, was nicht? Weshalb?

      i. Dieser stationäre Zustand entspricht einer separierbaren Lösung der Schrödinger-Gleichung und weist eine ganz bestimmte Gesamtenergie E auf.
      Stimmt! Stationär zu sein ist ja gerade das, was eine separierbare Lösung der Schrödinger-Gleichung auszeichnet. Die zugehörige Gesamtenergie entspricht der Separationskonstante.

      ii. Die Erwartungswerte aller physikalischen Größen sind zeitlich konstant.
      Stimmt! Das gilt, weil sich das Teilchen in einem reinen stationären Zustand befindet. Allgemein würden sich die verschiedenen Erwartungswerte mit der Zeit schon verändern.

      iii. Messe ich den Ort x des Teilchens, so ergibt sich ein ganz bestimmter Wert x_n, der durch den aus $\Psi_n(x,t)$ berechneten Erwartungswert $\langle x\rangle$ vorausgesagt wird.
      Falsch! Den Ort eines Teilchens kennen wir nicht genau. Er bleibt bis zur Messung unbestimmt und es gibt aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation stets eine Streuung.

      iv. Messe ich die Gesamtenergie E des Teilchens, so ergibt sich ein ganz bestimmter Wert E_n, der durch den Erwartungswert $\langle E\rangle$ vorausgesagt wird.
      Stimmt! Der stationäre Zustand gibt seine Gesamtenergie ganz genau vor. Die Streuung beträgt 0. Jede Messung der Gesamtenergie muss genau diesen E-Wert ergeben.

   (c) Ein Teilchen befinde sich im Zustand $\Psi(x,t)$, der eine Linearkombination mehrerer stationärer Zustände sein soll. Was sagst du zur folgenden Behauptung: "Alle aus $\Psi(x,t)$ berechneten Erwartungswerte sind zeitlich konstant."
   Diese Behauptung ist **falsch!** Das ist ja genau der Punkt: Befindet sich ein Teilchen in einem *reinen* stationären Zustand $\Psi_n(x,t)$, so sind alle Erwartungswerte konstant. Bei einer Linearkombination mehrerer stationärer Zustände hingegen sind die Erwartungswerte zeitabhängig.

2. • *Zwei Rechnungen mit der Euler-Schreibweise für Sinus und Cosinus*

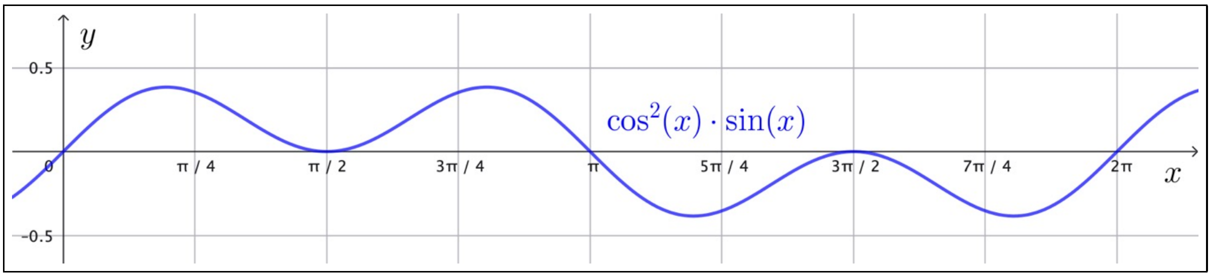
   (a) Wir gehen fast genau gleich vor wie im gezeigten Beispiel:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{e^{2\mathrm{i}x}-2e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x}+e^{-2\mathrm{i}x}}{-4} = \frac{e^{2\mathrm{i}x}-2+e^{-2\mathrm{i}x}}{-4} \\ &= \frac{2}{4}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\mathrm{i}x}+e^{-2\mathrm{i}x}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$

(b) Wir wandeln in die Euler-Schreibweise um, multiplizieren geschickt aus, sortieren dann nach verschiedenen Potenzen von e und gruppieren neu, wobei wir das Ziel im Auge behalten:

$$\begin{aligned}\cos^2 x \sin x &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 \cdot \frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)\left(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}\right) \\ &= \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)\left(e^{2\mathrm{i}x}-e^{-2\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{3\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}-e^{-3\mathrm{i}x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3\mathrm{i}x}-e^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}+\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sin(3x)+\sin x\right)\end{aligned}$$

N.B.: Von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die dritte binomische Formel verwendet. Grafisch sieht $\cos^2 x \sin x$ folgendermassen aus:

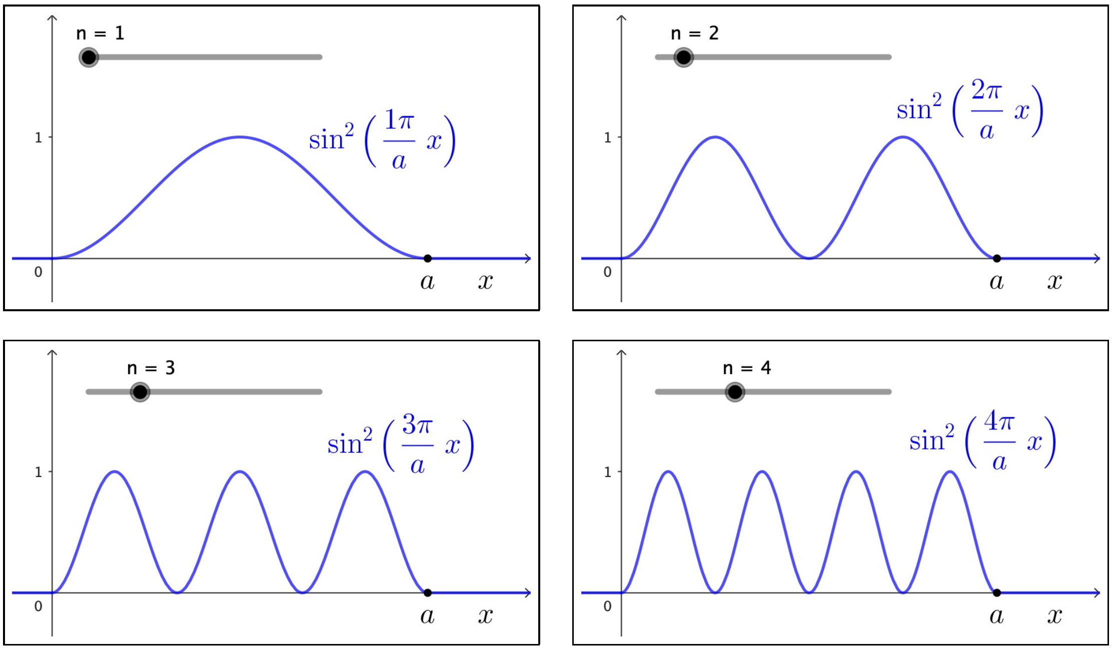


3. •• *Orthonormalität der $\psi_n(x)$ im unendlich tiefen Potentialtopf*

(a) Betrachten wir das Betragsquadrat der in den $\psi_n(x)$ enthaltenen Sinusfunktionen:

$$\sin(k_n x) \quad \Rightarrow \quad |\sin(k_n x)|^2 = \sin^2(k_n x) \qquad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}$$

und führen uns dieses für die ersten paar n explizit vor Augen:



Es handelt sich immer um dieselbe Sinusfunktion, die allerdings bei grösserem n horizontal immer mehr gestaucht ist. So ist die Fläche unter einem "Zacken" bei $n = 4$ beispielsweise nur noch ein Viertel der Fläche unter dem Bauch bei $n = 1$. Dafür gibt es nun allerdings vier solche Zacken im Gegensatz zu dem einen Bauch, sodass die Fläche unter der Kurve insgesamt gleich bleibt. Folglich muss für alle n mit demselben Faktor normiert – also vertikal gestreckt – werden, damit die Fläche unter dem Graphen gleich 1 wird.

(b) Bevor wir die ganze Rechnung angehen, überzeugen wir uns von der Richtigkeit der in der Aufgabenstellung unter i. vorgestellten trigonometrischen Identität. Dazu verwenden wir die Euler-Schreibweisen für Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{m\pi}{a}\,x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right) &= 2\cdot\frac{e^{\mathrm{i}m\pi x/a}-e^{-\mathrm{i}m\pi x/a}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}n\pi x/a}-e^{-\mathrm{i}n\pi x/a}}{2\mathrm{i}} \\
&= 2\cdot\frac{e^{\mathrm{i}(m+n)\pi x/a}-e^{\mathrm{i}(m-n)\pi x/a}-e^{\mathrm{i}(-m+n)\pi x/a}+e^{\mathrm{i}(-m-n)\pi x/a}}{-4} \\
&= \frac{-e^{\mathrm{i}(m+n)\pi x/a}+e^{\mathrm{i}(m-n)\pi x/a}+e^{-\mathrm{i}(m-n)\pi x/a}-e^{-\mathrm{i}(m+n)\pi x/a}}{2} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}(m-n)\pi x/a}+e^{-\mathrm{i}(m-n)\pi x/a}}{2}-\frac{e^{\mathrm{i}(m+n)\pi x/a}+e^{-\mathrm{i}(m+n)\pi x/a}}{2} \\
&= \cos\left(\frac{m-n}{a}\,\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\,\pi x\right) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Nun können wir den Orthonormalitätsbeweis angehen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}\,x\right)\,\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{a}\cdot\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}\,x\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}\,x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\cdot\int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\,\pi x\right)-\cos\left(\frac{m+n}{a}\,\pi x\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\cdot\left[\int_0^a \cos\left(\frac{m-n}{a}\,\pi x\right)\mathrm{d}x-\int_0^a \cos\left(\frac{m+n}{a}\,\pi x\right)\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Mit $k=\frac{(m\pm n)\pi}{a}$ können wir die unter ii. beschriebene "umgekehrte Kettenregel" direkt auf die beiden Integrale anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos\left(\frac{m\pm n}{a}\,\pi x\right)\mathrm{d}x = \int_0^a \cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{k}\cdot\big[\sin(kx)\big]\Big|_0^a \\
&\overset{*}{=} \frac{a}{(m\pm n)\pi}\left(\sin\left(\frac{(m\pm n)\pi}{a}\cdot a\right)-\sin\left(\frac{(m\pm n)\pi}{a}\cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{a}{(m\pm n)\pi}\Big(\sin\big((m\pm n)\pi\big)-\sin(0)\Big) \\
&= \frac{a}{(m\pm n)\pi}\cdot\sin\big((m\pm n)\pi\big)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Fortsetzung obiger Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \;\ldots\; &= \frac{1}{a}\cdot\left[\int_0^a \cos\left(\frac{m-n}{a}\,\pi x\right)\mathrm{d}x-\int_0^a \cos\left(\frac{m+n}{a}\,\pi x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{a}\cdot\left[\frac{a}{(m-n)\pi}\cdot\sin\big((m-n)\pi\big)-\frac{a}{(m+n)\pi}\cdot\sin\big((m+n)\pi\big)\right] \\
&= \frac{\sin\big((m-n)\pi\big)}{(m-n)\pi}-\frac{\sin\big((m+n)\pi\big)}{(m+n)\pi}
\end{aligned}$$

Für $m,n\in\mathbb{N}$ und $m\neq n$ sind $m-n$ und $m+n$ von 0 verschiedene ganze Zahlen. Dann gilt:

$$\sin\big((m-n)\pi\big)=0 \quad \text{und} \quad \sin\big((m+n)\pi\big)=0 \quad \text{denn:} \quad \sin(k\pi)=0 \quad \text{für alle } k\in\mathbb{Z}$$

Folglich ergibt sich für $m \neq n$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x)\, \psi_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\sin\big((m-n)\pi\big)}{(m-n)\pi} - \frac{\sin\big((m+n)\pi\big)}{(m+n)\pi} = 0 - 0 = 0$$

Problematisch wird es für $m = n$ beim Schritt $*$ in der Rechnung weiter oben. Dann entsteht nämlich beim ersten Integral der Vorfaktor $\frac{a}{(m-n)\pi}$, dessen Nenner im Fall $m = n$ gleich 0 wäre.
Im Fall $m = n$ müssten wir demnach separat anschauen, was bei der Rechnung herauskommt. Das ist aber gar nicht mehr nötig, denn wir wissen von der Normierung her bereits, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\, \psi_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\, \mathrm{d}x = 1$$

ist. Nun können wir das Resultat übersichtlich zusammenfassen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x)\, \psi_n(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}$$

Dabei ist δ_{mn} das sogenannte **Kronecker-Symbol**, das für $m = n$ den Wert 1 hat und für $m \neq n$ gleich 0 ist. Damit haben wir nun die Orthonormalität der Ortsanteile der separierbaren Lösungen im unendlich tiefen Potentialtopf überprüft.

4. ○ *Allgemeines zu Linearkombinationen separierbarer Lösungen*

(a) Wir können die Linearkombination in die linke Seite der Schrödinger-Gleichung einsetzen und dann zeigen, dass aufgrund der Tatsache, dass $\varPsi_1(x,t)$ und $\varPsi_2(x,t)$ die Schrödinger-Gleichung erfüllen, nun auch für $\varPsi(x,t)$ die rechte Seite der Schrödinger-Gleichung entsteht. Dabei benutzen wir die Ableitungsregel für Funktionssummen ($[f+g]' = f' + g'$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\varPsi}{\partial t} &= \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial(\overbrace{c_1\,\varPsi_1 + c_2\,\varPsi_2}^{=\varPsi})}{\partial t} = c_1\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\varPsi_1}{\partial t} + c_2\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\,\varPsi_2}{\partial t} \\
&= c_1\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\varPsi_1}{\partial x^2} + V\,\varPsi_1\right) + c_2\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\varPsi_2}{\partial x^2} + V\,\varPsi_2\right) \\
&= -c_1\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\varPsi_1}{\partial x^2} - c_2\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\varPsi_2}{\partial x^2} + c_1 V\,\varPsi_1 + c_2 V\,\varPsi_2 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2(\overbrace{c_1\,\varPsi_1 + c_2\,\varPsi_2}^{=\varPsi})}{\partial x^2} + V(\overbrace{c_1\,\varPsi_1 + c_2\,\varPsi_2}^{=\varPsi}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\,\varPsi}{\partial^2 x} + V\,\varPsi \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(b) Das Ortsintegral über das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\varPsi(x,t)$ muss 1 ergeben. Dank der Orthonormalität der $\varPsi_n(x,t)$ kann dieses Integral gut vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\varPsi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varPsi^*(x,t)\,\varPsi(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} c_m^*\,\varPsi_m^*\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\,\varPsi_n\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(c_1^*\,\varPsi_1^* + c_2^*\,\varPsi_2^* + \ldots\big)\big(c_1\,\varPsi_1 + c_2\,\varPsi_2 + \ldots\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(c_1^* c_1\,\varPsi_1^*\,\varPsi_1 + c_2^* c_2\,\varPsi_2^*\,\varPsi_2 + \ldots\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^* c_n\,\varPsi_n^*\,\varPsi_n\Big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass das Integral über jeden einzelnen der unendlich vielen Terme der Form $c_m^* c_n\,\varPsi_m^*\,\varPsi_n$ mit $m \neq n$ wegen der Orthonormalität der $\varPsi_n(x,t)$ den Wert 0 hat. (Die c_m^* und c_n sind dabei nur multiplikative Konstanten.) Nur die Glieder mit $m = n$ bleiben stehen. Genau deshalb vereinfacht sich das Integral von der zweiten zur dritten Zeile oben so drastisch.

Nun setzen wir fort, indem wir die Summe vor das Integral ziehen (Summenregel für Integrale). auch die $c_n^* c_n$ können als multiplikative Konstanten vor das Integral genommen werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(c_n^* c_n \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* \Psi_n \,\mathrm{d}x}_{=1} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^* c_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \overset{!}{=} 1$$

Somit haben wir eine Bedingung für die (komplexen) Koeffizienten c_n erhalten:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \ldots \overset{!}{=} 1$$

(c) Wie wir nun erfahren haben, muss gelten:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Da c_1 und c_2 positiv und reell sein sollen, können wir die Betragsstriche weglassen. Wir setzen $c = c_1 = c_2$, denn $\Psi_1(x,t)$ und $\Psi_2(x,t)$ sollen gleich stark in der Linearkombination vertreten sein. Es folgt:

$$c^2 + c^2 = 2c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. •• *Erst die Linearkombination bewegt das Teilchen!*

(a) Wir berechnen Schritt für Schritt ($c_1, c_2, \psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t) = \left(c_1\psi_1 e^{\mathrm{i}E_1 t/\hbar} + c_2\psi_2 e^{\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\right)\left(c_1\psi_1 e^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar} + c_2\psi_2 e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\right) \\
&= c_1^2\psi_1^2\, e^{\mathrm{i}E_1 t/\hbar}\, e^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar} + c_2^2\psi_2^2\, e^{\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\, e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar} \\
&\qquad + c_1c_2\psi_1\psi_2\, e^{\mathrm{i}E_1 t/\hbar}\, e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar} + c_1c_2\psi_1\psi_2\, e^{\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\, e^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar} \\
&= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + c_1c_2\psi_1\psi_2 \left(e^{\mathrm{i}(E_1-E_2)t/\hbar} + e^{\mathrm{i}(E_2-E_1)t/\hbar}\right) \\
&= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + c_1c_2\psi_1\psi_2 \left(e^{-\mathrm{i}(E_2-E_1)t/\hbar} + e^{\mathrm{i}(E_2-E_1)t/\hbar}\right) \\
&= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + 2c_1c_2\psi_1\psi_2 \cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\, t\right)
\end{aligned}$$

Neben den konstanten Gliedern $c_1^2\psi_1^2$ und $c_2^2\psi_2^2$ gibt es in der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,t)|^2$ auch einen Anteil $2c_1c_2\psi_1\psi_2 \cos(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\, t)$, der in Abhängigkeit von der Zeit t sinusförmig hin und her schwingt. Dabei beträgt die Kreisfrequenz $\frac{E_2-E_1}{\hbar}$.

(b) Wir wollen unser Resultat aus (a) verwenden. Mit den Angaben zum Grundzustand und zum ersten angeregten Zustand des unendlich tiefen Potentialtopfs bemerken wir zuerst:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \qquad \text{und} \qquad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a} \cdot x\right)$$

Sind Ψ_1 und Ψ_2 gleich stark in Ψ vertreten, so ist $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und wir können direkt das Resultat aus (a) verwenden, um den Gesamtzustand einigermassen übersichtlich zusammengefasst zu notieren:

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + 2c_1c_2\psi_1\psi_2 \cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar} \cdot t\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\, t\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\sin^2(kx) + \sin^2(2kx) + 2\sin(kx)\sin(2kx)\cos(\omega t)\right) \qquad \text{mit} \quad k = \frac{\pi}{a}\,, \;\; \omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar}
\end{aligned}$$

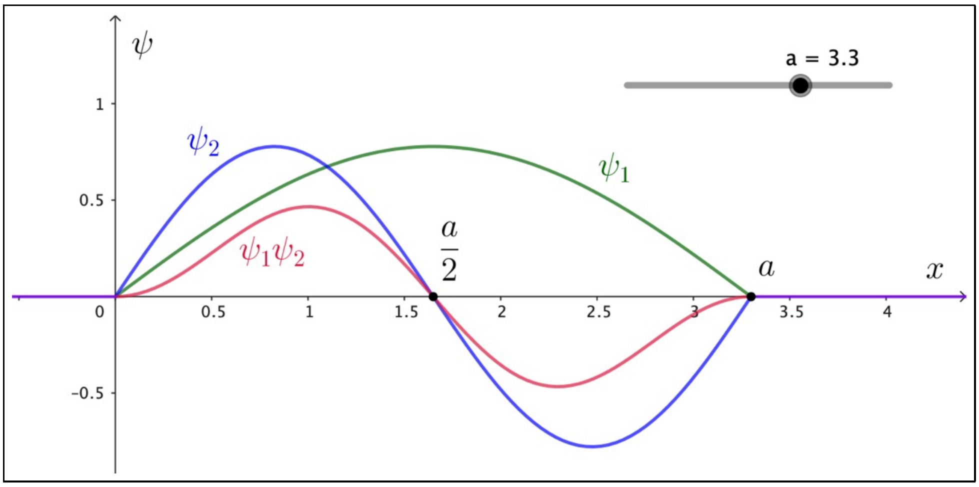
Das sieht in dieser ausgeschriebenen Form recht kompliziert aus, auch wenn wir es mit einer relativ einfachen Linearkombination zu tun haben.

(c) Für die Eingabe in `GeoGebra` folgt man am besten den Hinweisen im Aufgabentext, denn es sind ja alle drei Wahrscheinlichkeitsdichten $|\Psi_1(x,t)|^2$, $|\Psi_2(x,t)|^2$ und $|\Psi(x,t)|^2$ einzutragen. D.h., wir setzen $m = \omega = \hbar = 1$ und definieren $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$, um dann relativ simpel ψ_1 und ψ_2 einzugeben. Danach sind die Eingaben von ψ_1^2, ψ_2^2 nicht mehr schwierig und mit $c = c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ resp. $c^2 = c_1^2 = c_2^2 = \frac{1}{2}$ folgt weiter:

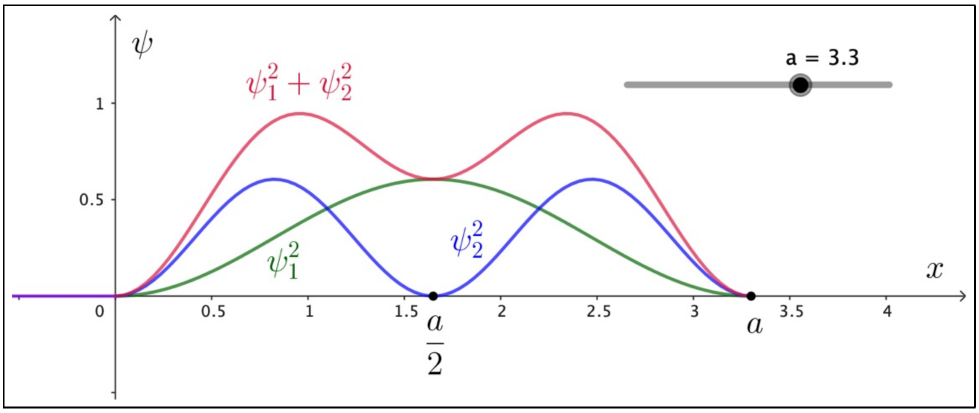
$$
\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + c_1c_2\psi_1\psi_2\cos(t) = \frac{1}{2}\big(\psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2\cos(\omega t)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\psi_1^2 + \psi_2^2\big) + \psi_1\psi_2\cos(\omega t)\big)
\end{aligned}
$$

Dabei können wir der Einfachheit halber $\omega = 1$ setzen, also auch weglassen, weil es hier eigentlich nur um eine Wahl der Zeiteinheit geht, die unserem Fall einfach so gewählt sein muss, dass wir bei der Bewegung des Schiebereglers für t die Veränderung von $|\Psi(x,t)|^2$ gut nachverfolgen können.

Im Folgenden sehen wir die grafischen Resultate. Zunächst sind $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ und $\psi_1(x)\psi_2(x)$ interessant. Diese Funktionen dürfen auch negative Werte annehmen, weil es sich ja noch nicht um Wahrscheinlichkeitsdichten handelt. $\psi_1(x)$ ist bezüglich der Mitte unseres Potentialtopfs ($x = \frac{a}{2}$) *gerade* (= achsensymmetrisch), während ψ_2 *ungerade* (= punktsymmetrisch) ist. Folglich ist auch $\psi_1(x)\psi_2(x)$ *ungerade*, denn das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ist selber wieder ungerade.



ψ_1^2 ist sicher auch *gerade*, wenn bereits ψ_1 gerade ist. Durch das Quadrieren wird nun aber auch ψ_2^2 *gerade*. Das bedeutet zudem, dass nun auch $\psi_1^2 + \psi_2^2$ positiv und gerade ist:



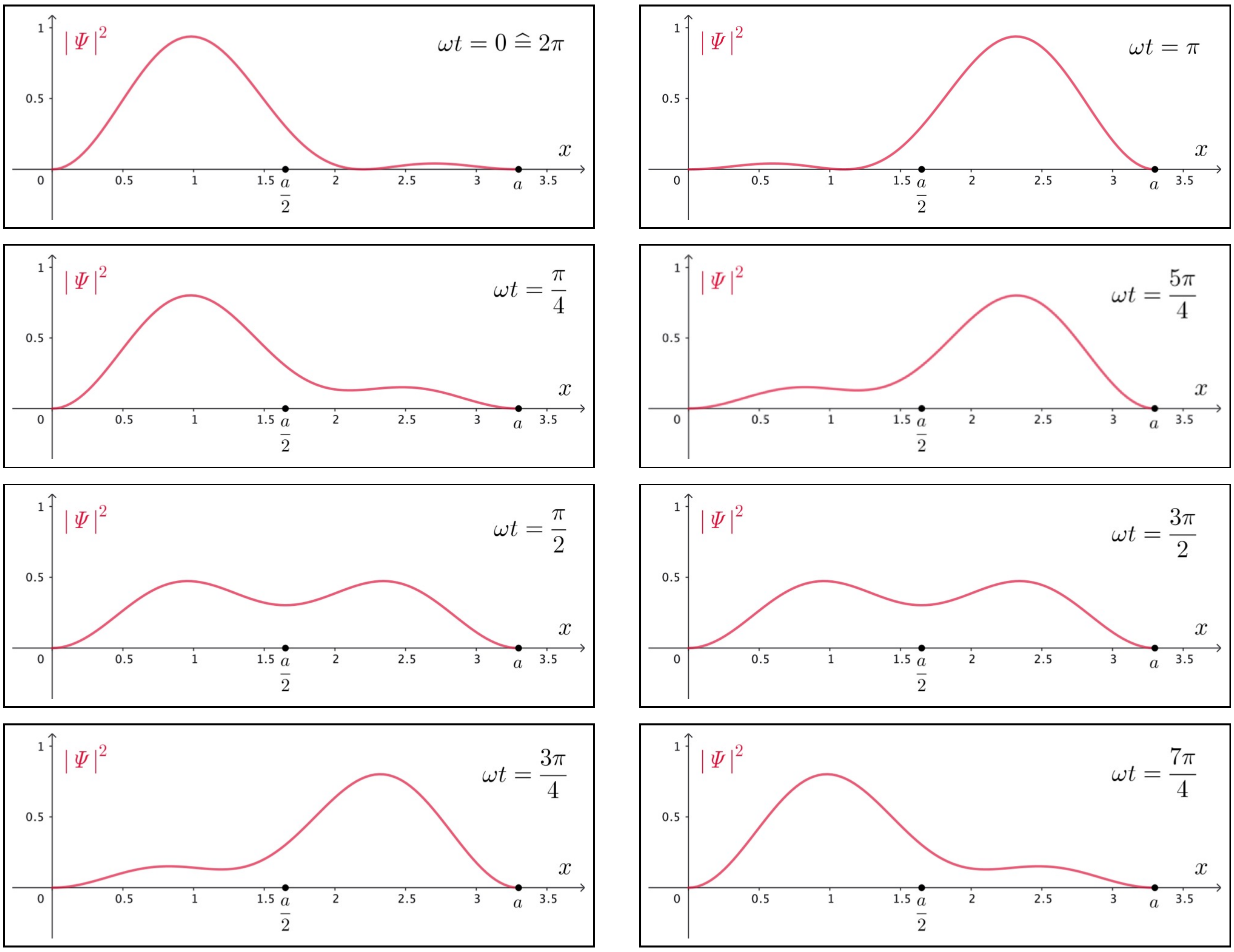
ψ_1^2 und ψ_2^2 sind sowohl gerade, als auch unabhängig von der Zeit. Der Anteil $\frac{1}{2}(\psi_1^2 + \psi_2^2)$ ist somit nicht in der Lage die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,t)|^2$ zu bewegen! Das schafft erst die Addition von $\psi_1\psi_2\cos(\omega t)$. Einerseits hängt nur dieses Glied von der Zeit t ab, andererseits ist die Amplitude vor der Cosinusfunktion, also $\psi_1\psi_2$, nun eben ungerade und somit erzeugt dieses Glied ein Hin- und Hergehen des Betragsquadrates $|\Psi(x,t)|^2$ der gesamten Wellenfunktion $\Psi(x,t)$.

Wir bemerken ganz bewusst: In $|\varPsi(x,t)|^2$ wird genau das Glied $\psi_1\psi_2\cos(\omega t)$ nicht quadriert! Es kann somit negative Werte aufweisen, sodass der durch $|\psi_2|^2 = \psi_2^2$ an einer bestimmten Stelle x vorgegebene "Ausgangswert" dadurch vergrössert, aber auch verkleinert werden kann. Interessant dabei ist, dass $\psi_1\psi_2\cos(\omega t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gerade so beschaffen ist, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit dadurch nicht verändert wird, also gleich 1 bleibt. Das ist bei näherem Hinsehen aber gar nicht so verwunderlich, denn schliesslich gilt

$$\int_0^a \psi_1\psi_2\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x = \cos(\omega t)\cdot\underbrace{\int_0^a \psi_1\psi_2\,\mathrm{d}x}_{=0} = 0 \quad ,$$

wie wir der ersten Grafik oben direkt ansehen.

Hier nun noch ein paar Ansichten der gesamten Wahrscheinlichkeitsdichte $|\varPsi(x,t)|^2$ zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb einer Periode:



Lassen wir die Zeit laufen, so sehen wir die Verschiebung der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\varPsi(x,t)|^2$. In unserem Zustand $\varPsi(x,t)$, der eine Linearkombination der beiden Zustände niedrigster Energie ist, "schwingt" unser Teilchen – resp. genauer: seine Wahrscheinlichkeitsdichte – im Topf hin und her.